Numerical Manifold Method (NMM) and Discontinuous Deformation Analysis (DDA)

数值流形方法与非连续变形分析

石根华 著

裴觉民 译

NMM

and

DDA

清华大学出版社

数值流形方法与非连续变形分析

清华大学出版社

数值流形方法
与非连续变形分析

［美］ 石根华 著

裴觉民 译

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书系统介绍当前国际上发展的一种最新数值分析方法——数值流形方法与非连续变形分析。非连续变形分析(DDA)是平行于有限元的一种方法，它与有限元不同之处是可计算不连续面的错位、滑动、开裂和旋转等大位移的静力和动力问题。在 DDA 基础上新发展的数值流形方法(NMM)是应用现代数学——流形的覆盖技术，将连续体的有限元方法、非连续变形分析方法和解析方法统一起来的更高层次的计算新方法。这一方法可广泛用于固、液、气三态的连续和不连续问题，是当前最有发展前景的新一代数值方法。本书理论先进，叙述系统，公式推导齐全，便于编程应用，可作为土木水利、铁道交通、石油采矿、军事工程等部门有关专业，以及数学力学和计算机应用专业的工程师、研究生、软件开发人员的教材和应用参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数值流形方法与非连续变形分析/(美)石根华著；裴觉民译. —北京：清华大学出版社，1997

ISBN 7-302-02573-8

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①石… ②裴… Ⅲ. 数值计算-计算方法 Ⅳ. 0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 13210 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
印刷者：北京市人民文学印刷厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：14　字数：327 千字
版　次：1997 年 8 月第 1 版　1997 年 8 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-02573-8/O・185
印　数：0001～2000
定　价：28.00 元

致　谢

本译书主要内容译自第一届非连续变形分析(DDA)国际讨论会(1996)文集——《非连续变形分析和非连续介质模拟》一书。该书由 M. Reza Salami 博士和 Don Banks 博士主编，由 TSI Press 出版。版权属 TSI Press。经 TSI Press 和 TSI Enterprises, Inc. 授权，由清华大学出版社选译其中石根华博士的两篇著作：《流形方法》和《流形方法、有限元方法、非连续变形分析和解析分析的单纯形积分》，连同石根华博士在会议短训班上发表的讲稿《非连续变形分析》一并出版。

在本译书出版之际，对 TSI Press 和 TSI Enterprises, Inc. 对本书的出版所给予的支持和授权特表感谢。

ACKNOWLEDGEMENT

The main contents of this translation are translated from The Proceedings Of The First International Forum On Discontinuous Deformation Analysis (DDA)—the book titled "Discontinuous Deformation Analysis and Simulations of Discontinuous Media." This book is edited by Dr. M. Reza Salami and Dr. Don Banks, and is published by TSI Press. The copyright is owned by TSI Press. According to the authorization of TSI Press and TSI Enterprises, Inc., Tsinghua University Press translated two works of this book, "Manifold Method" and "Simplex Integrations for Manifold Method, FEM, DDA and Analytical Analysis" written by Dr. Gen-Hua Shi, along with the Technical Note of "Discontinuous Deformation Analysis" lectured by Shi on DDA short course of the forum to be published.

At the time of the translation publishing, we would like to acknowledge TSI Press and TSI Enterprises, Inc. for their support and authorization to the publication of this translation.

译 者 序

本书包括三部分：一、数值流形方法(NMM，Numerical Manifold Method)；二、块体系统的非连续变形分析(DDA，Discontinuous Deformation Analysis)；三、流形方法、有限元方法、非连续变形分析和解析分析(Analytical Analysis)的单纯形积分(Simplex Integration)。这三部分内容是相互联系的，是一个整体，但又可相互独立，自成体系。读者可根据需要，系统或部分地阅读和学习。数值流形方法是一种统一的数值方法，它把有限元和 DDA 等都包括在内，但有限元已是一种众所周知的方法，所以没有必要重复，本书中只把 DDA 包括在内，便于读者了解。

数值流形方法是利用现代数学——“流形”的有限覆盖技术建立起来的一种最新数值方法。有限覆盖是由物理覆盖和数学覆盖所组成，它可以处理连续问题和非连续问题。有限元在流形方法中只有一个单一的物理覆盖，它覆盖了全部数学覆盖；DDA 在流形方法中，则有许多物理覆盖，它们各自覆盖一部分数学覆盖。这两种方法在数值流形方法中只是两个特殊例子。在数值流形方法中，只要用不同的覆盖组合，就可以解决比有限元和 DDA 更具普遍意义的复杂问题。为使读者在阅读本书之前，对数值流形有一基本概念，特请中科院数学所有限元专家梁国平教授为本序写一“浅释”附于序后，以使读者对此有基本了解。

