

高 / 等 / 学 / 校 / 教 / 材

现代控制理论基础

现代 控制 理论基础

梁慧冰 孙炳达 编

MODERN



CONTROL



THEORY



BASE



机械工业出版社

高等学校教材

现代控制理论基础

梁慧冰 孙炳达 编



机械工业出版社

本书适应工程与应用类院校自动化及相近专业的需要,力图结合系统的物理概念,深入浅出地阐述了现代控制理论的最基本内容,包括状态空间的基本概念和方法,系统的状态空间描述和标准形,系统的运动分析,能控性与能观测性,结构分解和实现问题,以及系统的稳定性分析,状态反馈和状态观测器等。

本书可供工业自动化、电子信息以及其他有关专业作为教材选用,也适于在职人员和广大青年读者自学深造使用。

现代控制理论基础

梁慧冰 孙炳达 编

*

责任编辑:贡克勤 版式设计:霍永明

封面设计:文心 责任校对:罗凤书

责任印制:路琳

*

机械工业出版社出版(北京市百万庄大街22号)

邮政编码:100037

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

北京市密云县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ ·印张 11.25·字数 271 千字

1998年10月第1版第1次印刷

印数 0 001—3 000 定价:16.00 元

*

ISBN 7-111-06218-3/TP·720(课)

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

前 言

随着科学技术的迅速发展,现代控制理论在经典控制理论的基础上得以建立和发展,在工业控制领域以及其它领域,如航空航天、核技术、生物工程等新兴领域中发挥着越来越重要的作用。因此,自60年代以来,国内外的许多大学都把现代控制理论(基础)列为自动化或相关专业的专业理论基础课程。

现代控制理论是以状态空间理论为核心,对动态系统进行分析 and 研究的。它不但可以处理单变量线性定常系统,还可以处理多变量、时变、非线性系统。因此,涉及的数学知识多,公式推导繁杂,不易掌握。自然,不同层次或不同侧重面的院校和专业,对现代控制理论教授内容的要求是不尽相同的,目前已有的现代控制理论教材还无法满足各类不同要求。本书着重适应工程与应用类自动化专业或相近专业的教学及有关技术人员自学所需,编者根据多年的教学实践,力求尽量避免过多的数学推导和深奥的数学知识,并结合控制系统的物理含义和例子,深入浅出地讲述有关状态空间理论和分析方法,使学生能在有限的学时内,掌握好现代控制理论的最基本知识。另外,注意了提高内容的可读性,使读者也能通过自学弄懂书中的基本内容。

全书分为五章,第一至第四章的中心内容是讲述状态空间理论和分析方法,主要介绍状态空间数学模型的建立,系统的运动分析,能控性和观测性以及稳定性分析。第五章叙述系统的综合,主要内容有反馈控制系统的构成和设计以及状态观测器的设计等。

本书可作为高校、大专和业余大学工业自动化、电子与信息及相关专业的《现代控制理论(基础)》课程的教材,也可供工程技术人员或青年读者自学使用。

本书第一至第三章由广东工业大学梁慧冰教授编写,第四、五章由广东工业大学孙炳达副教授编写。在本书编写过程中,得到了广东工业大学教务处、电气工程及自动化系、自动化教研室等单位,以及自动化教研室全体老师的支持,在此,编者对上述单位和个人以及本书所列参考文献的作者,一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免有不妥和错误之处,敬请读者批评指正。

