# 随机信号分析

杨福生

清华大学出版社

# 随机信号分析

杨 福 生



清华大学出版社

## 内容簡介

本书介绍随机信号的基本分析方法，包括随机信号的表征，随机信号通过线性(包括窄带)及非线性系统的分析，随机信号特征的估计、非平稳过程以及点过程等内容。着重结合工程应用的要求阐明基本原理。

本书的特点是连续时间与离散时间并重，以便结合计算机作数字处理；取材时注意引入一般教材较少讨论的内容，如随机过程的三阶相关和双谱，非线性系统的 Volterra 级数和维纳泛函分解，非平稳过程的 Wigner-Ville 分布等；使读者对信号分析的某些发展有所了解；书中举例较多，使读者更好地了解、掌握分析方法及其实用意义。

本书可供高等学校生物医学工程专业以及机械、水利、自动化、工程物理等有关专业用作教材或参考书，也可供有关专业的教师、研究生及工程技术人员阅读参考。



**随机信号分析**

杨 福 生

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

中国科学院印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本：850×1168 1/32 印张：11.25 字数：292千字

1990年7月第1版 1990年7月第1次印刷

印数：0001—5 000

ISBN 7-302-00610-5/TN·14

定价：2.90 元

# 前 言

随着科学技术的进步，随机信号的分析与处理愈来愈引起研究者的注意。它已广泛应用在生物医学工程、生物物理、自动控制、机械振动、水声、雷达等许多工程领域中，并已产生明显作用。本书是为清华大学电机系生物医学电子学专业学生开设的“随机信号分析”课程的教材，本课程属于技术基础课性质。其先修课程是概率论、信号与系统和数字信号处理，后续课程是统计信号处理或生物医学信号处理。本书除取材和举例主要结合生物医学信号外，就其基本内容而言，也是其他许多专业所需要的。

本书内容共分七章。概括起来，包括以下几个方面：

(1) 表征随机信号的主要方法。从概率结构、时域、频域和正交分解诸方面来介绍。

(2) 随机信号通过线性及非线性系统时的输入、输出关系。所涉及的系统包括：一般线性系统、窄带线性系统和某些非线性系统。

(3) 随机信号特征的估计。包括数字特征、相关函数和功率谱，也包括三阶相关和双谱。

(4) 其他进一步讨论的问题。包括非平稳过程和点过程。

随机信号分析的基础是随机过程理论，但着重于从工程技术应用上讲解，不强求数学的严谨性。与国内外目前已出版的一些教材相比较，本书有以下特点：

(1) 连续时间与离散时间并重。往往是从前者入手而在后者

展开讨论。这是为了结合应用计算机作数字处理的需要。

(2) 分析讨论时注意突出物理概念，避免数学推导掩盖了物理本质。有关数学证明在行文中都另行框出，以便读者阅读学习时能掌握讨论的主要线索。

(3) 举例和应用较多。其目的一方面是使读者更好地掌握分析方法;另一方面也使读者初步了解有关理论的实际应用。

(4) 涉及的内容比一般教材稍为宽广些。例如第一章的 K-L 分解与主分量法,第二章关于过渡过程的讨论,第三章关于窄带信号的采样定理,第四章关于三阶相关和双谱,第五章关于 Volterra 级数和维纳泛函展开，第六章关于 Wigner-Ville 分布等都是一般教材较少介绍的。这些内容有些反映科学技术的新进展，有些是我们的科研工作的部分总结。

本书在编写过程中得到上海交大徐俊荣教授、北京航空航天大学黄俊钦教授、浙江大学唐渝副教授和我校宗孔德教授、高上凯副教授等人的热情支持并进行了有益的讨论。宗孔德教授为本书初稿作了细致的审阅,指出了原稿许多错误和不妥之处。在此谨向上述所有同志致以诚挚的谢意。

