最优设计中的新计算法

ZUIYOU SHEJI ZHONG DE XIN JISUANFA

邹海 著

新时代出版社

最优设计中的新计算法

邹　海 著

新时代出版社

内 容 简 介

应用电子计算机进行最优化设计，除了计算机、数学模型等条件外，还需要有一套数学方法。本书提供的就是在结合实际应用的基础上，总结出的系统化和条理化的计算方法，包括极值有理法、数值积分和数值微分的新方法等。这些方法在实践中已证明是可行的。

本书可供从事工程设计的技术人员在进行最优设计中使用，也可供管理工作者在选择最佳计划方案时参阅。

最优设计中的新计算法

邹 海 著

新时代出版社出版 新华书店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

850×1168 毫米 32 开本 8 印张 203 千字

1982年11月第 1 版 1982年11月北京第 1 次印刷

印数：00,001—14,000册

统一书号：15241·11 定价：1.00 元

序

电子技术的迅速发展和电子计算机的广泛应用，为在工程设计中进行最优设计；在工业生产自动化中对生产过程进行最佳控制；在企业管理中发挥最佳效率；在国民经济的综合平衡中实现最优调运等等，提供了现实的物质基础。

目前我国许多工程设计中，应用计算机进行最优设计已受到重视并开展研究，但还未全面展开。为满足加速实现“四个现代化”的要求，还急待普及这方面的知识。

六十年代初期开始了单项最优设计，七十年代以后进一步发展为“设计、生产和管理”一体化系统的研究工作，从而对数学研究也提出了新的要求，在我国各条战线上，也取得了可喜的成果。邹海同志的工作便是这些成果中的一项。

邹海同志将多年来在应用计算机实现最优设计方面的工作总结成系统化和条理化的计算方法，这里包括极值有理法、数值积分和数值微分的新方法等。这些方法在实践中已证明是可行的，在理论上也有了一定的根据与提炼。因此，我很高兴推荐这一本书给为实现“四个现代化”而战斗的广大工程技术人员和科研工作者，希望能有助于为加速实现“四个现代化”做出贡献，并在广泛应用中进一步发展与提高。

秦 元 勋

中国科学院 应用数学研究推广办公室

1978 年 10 月于北京

目　　录

引　言

在学习国内外应用最优化方法的经验，以及在计算机上对常用的最优化方法做了数字模拟实验后，进一步认识到，如黄金分割法、对分法、爬山法、梯度法等都是根据几个点的实验情况确定下一次的实验点。然后再实验，再根据新实验点周围几个点的实验情况去确定下一次的实验点。此时，以前的实验结果就都不用了。能否使实验的全部信息得到更充分地利用，以便更快地找到最好点，用尽少的实验次数达到精度高的要求，这个问题引起了我们的注意。如果能够进一步给出最好点的计算公式，将对做实验很有帮助，并且这是很有实际意义的工作。

怎样解决呢？这是个“难题”。一方面因为实验对象没有数学表达式，在数学表达式都不知道的情况下，又如何去构造最好点的计算公式。另一方面，即使有了实验目标与因素 x 之间函数关系式 $f(x)$，又如何写出极值点与实验数据 $(x_i,\ f_i)$ 之间的数学关系式。就是对于 $f(x)$ 为代数多项式的情况，如

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

$f(x)$ 的极值点与实验数据之间的数学关系式也不是一下子就能写得出来的。

为此，可以分析一下一项实验工作的全过程。一般来说，做一次实验得到一组数据 $(x_i,\ f_i)$，分析实验数据，再实验，再分析，…，直至得到最优实验结果。从这个实验的过程得到启发，我们能否利用实验过程中提供的信息，用函数关系反映各种因素间的相互关系。经过反复地探讨，终于找到了反映每次实验数据 $(x_i,\ f_i)$ 与极值点的关系式。如极值有理法，就是利用极值点处的斜率为零这个条件，导出了极值点与实验数据之间的关系式。如：

第一次实验点　$x_0=b_0$

第二次实验点　$x_1=b_0-\frac{y_0}{b_1}$

第三次实验点　$x_2=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}$

第四次实验点　$x_3=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\frac{y_2}{b_3}$