编 者

1997年12月于广州 广东工业大学

目 录

前言	
绪论	1
第一章 线性系统的状态空间描述	2
第一节 状态空间分析法	2
第二节 状态结构图	7
第三节 状态空间描述的建立	9
第四节 化输入-输出描述为状态空间描述及其几种标准型式	13
第五节 由状态空间描述求传递函数	26
第六节 离散时间系统的状态空间描述	30
第七节 状态向量的线性变换	31
习题	41
第二章 线性系统的运动分析	43
第一节 状态方程的齐次解(自由解)	43
第二节 状态转移矩阵	44
第三节 线性系统的运动分析	53
第四节 连续系统的时间离散化	56
第五节 线性离散系统的运动分析	59
习题	64
第三章 线性系统的能控性与能观测性	67
第一节 能控性定义	67
第二节 能控性判据	68
第三节 能观测性及其判据	76
第四节 离散系统的能控性与能观测性	81
第五节 能控性与能观测性的对偶关系	86
第六节 能控标准型与能观测标准型	87
第七节 系统的结构分解	97
第八节 传递函数阵的实现问题	107
第九节 能控性和能观测性与传递函数零极点的关系	116
习题	118
第四章 控制系统的稳定性分析	121
第一节 动态系统的外部稳定性	121
第二节 动态系统的内部稳定性	122
第三节 李雅普诺夫判稳第一方法	127
第四节 李雅普诺夫判稳第二方法	130
第五节 李雅普诺夫方法在线性系统中的应用	134
习题	138
第五章 线性定常系统的综合	140
第一节 线性反馈控制系统的基本结构	140
第二节 带输出反馈系统的综合	142
第三节 带状态反馈系统的综合	146
第四节 状态重构与状态观测器的设计	152
第五节 带观测器状态反馈系统的综合	160
第六节 解耦控制系统的综合	163
习题	172
参考文献	174

绪 论

现代科学技术的迅速发展,对自动控制的精度、速度、范围及适应能力的要求越来越高,从而推动了自动控制理论和技术的迅速发展,从1932年奈魁斯特(H·Nyquist)发表反馈放大器的稳定性论文以来,控制理论学科走过了60年的发展历程。可以这样划分:前30年是经典控制理论的成熟和发展阶段;后30年是现代控制理论的形成和发展阶段。

经典控制理论是一种单回路线性控制理论,只适用于单输入单输出控制系统。主要研究对象是单变量常系数线性系统,系统数学模型简单,基本分析和综合方法是基于频率法和图解法。若引入等效的线性化环节,把相应线性控制系统的概念和分析方法进行修正和开拓,经典控制理论也可以有效地处理简单的非线性控制系统。经典控制理论的研究对象、数学方法和计算手段与当时社会需要和技术水平密切相关。尽管如此,经典控制理论不仅推动了当时自动化技术的发展和普及,而且在今天许多工程和技术领域中仍继续得到应用。

60年代前后,由于计算机技术的成熟和普及,促使控制理论由经典控制理论向现代控制理论过渡。现代控制理论的形成使控制理论在深度和广度上都进入一个崭新的发展时期。现代控制理论与经典控制理论比较,具有如下特点:

1. 控制对象结构的转变

控制对象结构由简单的单回路模式向多回路模式转变,即从单输入单输出向多输入多输出转变。它可以处理极为复杂的工业生产过程的优化和控制问题。

2. 研究工具的转变

- 1) 积分变换法向矩阵理论、几何方法转变,由频率法转向状态空间的研究;
- 2) 由于计算机技术的发展,使手工计算转向计算机计算。

3. 建模手段的转变

由机理建模向统计建模转变,开始采用参数估计和系统辨识的统计建模方法。

由此可知,控制理论研究不再局限于简单常系数线性系统模式,而是研究更为复杂的各类系统。由于航天技术、信息技术和制造工业技术的革命,要求控制理论能处理更加复杂的系统控制问题,提供更加有效的控制策略。因而促使现代控制理论不断发展,出现了许多分支,如最优控制理论、最优估计理论、随机控制理论、非线性控制理论、大系统理论以及最近备受关注的模糊控制理论、智能控制理论等。

现代控制理论是一门正在蓬勃发展的学科,内容十分广泛,本书作为“现代控制理论基础”只是给读者有关“现代控制理论”的初步基础知识,并只限于讨论线性定常系统。相信读者在弄懂这些基础知识以后,可以进行更深入的学习和研究。

第一章 线性系统的状态空间描述

在经典控制理论中, 对一个线性定常系统, 是用高阶常微分方程或传递函数来描述的, 它反映系统输出响应与输入的关系, 也称为外部描述。它一般只能处理单输入单输出系统, 并且对存在于系统内部的中间变量是不能描述的。现代控制理论引入了状态和状态空间的概念, 用由状态变量构成的一阶微分方程组来描述, 揭示了系统的内部特征, 也称为内部描述。它可以处理多输入多输出系统, 而且还可以方便地处理初始条件。因此, 作为根据现代控制理论对控制系统进行分析和综合的前提, 必须首先建立控制系统在状态空间中的数学模型, 即控制系统的状态空间描述。