由于作者水平有限、书中不可避免还有不少缺点和错误。恳请读者批评、指正。

杨福生

一九八八年十月于清华大学

# 符 号 索 引

| 符 号 | 含 义 |
|---|---|
| $\hat{a}$ | $a$ 的估计值 |
| $\tilde{A}(t)$ | 复数包络 |
| $B_x(\omega_1、\omega_2)$ | $x(t)$的双谱函数 |
| $C_x(\tau), C_x(m)$ | $x(t)$、$x(n)$的自协方差函数 |
| $C_{xy}(\tau), C_{xy}(m)$ | $x(t)$、$y(t)$间，$x(n)$、$y(n)$间的互协方差函数 |
| $D_x$ | $x$ 的均方 |
| $D(A、\omega)$ | 非线性系统的描述函数 |
| $h_1(\tau)、h_2(\tau_1、\tau_2)$ | 非线性系统的一、二阶维纳核 |
| $H_n(x)$ | $n$ 次埃米尔特多项式 |
| $k_1(\tau)、k_2(\tau_1、\tau_2)$ | 非线性系统的一、二阶 Volterra 核 |
| $m_x$ | $x$ 的均值 |
| $m(\tau)$ | 期望密度(条件强度函数) |
| $n_c(t), n_s(t)$ | 窄带信号的正交分量 |
| $p(x;t)$ | 随机变量 $x$ 在时刻 $t$ 的概率密度函数 |
| $PW_x(t,\omega)$ | $x(t)$的伪 Wigner-Ville 分布 |
| $R_x(\tau), R_x(m)$ | $x(t)$,$x(n)$的自相关函数 |
| $R_x(\tau_1,\tau_2)$ | $x(t)$的三阶自相关函数 |

| | |
|---|---|
| $R_{xy}(\tau), R_{xy}(m)$ | $x(t)$、$y(t)$间，$x(n)$、$y(n)$间的互相关函数 |
| $S_x(\omega), S_x(e^{j\omega})$ | $x(t)$、$x(n)$的功率谱 |
| $\hat{S}_x^N(\omega)$ | 用$N$点数据对 $S_x(\omega)$ 作出的估计 |
| $\hat{S}_x^{AV}(\omega)$ | 通过平均取得的改进的功率谱估计 |
| $\hat{S}_x^{SM}(\omega)$ | 通过平滑取得的改进的功率谱估计 |
| $\hat{S}_x^W(\omega)$ | 通过韦尔奇(Welch) 法作出的功率谱估计 |
| $S_{xy}(\omega), S_{xy}(e^{j\omega})$ | $x(t)$、$y(t)$间，$x(n)$、$y(n)$间的互谱 |
| $\mathrm{sgn}(\cdot)$ | 符号函数 |
| $x_a(t)$ | $x(t)$的解析信号 |
| $\hat{x}(t)$ | $x(t)$的希尔伯特变换 |
| $W_x(t、\omega)$ | $x(t)$的 Wigner-Ville 分布 |
| $\gamma_{xy}(\omega)$ | $x(t)$、$y(t)$间的相干函数 |
| $\delta(x), \delta(n)$ | $\delta$ 函数 |
| $\rho_x(\tau), \rho_x(m)$ | $x(t)$，$x(n)$的自相关系数 |
| $\lambda(\tau)$ | 期望发生率 |
| $\sigma_x^2, \mathrm{Var}(x)$ | $x$ 的方差 |
| $\underset{t}{*}$ | 在时域上作卷积 |
| $\underset{\omega}{*}$ | 在频域上作卷积 |
| $F_x(j\omega), F_x(\omega)$ | 时域函数 $x(t)$ 的傅氏变换 |
| $H(j\omega), H(\omega)$ | 冲激响应 $h(t)$ 的傅氏变换 |

# 目　录

# 第一章 随机信号特征的描述

## 1.1 概　　述

信号，一般是指携带着一定信息的时间函数①。信号大体可以分成两类：(1)确定性信号：信号随时间的变化是有确定性规律的。只要条件相同，不论何人、何时、何地观察总呈现同一规律。因此只要掌握了这个规律就可准确地预测它的未来。(2)随机信号：信号的变化不遵循任何确定规律，即随机变量随时间变化的过程。因此它的未来是不能准确预测的。严格地说，实际信号总是具有某些随机因素的。例如，即便是实验室用的音频振荡器也总有一些随机起伏，并伴随着一定噪声。只不过它的信噪比很大而已。反过来说，我们目前认为是随机性的事物，往往只是由于在现阶段还没有掌握影响该事物的诸因素所遵循的规律。从自然辩证法观点上看，那些断定为必然的东西，是由种种纯粹偶然所构成的。而被认为是偶然的东西，则是一种必然性隐藏在里面的形式，这个论断高度概括了两者间的辩证关系。作为测量对象的信号必含有某些随机因素，否则测量便失去了意义。