……

其中 b_i, y_{i-1} 均是由实验数据确定的系数，$i=1, 2, \cdots$。

大量的计算机数字模拟实验和各种应用的结果说明，在最优设计中，采用本书提出的最优设计的新计算方法，可以显著地减少实验（或计算）次数、节省计算机机时和提高精度。本书第二章提出一维情况的几种最优化方法及其误差估计，同时对 n 维情况也提出两种最优化方法供使用。

根据同样的观点，为了更充分地、合理地利用积分和微分过程的信息，作者总结出了数值积分、数值微分的新方法，这些方法适合处理离散情况。

在研究和应用过程中，曾经得到中国科学院副院长华罗庚教授、大连工学院副院长钱令希教授、南京大学何旭初教授、中国科学院计算中心席少林副研究员等同志的热情支持和高度评价，并提出了十分宝贵的改进意见，在此谨向他们表示衷心地感谢。

由于这是初步的工作，加之作者水平有限，一定会有很多错误和缺点，恳切地希望读者提出批评和指正。

第一章　预 备 知 识

1. 渐 近 分 式

如下的表达式

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}+\cdots \tag{1-1}$$

称为连分式。

分式$\frac{a_{i-1}}{b_i}$称做连分式的第 i 节，a_{i-1} 与 b_i 称做连分式第 i 节的两个项，a_0，a_1，a_2，…称做连分式的部分分子，b_0 称做连分式的常数项，b_1，b_2，b_3，…称做连分式的部分分母。部分分子 a_{i-1}，部分分母 b_i，$i=1$，2，…，在通常情况下，可以认为是独立变量，根据不同的需要，这些变量允许在不同的领域中变化。如可以设 a_{i-1}，b_i，$i=1$，2，…，是实数或复数，是一个变量或多个变量的函数等。按本书的目的，规定 $b_0, b_1, b_2, \cdots$和 a_0，a_1，a_2，…都是实数。

连分式的节数可以是有限或无限，在前一种情况下，可以把连分式记成

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

并且称做有限连分式，或更确切地称做 i 节连分式。在后一种情况下，把连分式记成

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

并且称做无限连分式。

假设连分式（1-1）各节的项都是有限实数，并且所有部分分母都不为零。把有限连分式记成

$$\frac{P_i}{Q_i}=b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}$$

并且把$\frac{P_i}{Q_i}$称做连分式（1-1）的第 i 个渐近分式。

每个有限连分式都是对其各项进行有限次运算的结果，如果假设其分子和分母各项皆为实数的话，则任何有限连分式皆为实数。如果假设有限连分式的项皆为有理数的话，则此连分式本身也是有理数。

反之，不能够轻易地认为无限连分式代表某个数值。在它的收敛性问题还未获得进一步的结论之前，它仅是一种数学形式的记号，然而，它应当是数学的研究对象。

定理一（渐近分式关系） 设

$$P_i=b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}$$
$$Q_i=b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}$$
$$i\geqslant 1$$

则

$$\frac{P_i}{Q_i}=\frac{b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}}$$
$$i\geqslant 1$$

其中

$$P_{-1}=1$$
$$P_0=b_0$$
$$Q_{-1}=0$$
$$Q_0=1$$

证明 首先证明 $i=1$ 情况，由连分式的定义，有

$$\frac{P_1}{Q_1}=b_0+\frac{a_0}{b_1}=\frac{b_0b_1+a_0}{b_1}=\frac{b_1P_0+a_0P_{-1}}{b_1Q_0+a_0Q_{-1}}$$

对于 $i=2$ 情况，同样有

$$\frac{P_2}{Q_2}=b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}$$

$$=b_0+\frac{a_0b_2}{b_1b_2+a_1}=\frac{b_0b_1b_2+b_0a_1+a_0b_2}{b_1b_2+a_1}$$

$$=\frac{b_2P_1+a_1P_0}{b_2Q_1+a_1Q_0},$$

如果对m成立，那么对（$m+1$）成立否？为此用（$m+1$）代替m时，从$\frac{P_m}{Q_m}$变到$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$，应以$b_m+\frac{a_m}{b_{m+1}}$代替b_m，于是