第一节 状态空间分析法

一、例子

通过下面两个例子说明引入状态空间分析方法建立数学模型的过程以及状态空间的一些基本概念。

1. R-L-C 电网络系统例

设有如图 1-1 所示的 R-L-C 电网络, u 为输入变量, y 为输出变量, 求它的数学模型。

(1) 用经典法建立高阶微分方程

根据基尔霍夫电路定律, 有电压平衡方程

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u \quad (1-1)$$

由 $y = \frac{1}{C} \int i dt$ 即 $i = C \frac{dy}{dt}$

式 (1-1) 消去中间变量 i , 得

$$LC \frac{d^2 y}{dt^2} + RC \frac{dy}{dt} + y = u \quad (1-2)$$

式 (1-2) 即为描述该系统输入输出关系的二阶微分方程。假定系统有零初始条件, 用传递函数形式表示为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

(2) 用现代法建立一阶微分方程组

设变量 $x_1 = i, \quad x_2 = \int i dt$

则式 (1-1) 改写为 $L\dot{x}_1 + Rx_1 + \frac{1}{C}x_2 = u$

亦即 $\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{LC}x_2 + \frac{1}{L}u$

注意到 $\dot{x}_2 = x_1$

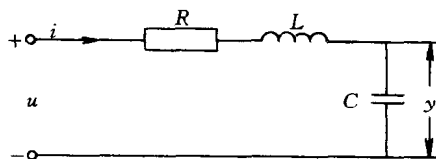


图 1-1 RLC 电路

写成矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

同时

$$y = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} x_2$$

写成

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. 机电系统例

图 1-2 为直流他励电动机的示意图。

图中 R 、 L ——分别为电枢回路的电阻和电感；

i_f ——励磁电流，为常数；

J 、 f ——分别为电动机轴上的惯量和阻尼；

u ——输入电压；

θ ——输出量，即转轴角位移。

(1) 建立高阶微分方程

根据电枢回路电压平衡方程，
有

$$e + iR + L \frac{di}{dt} = u \quad (1-3)$$

根据力矩平衡方程，有

$$M = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} \quad (1-4)$$

式中 e ——电动机反电动势；

M ——电动机驱动力矩。

由电动机原理，有

$$e = K_e \frac{d\theta}{dt}$$

$$M = K_{mi} (i_f \text{ 为常数, 且磁场不饱和条件下})$$

对式 (1-3) 和式 (1-4)，消去中间变量 i ，得

$$\frac{d^3\theta}{dt^3} + \left(\frac{R}{L} + \frac{f}{J} \right) \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{fR + K_e K_m}{JL} \frac{d\theta}{dt} = \frac{K_m}{JL} u \quad (1-5)$$

在零初始条件下，相应的传递函数为

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{K_m}{s[LJs^2 + (RJ + fL)s + (fR + K_e K_m)]}$$

(2) 建立一阶微分方程组

设变量 $x_1 = \theta$ $x_2 = \frac{d\theta}{dt}$, $x_3 = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

则式 (1-5) 改写为

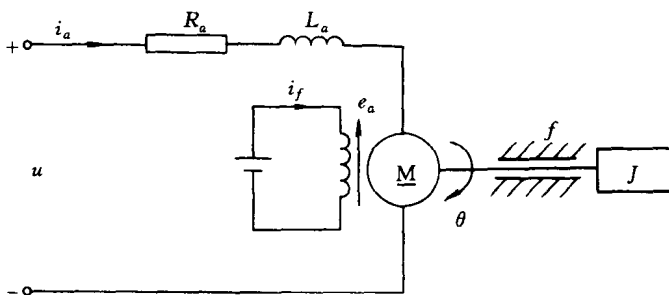


图 1-2 直流电动机示意图

$$\dot{x}_3 = -\left(\frac{R}{L} + \frac{f}{J}\right)x_3 - \frac{fR + K_e K_m}{JL}x_2 + \frac{K_m}{JL}u$$

考虑到 $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{x}_3 = x_2$

写成矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{fR + K_e K_m}{JL} & -\left(\frac{R}{L} + \frac{f}{J}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_m}{JL} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

通过上面两个例子, 可得如下几个概念:

- 1) 高阶微分方程通过选择适当的变量可变为—阶微分方程组。
- 2) —阶微分方程组的个数等于变量的个数, 即等于高阶微分方程的阶数。
- 3) 变量的选择不是唯一的, 选择的变量不同, 得到的方程组也不同。