因此，尽管是随机信号，也仍含有一些规律性的因素。这种规律性是从大量样本经统计后呈现出来的。随机信号的一般概念已在"数字信号处理"课程中作了介绍，本课程不再重复。本章主要

---

① 某些信息论专著还将信息(information)与消息(message)加以区别。这里不作严格讨论。

任务是在简短地复习这些概念的基础上作一些进一步的讨论。讨论中凡是已在先修课程中详细介绍并证明了的关系式和特性就不再重复证明。最后一节"随机信号的正交分解"是新引入的概念。

## 1.2 随机信号的概率结构

随机信号是随机变量的时间过程，因此描述它的最基本的工具，和随机变量一样是它的概率结构（对连续型随机变量是概率密度函数，对离散型随机变量是概率），只是要把"时间"这一因素考虑在内。例如，图1.1是连续型随机信号的一组实现。用来描述它的概率密度函数包括：

一阶　表示某一时刻 $t_i$ 的随机变量 $x_i$ 取值的分布规律 $p(x_i; t_i)$。

二阶　表示两个不同时刻 $t_i$、$t_j$ 的随机变量 $x_i$、$x_j$ 取值的联

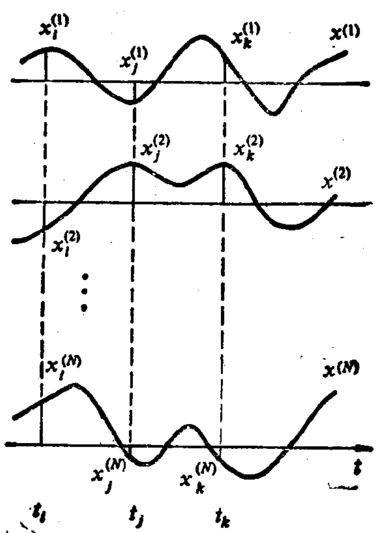


图 1.1

合分布规律 $p(x_i, x_j; t_i, t_j)$。

三阶　表示三个不同时刻 $t_i$、$t_j$、$t_k$ 的随机变量 $x_i$、$x_j$、$x_k$ 取值的联合分布规律 $p(x_i, x_j, x_k; t_i, t_j, t_k)$。

… …

推而广之，要作完整的表征，概率结构要推广到很高的阶次。虽然理论分析可以证明在一定条件下 $x(t)$ 的概率结构可以用一组离散时刻采样的所有联合概率密度函数来完整表征，但这样作显然十分烦琐且不现实。实际工作中常常只限于考虑一、二阶的概率密度函数 $p(x_i; t_i)$和 $p(x_i, x_j; t_i, t_j)$。如果一阶概率密度函数与具体时刻无关，则称此随机信号为一阶平稳的，此时 $p(x_i; t_i)$ 可简记作 $p(x)$。如果二阶概率密度函数只与 $t_j, t_i$ 的时间差 $\tau = t_j - t_i$有关，与 $t_i$、$t_j$ 的具体值无关，便称此随机信号为二阶平稳。此时 $p(x_i, x_j; t_i, t_j)$可简记作 $p(x_i, x_j; \tau)$。只有一、二阶平稳的随机过程称为宽平稳的过程(另一个概念是"严平稳"，它要求所有的高阶概率密度函数都只是时间差的函数。即：所有统计特征都和时间轴起点的选择无关)。

概率和概率密度函数是以下讨论中将要经常引用的名词。它们的基本概念已在先修课程中学习过。以下结合本课程的需要作些补充。

### 1.2.1　连续型和离散型随机变量概率结构的统一表示

随机变量 $x$ 的分布规律可以用分布函数 $F(x)$来表示。它的定义是

$$F(x_1) = P(x \leqslant x_1)$$

它表示随机变量取值小于或等于 $x_1$ 的概率。$F(x)$ 的主要性质是：

(1) 取值范围　$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，对所有$x$；

(2) 极限值　$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$，　$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$；