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}=\frac{b_mP_{m-1}+\frac{a_m}{b_{m+1}}P_{m-1}+a_{m-1}P_{m-2}}{b_mQ_{m-1}+\frac{a_m}{b_{m+1}}Q_{m-1}+a_{m-1}Q_{m-2}}$$

$$=\frac{b_{m+1}[b_mP_{m-1}+a_{m-1}P_{m-2}]+a_mP_{m-1}}{b_{m+1}[b_mQ_{m-1}+a_{m-1}Q_{m-2}]+a_mQ_{m-1}}$$

$$=\frac{b_{m+1}P_m+a_mP_{m-1}}{b_{m+1}Q_m+a_mQ_{m-1}}$$

由于m是任意正整数，故定理一成立。定理得证。

定理二 设

$$\frac{P_i}{Q_i}=\frac{b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}}$$

则当 $i\geqslant 1$，

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=\frac{(-1)^{i+1}a_0a_1a_2\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

证明 为了求证渐近分式的这一关系，考察相邻两个渐近分式的差，有

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=\frac{P_iQ_{i-1}-Q_iP_{i-1}}{Q_iQ_{i-1}}$$

用等式

$$P_i=b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}$$
$$Q_i=b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}$$

代替 P_i 和 Q_i，得到

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=\frac{1}{Q_iQ_{i-1}}[(b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2})Q_{i-1}$$
$$-(b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2})P_{i-1}]$$
$$=-a_{i-1}\frac{P_{i-1}Q_{i-2}-Q_{i-1}P_{i-2}}{Q_{i-1}Q_i}$$

对于 $P_{i-1}Q_{i-2}-Q_{i-1}P_{i-2}$ 施行同样的变换，有

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^2a_{i-1}a_{i-2}\frac{P_{i-2}Q_{i-3}-Q_{i-2}P_{i-3}}{Q_{i-1}Q_i}$$

重复上述代换过程，有

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^3a_{i-1}a_{i-2}a_{i-3}\frac{P_{i-3}Q_{i-4}-Q_{i-3}P_{i-4}}{Q_{i-1}Q_i}$$

$$\cdots\cdots$$

$$=(-1)^ia_{i-1}a_{i-2}\cdots a_0\frac{P_0Q_{-1}-Q_0P_{-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

$$=(-1)^{i+1}a_{i-1}a_{i-2}\cdots a_0\frac{1}{Q_{i-1}Q_i}$$

故对于任意正整数 i，等式

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1a_2\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

成立，也即

$$P_iQ_{i-1}-Q_iP_{i-1}=(-1)^{i+1}a_0a_1a_2\cdots a_{i-1}$$

定理得证。

定理三（变换连分式成级数） 连分式

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

可以变换为等价的级数形式

$$b_0+\frac{a_0}{Q_0Q_1}-\frac{a_0a_1}{Q_1Q_2}+\cdots+(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}+\cdots$$

其中

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}$$
$$i\geqslant 1$$
$$Q_{-1}=0$$
$$Q_0=1$$

证明　令 $P_{-1}=1$，$P_0=b_0$，由连分式的定义，得

$$b_0=\frac{P_0}{Q_0}$$

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}=\frac{b_0b_1+a_0}{b_1}=\frac{P_1}{Q_1}$$

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}=\frac{b_0b_1b_2+b_0a_1+a_0b_2}{b_1b_2+a_2}$$

$$=\frac{b_2P_1+a_1P_0}{b_2Q_1+a_1Q_0}=\frac{P_2}{Q_2}$$

对于一般项，令

$$P_i=b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}$$
$$Q_i=b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}$$

则

$$\frac{P_i}{Q_i}=\frac{b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}}$$

$$=b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}$$

为证明此关系，用 $i+1$ 代替 i 时上述关系仍然成立否？当用 $i+1$ 代替 i 时，应以 $b_i+\frac{a_i}{b_{i+1}}$ 代替 b_i，于是