二、状态变量和状态矢量

状态是指系统的运动状态。状态变量是完全表征系统运动状态的且个数最少的一组变量。一个用 n 阶微分方程描述的系统, 就有 n 个独立变量, 当这 n 个独立变量的时间响应都求得时, 系统的运动状态也就被揭示无遗了。因此, 可以说 n 阶系统的状态变量就是该系统的 n 个独立变量。关于状态变量可以进一步说明如下:

- 1) 同一个系统, 状态变量的选取不是唯一的。
 - 2) 状态变量应该是相互独立的, 且其个数应等于微分方程的阶数, 即等于系统中独立储能元件的个数。
 - 3) 状态变量在初始时刻 t_0 的值, 就是系统的初始状态, 即系统的 n 个独立初始条件。
- 如果 n 个状态变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$ 用矢量的形式表示, 则为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]$$

则 $\mathbf{x}(t)$ 被称为状态矢量。

三、状态空间和状态空间描述

以状态变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为坐标轴构成的 n 维空间称为状态空间。状态空间中的每一点都代表了状态变量的唯一的、特定的一组值。换言之, 在某一时刻 t_1 的状态矢量 $\mathbf{x}(t_1)$ 在状态空间中是一个点, 而初始时刻 t_0 的状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 是状态空间的一个初始点。随着时间的推移, $t > t_0$, $\mathbf{x}(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹, 称为状态轨迹。

用状态变量构成输入、输出与状态之间的关系方程组即为状态空间描述。记为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \quad (1-6)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, u) \quad (1-7)$$

对于单输入-单输出线性定常系统, 状态空间描述的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2u \\ &\cdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nu \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + du \quad (1-9)$$

简洁地写成矩阵形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \quad (1-10)$$

$$y = \mathbf{cx} + du \quad (1-11)$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{—— } n \text{ 维状态矢量;}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{—— 系统矩阵, 为 } n \times n \text{ 方阵;}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{—— 输入矩阵或控制矩阵, 为 } n \times 1 \text{ 列阵;}$$

$$\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \quad \text{—— 输出矩阵, 为 } 1 \times n \text{ 行阵。}$$

在状态空间描述中, 上述的式 (1-6)、式 (1-8) 和式 (1-10) 为状态方程, 式 (1-7)、式 (1-9) 和式 (1-11) 为输出方程。

对于多输入-多输出系统, 设有 r 个输入, m 个输出, 此时状态空间描述为

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1r}u_r$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2r}u_r$$

...

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nr}u_r$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1r}u_r$$

$$y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots + d_{2r}u_r$$

...

$$y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + d_{m2}u_2 + \cdots + d_{mr}u_r$$

写成矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (1-12)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (1-13)$$

式中 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{A}$ 与单变量 (单输入-单输出) 系统相同, 分别为 n 维状态矢量和 $n \times n$ 系统矩阵;

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad \text{——} r \text{ 维输入(或控制) 矢量}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \text{——} m \text{ 维输出矢量;}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \quad \text{——} n \times r \text{ 输入(或控制) 矩阵;}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{——} m \times n \text{ 输出矩阵;}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \quad \text{——} m \times r \text{ 直接传递矩阵。}$$

同样, 状态空间描述由式 (1-12) 状态方程和式 (1-13) 输出方程组成。

和经典控制理论相类似, 可以用框图表示系统信号的传递关系。对于式 (1-10)、式 (1-11) 所描述的单变量系统和式 (1-12)、式 (1-13) 所描述的多变量系统, 它们的框图分别如图 1-3a 和图 1-3b 所示。

图中用单线箭头表示标量信号传递, 用双线箭头表示矢量信号传递。有时为了简便, 不论标量信号还是矢量信号均用单线箭头表示。

从状态空间描述和系统框图都能清楚地说明, 它们既表征了输入对于系统内部状态的因果关系, 又反映了内部状态对于外部输出的影响, 即完全表征系统的一切动力学特征, 所以状态空间描述是对系统的一种完全的描述。