(3) 非降且右连续 $F(x+\Delta x) \geqslant F(x)$ 当 $\Delta x \geqslant 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} F(x+\Delta x) = F(x)。$$

根据 Lebesque 分解定理，任意分布函数 $F(x)$ 可以分解成两部分，即

$$F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x)$$

其中 $a_1 \geqslant 0, a_2 \geqslant 0$ 且 $a_1 + a_2 = 1$；

$F_1(x)$ 是绝对连续的（处处连续且几乎处处可微）；

$F_2(x)$ 是具有有限跳变的阶跃函数。

（一） 当 $a_1 = 1$，$a_2 = 0$ 时

此时 $F(x)$ 之一例示于图 1.2($a$)。这时随机变量是连续取值的。由于 $F(x)$ 是非降函数，因此必可表为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$$

或

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

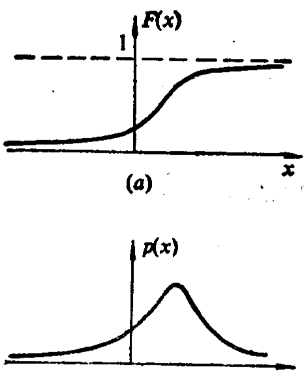


图 1.2

$p(x)$ 称为概率密度函数［见图 1.2($b$)］。它具有以下特性：

(1) 非负性。$p(x) \geqslant 0$，对所有 $x$；

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$；

(3) 与概率的联系。$a < x \leqslant b$ 的概率是

$$P(a < x \leqslant b) = \int_a^b p(x)dx。$$

（二） 当 $a_1 = 0, a_2 = 1$ 时

此时 $F(x)$ 之一例如图 1.3($a$) 所示。此时随机变量 $x$ 只有若干个离散取值（图上为 $x_1, x_2$）。此时可用概率来描述其分布规律，即

$$P(x=x_i)=P_i \qquad i=1,2,\cdots,N$$

且
$$\sum_{i=1}^{N} P_i=1$$

如果要统一用概率密度函数来描述，则要引用 Dirac $\delta$ 函数①，如图1.3($b$)所示，有

$$p(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\sum_{i=1}^{N}P_i\delta(x-x_i)$$

总之，连续型和离散型随机变量的概率结构可以统一用概率密度函数来描述，只是对后者，要引入 $\delta$ 函数。

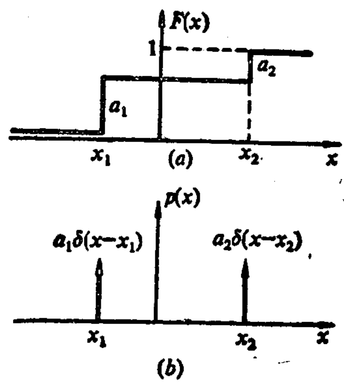


图 1.3

### 1.2.2 概率密度函数的变换

在信号处理过程中常要把信号作一些变换(图1.4)。此时往往需要由输入 $x$ 的概率密度函数求输出 $y$ 的概率密度函数。因此有必要讨论概率密度函数的变换。

(一) 单变量情况[图 1.4($a$)]

设 $y=g(x)$。由 $p(x)$求 $p(y)$的公式是

$$p(y)=p[x=g^{-1}(y)]\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| \tag{1-1}$$

---

① 在今后讨论中将会遇到两种 $\delta$ 函数：

(1) Dirac $\delta$ 函数 $\delta(x)$。其特点是：它是 $x$ 的连续函数，在 $x=0$ 时，$\delta(x)=\infty$，但$\int_{0^-}^{0^+}\delta(x)dx=1$；在其余各处$\delta(x)$均为零。

(2) Kronecker $\delta$ 函数 $\delta(x)$。其特点是：它是 $x$ 的离散函数。在 $x=0$ 处，$\delta(x)=1$；在 $x$ 的其他离散点处，$\delta(x)=0$。

讨论连续时间系统时常用前者，讨论离散时间系统时常用后者。