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}=\frac{b_iP_{i-1}+\frac{a_i}{b_{i+1}}P_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+\frac{a_i}{b_{i+1}}Q_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}}$$

$$=\frac{b_{i+1}[b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}]+a_iP_{i-1}}{b_{i+1}[b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}]+a_iQ_{i-1}}$$

$$=\frac{b_{i+1}P_i+a_iP_{i-1}}{b_{i+1}Q_i+a_iQ_{i-1}}$$

因此，关系成立。

再根据定理二，知道对于任意正整数 i 都有等式

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

成立。由此，令 $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$代入上式后，得

$$\frac{P_1}{Q_1}-\frac{P_0}{Q_0}=\frac{a_0}{Q_0Q_1}$$

$$\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}=-\frac{a_0a_1}{Q_1Q_2}$$

……

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

把这些等式加起来，并且由于$\frac{P_0}{Q_0}=b_0$，得

$$\frac{P_i}{Q_i}=b_0+\frac{a_0}{Q_0Q_1}-\frac{a_0a_1}{Q_1Q_2}+\cdots+(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

因为 i 是任意正整数，所以

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

$$=b_0+\frac{a_0}{Q_0Q_1}-\frac{a_0a_1}{Q_1Q_2}+\cdots+(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}+\cdots$$

定理得证。

推论 设连分式

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

式中 a_{i-1}，b_i 均为实常数，$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$。则连分式可以变换成等价的偶数节或奇数节渐近分式的级数

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}=b_0+\frac{a_0b_2}{Q_0Q_2}+\frac{a_0a_1a_2b_4}{Q_2Q_4}+\cdots+\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-2}b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots$$

或

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}=b_0+\frac{a_0}{b_1}-\frac{a_0a_1b_3}{Q_1Q_3}-\cdots-\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-1}b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

其中

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

证明　首先分析指标相差2的两个渐近分式的差。在等式

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

中，用 $i+1$ 代替 i，得到

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}=(-1)^i\frac{a_0a_1\cdots a_i}{Q_iQ_{i+1}}$$

把上面两式加起来，得到如下等式

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^i\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{Q_i}\left(\frac{a_i}{Q_{i+1}}-\frac{1}{Q_{i-1}}\right)$$

$$=(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}b_{i+1}}{Q_{i-1}Q_{i+1}}$$

其次，在上式中用 $2k-1$ 代替 i，得

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}-\frac{P_{2k-2}}{Q_{2k-2}}=\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-2}b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

令 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$时，有以下等式

$$\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_0}{Q_0}=\frac{a_0b_2}{Q_0Q_2}$$

$$\frac{P_4}{Q_4}-\frac{P_2}{Q_2}=\frac{a_0a_1a_2b_4}{Q_2Q_4}$$

……

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}-\frac{P_{2k-2}}{Q_{2k-2}}=\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-2}b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

把这些等式加起来，并且由于$\frac{P_0}{Q_0}=b_0$，于是得偶数节渐近分式的级数

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}=b_0+\frac{a_0b_2}{Q_0Q_2}+\frac{a_0a_1a_2b_4}{Q_2Q_4}+\cdots+\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-2}b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

同样，用$2k$代替i时，又得等式

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}-\frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}}=-\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-1}b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$

令$k=1$，2，3，…时，可得以下等式

$$\frac{P_3}{Q_3}-\frac{P_1}{Q_1}=-\frac{a_0a_1b_3}{Q_1Q_3}$$

$$\frac{P_5}{Q_5}-\frac{P_3}{Q_3}=-\frac{a_0a_1a_3b_5}{Q_3Q_5}$$

……

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}-\frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}}=-\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-1}b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$

把这些等式加起来，并且根据$\frac{P_1}{Q_1}=b_0+\frac{a_0}{b_1}$，于是得奇数节渐近分式的级数

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}=b_0+\frac{a_0}{b_1}-\frac{a_0a_1b_3}{Q_1Q_3}-\cdots-\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-1}b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$

推论得证。

连分式应用 现在举例说明连分式的计算。

例 1

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}{+}\frac{1}{2}{+}\cdots{+}\frac{1}{2}{+}\cdots$$

截断第i节后，就得出$\sqrt{2}$的近似值，如

$i=0$ $\qquad\sqrt{2}\approx 1$

$i=1$ $\qquad\sqrt{2}\approx 1+\frac{1}{2}=1.5$