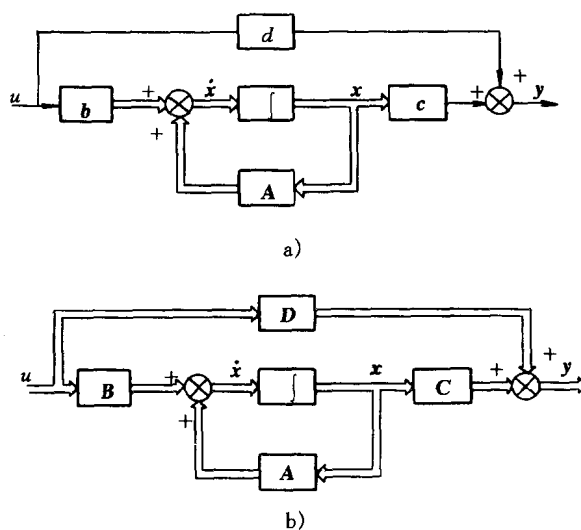


图 1-3 系统框图

a) 单变量系统 b) 多变量系统

以上的讨论属于线性定常系统范畴，其特征是它的状态空间描述中的 A 、 B 、 C 、 D 等矩阵的元素既不依赖于输入、输出，也与时间无关。

对于线性时变系统，其状态空间描述表示为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t) &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B}(t) &= \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1r}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nr}(t) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C}(t) &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(t) & c_{m2}(t) & \cdots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{D}(t) &= \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1r}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1}(t) & d_{m2}(t) & \cdots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

它们的元素有些或全部是时间 t 的函数。

对于非线性系统，可以用如下的 n 个一阶微分方程组来描述其动态特性。

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_r; t) \\ i &= 1, 2, \cdots, n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_j &= g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_r; t) \\ j &= 1, 2, \cdots, m\end{aligned}$$

用矢量矩阵表示，则为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{g}$ ——矢量函数；

f_i 、 g_i —— $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{g}$ 的元素。

本书只局限于论述线性定常系统，不涉及对线性时变系统和非线性系统的讨论。

第二节 状态结构图

在状态空间分析中，常用状态结构图来反映系统各状态变量之间的信息传递关系。状态

空间描述的结构图可按如下方法绘制：积分器的数目等于状态变量数，将它们画在适当的位置，每个积分器的输出为相应的某个状态变量，然后根据所给的状态方程和输出方程，画出相应的加法器和放大器，最后用箭头将这些元件连接起来。

例 1-1 一阶微分方程

$$\dot{x} = ax + bu$$

其状态结构图如图 1-4 所示。

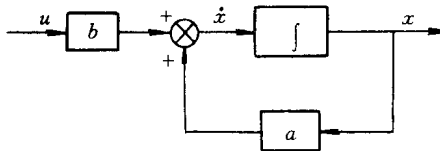


图 1-4 一阶微分方程的状态结构图

例 1-2 已知三阶单变量系统的状态空间描述为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 + bu$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

其状态结构图如图 1-5 所示。

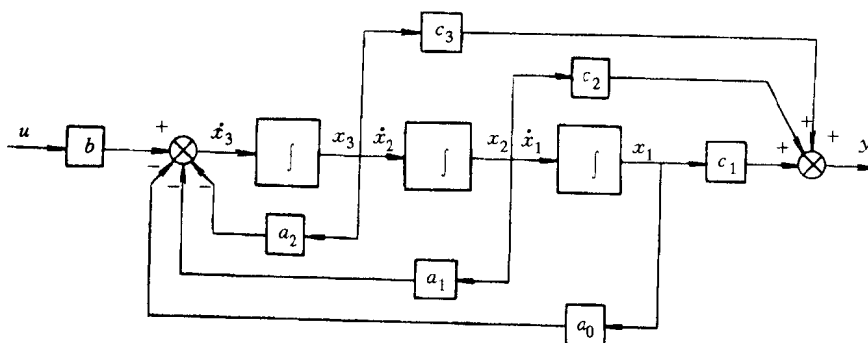


图 1-5 三阶单变量系统的状态结构图

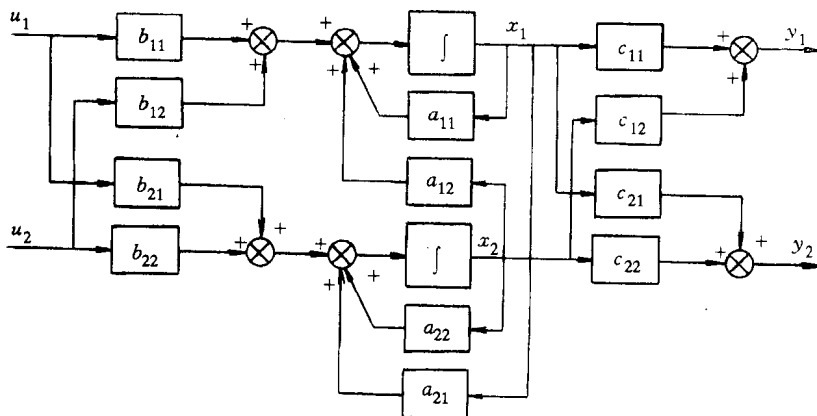


图 1-6 二输入二输出二阶系统的状态结构图

例 1-3 已知二输入二输出二阶系统

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$$

$$y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$$

它的状态结构图如图 1-6 所示。

第三节 状态空间描述的建立

给定系统的状态空间描述一般可以从三个途径求得：一是由系统框图来建立，即根据系统各个环节的实际连接，写出相应的状态空间描述；二是从系统的物理或化学机理进行推导；三是由描述系统运动过程的高阶微分方程或传递函数予以演化而得。本节先介绍前两种方法。

一、由系统框图建立状态空间描述

从第二节可以看出，由状态结构图可以直接写出状态空间描述，现在的问题是如何把系统框图变换为相应的状态结构图。

先看两个简单例子：

一阶系统和二阶系统的框图如图 1-7 所示，变换为相应的状态结构图，如图 1-8 所示。



图 1-7 系统框图

a) 一阶系统 b) 二阶系统

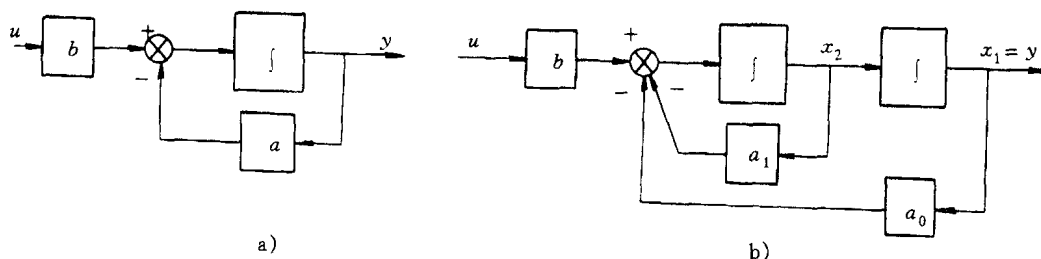


图 1-8 状态结构图

a) 一阶系统 b) 二阶系统

把每个积分器的输出选作状态变量 x_i ，其输入便是 $\dot{x}_i$ ，于是一阶系统相应的状态空间描述便为

$$\dot{x} = -ax + bu$$

二阶系统相应的状态空间描述为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_0x_1 - a_1x_2 + bu$$

下面看两个复杂系统的例子。

例 1-4 设系统框图如图 1-9a 所示, 输入为 u , 输出为 y 。试求其状态空间描述。

解 把系统框图中各环节化为相应的状态结构图, 得系统状态结构图如图 1-9b 所示。

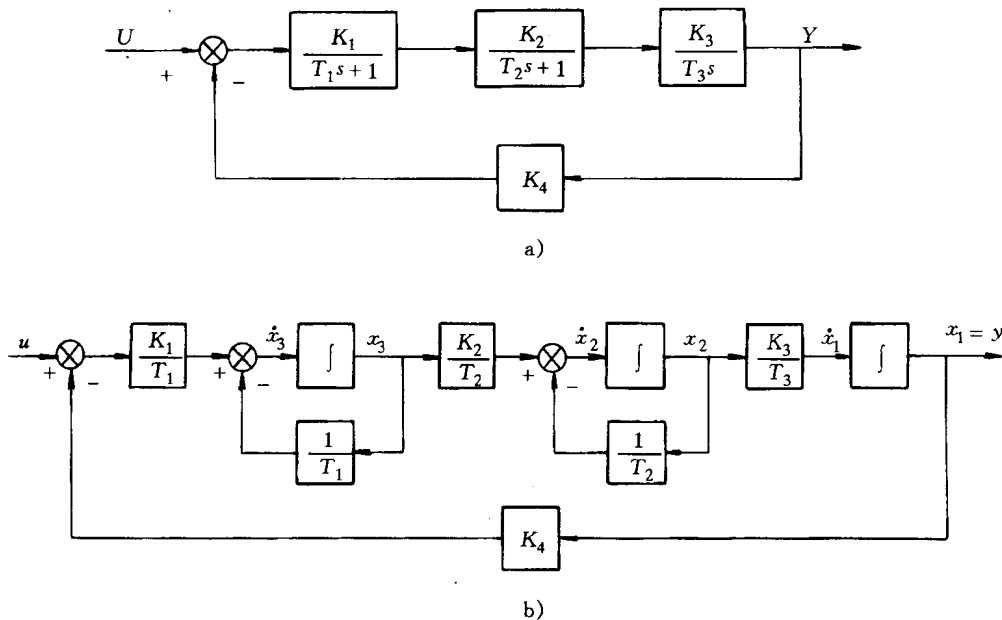


图 1-9 系统框图和状态结构图

a) 框图 b) 状态结构图

由图得

$$\dot{x}_1 = \frac{K_3}{T_3} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2} x_2 + \frac{K_2}{T_2} x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{T_1} x_3 - \frac{K_1 K_4}{T_1} x_1 + \frac{K_1}{T_1} u$$

$$y = x_1$$

写成矩阵形式, 系统的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_3}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{K_2}{T_2} \\ -\frac{K_1 K_4}{T_1} & 0 & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{T_1} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$$

例 1-5 系统框图如图 1-10a 所示, 这是一个有零点的系统, 首先把分子分母同阶的环节展开成部分表示, 即

$$\frac{s+z}{s+p} = 1 + \frac{z-p}{s+p}$$

得等效框图如图 1-10b 所示, 则它的状态结构图如图 1-10c 所示, 从图可得系统的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(a_0+k) & -a_1 & k \\ -(z-p) & 0 & -p \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ z-p \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$$

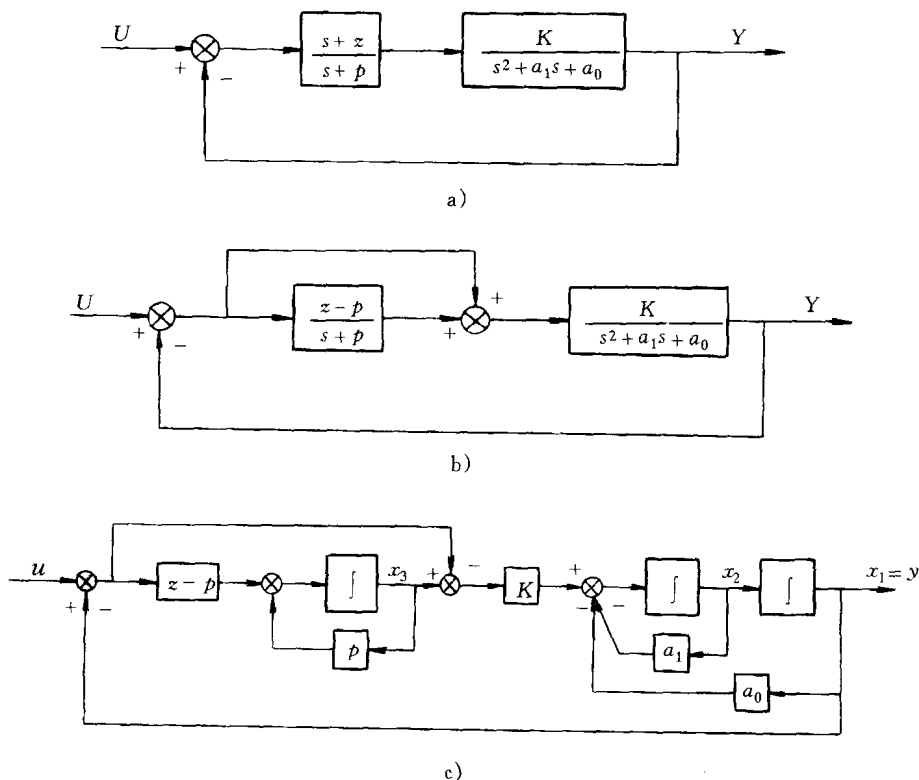


图 1-10 系统框图和状态结构图

a) 框图 b) 等效框图 c) 状态结构图

二、由系统机理建立状态空间描述

一般的控制系统, 按其能量属性, 可分为电气、机械、机电、气动液压、热力等系统, 如果已知内部结构, 则根据其物理规律, 如基尔霍夫定律、牛顿定律、能量守恒定律等, 即可建立其状态方程。

第一节所举两个例子分别为电网络系统和机电系统。这里再以电网络系统和机械系统为例加以说明。

例 1-6 电网络系统。电网络如图 1-11 所示。输入为电压源 $e_s(t)$ 和电流源 $i_s(t)$, 电流方向及电压极性如图中所示, 输出指定为 bc 两端的电压, 求此电路的系统方程。

解 确定状态变量: 此电路有三个独立储能元件 C_1 、 C_2 、 L , 故有三个独立变量。选

电感电流 i_L , 电容电压 u_{C1} 和 u_{C2} 为状态变量。并有

$$\left. \begin{aligned} u_L &= L \frac{d}{dt} i_L \\ i_{C1} &= C_1 \frac{d}{dt} u_{C1} \\ i_{C2} &= C_2 \frac{d}{dt} u_{C2} \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

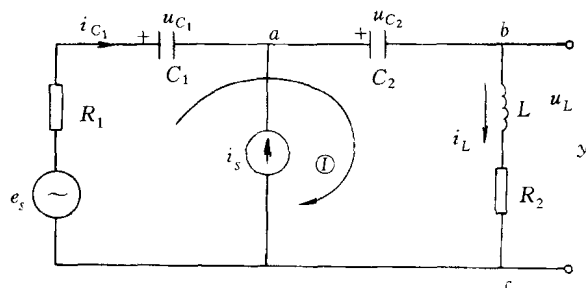


图 1-11 R-L-C 电路图

从节点 a 、 b 入手, 按基尔霍夫电流法列电流方法

$$i_{C1} + i_s - i_{C2} = 0 \quad (1-15)$$

$$i_{C2} - i_L = 0 \quad (1-16)$$

从回路①按电压法则列电压平衡方程

$$e_s - R_1 i_{C1} - u_{C1} - u_{C2} - u_L - R_2 i_L = 0 \quad (1-17)$$

由式 (1-15) ~ 式 (1-17) 解 u_L 、 i_{C1} 、 i_{C2} 得

$$i_{C1} = i_{C2} - i_s = i_L - i_s$$

$$i_{C2} = i_L$$

$$u_L = -(R_1 + R_2) i_L - u_{C1} - u_{C2} + e_s + R_1 i_s$$

把上面各式代入式 (1-14) 整理得系统的状态方程和输出方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{R_1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_s \\ i_s \end{bmatrix} \\ y = u_L + R_2 i_L &= -R_1 i_L - u_{C1} - u_{C2} + e_s + R_1 i_s = \\ &= \begin{bmatrix} -R_1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_s \\ i_s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

一般机械系统由三种基本元件组成, 它们是弹簧、阻尼器和质量块。这些元件中, 位移量 x 与作用反作用力 f 之间存在如下关系:

弹簧: $f_k = Kx$, K ——弹簧系数

阻尼器: $f_d = D\dot{x}$, D ——阻尼系数

质量块: $f_m = m\ddot{x}$, m ——质量

状态方程就是根据这些关系和力平衡法则建立的, 一般地, 把位移和速度选作状态变量较为方便。图 1-12 所示的机械运动模型中, m 表示质量块 (即质量), K 表示弹簧 (也称弹性系数), D 表示阻尼器 (也称阻尼系数)。在外力 u 作用下产生位移 x , 根据力平衡法则, 有

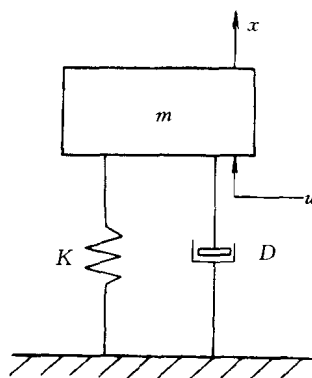


图 1-12 机械运动模型图