本书的第一部分共分九章。第一、二、三章讲述的是流形方法有限覆盖、单元矩阵和接触进入理论的一般概念，第四、五、六章讲述的则是具体单元的有限覆盖、单元矩阵和接触进入理论的条件和方法。第七章是流形方法的单纯形积分，译者将本章内容并入到第三部分中去讲。第八章讲方程解法，这里只讲迭代法，直解法放到第二部分中讲。第九章是算例。第一部分的重点是有限覆盖，这是一个新的概念。难点是接触的进入理论，这是不连续分析的基础。

本书的第二部分共分六章。这部分是 DDA 方法。不连续问题可用 DDA 方法来解决，也可用流形方法来解决。本部分第一章是块体位移和变形。与离散元不同，这里块体不是刚体而是变形体，方程用隐式的矩阵解法，不同于离散元的显式解法，与有限元方法比较接近。第二章是单一块体的荷载。第三章块体系统运动学是讨论接触问题解法的。第四章讨论的是寻找块体迹线的拓扑方法，这一方法也可在流形方法中用来生成不连续物理覆盖的。第五章讨论直解法，这是一种新的非零元素稀疏储存的图论方法。第六章是 DDA 的单纯形积分，译者将本章内容并入第三部分。

本书的第三部分专门讨论了可用于数值流形、有限元、DDA 和解析法的单纯形积分，并讨论了二维和三维问题，以及坐标转换问题。

本书的第一、三部分选自《Discontinuous Deformation Analysis (DDA) and Simulations of Discontinuous Media》，第二部分是根据石根华在 1996 年第一届 DDA 及非连续介质模拟国际讨论会的短训班上正式发表的报告翻译的。书中的全部公式，经原作者重新

校正，一些关键译名及书名也经原作者认同。在当前的发展阶段，有关数值流形方法和DDA的一些更新的成果，如三维方法等，有待实际考核，本次未予列入。我们准备在本书第二版时加以补充。

本书的出版，除原作者石根华博士和原作者所在单位美国陆军工程师团水道试验站(USACEWES)给以很大帮助外，原书主编美国 M. Reza Salami 教授(北卡罗立纳大学)和 Don Banks 博士(USACE)也给以关注。原书出版者美国 TSI Press 出版社在版权上的无偿授权也给我们很大支持。在此深表感谢！

由于时间匆促，并因水平所限，如有误译，均由译者负责。

裴觉民于清华大学
1997 年 4 月

“数值流形方法”浅释

有限覆盖技术是在流形分析中(包括拓扑流形和微分流形)经常采用的一种方法,但在数值计算中很少有人采用。石根华率先采用这一方法,统一解决连续与非连续变形的力学问题,这是一个首创。他提出的“数值流形”方法就是基于这种有限覆盖技术的数值方法。这种技术的基本思想就是在求解区域上构造一组函数,称为覆盖函数,这种覆盖函数要具有两个基本性质:

(1) 局部非零性,即只在一个局部区域范围内不为 0;

(2) 这组覆盖函数之和在求解区域内恒为 1。

由于这组函数具有性质(2),有时亦称为单位分解函数。

在数学分析和微分流形中采用单位分解即覆盖函数往往是比较光滑的。“数值流形”方法则采用光滑性比较差的单位分解函数。对于连续变形区域部分采用分片可微分函数,对于非连续变形区域部分,即块体之间的接触面处,则采用非连续的覆盖函数。因此通过采用连续和非连续覆盖函数的办法可以把连续和非连续的力学问题的计算统一到“数值流形”方法中去。

覆盖函数的构造是这一方法的一个关键问题,目前常采用的是 Lagrange 型分片插值函数,这也是有限元方法经常采用的一种插值函数。

这一方法有可能为偏微分方程的求解创造出更高的效率与更好的算法。例如经典的解析法即级数展开法,有时会有很高的收敛速度和编程简单等优点,尤其对处理无穷区域问题和奇点问题,常常优于有限元方法,但由于它需要满足求解域上的全部条件,因此往往只能用于规划区域问题;又由于这些级数展开式对其收敛域往往有一定限制,因此无法在整个求解域上采用。但是如果我们只在局部区域上,例如在无穷远处,在奇点邻域采用级数展开式即解析法,则上述缺点自然克服,因此往往会获得很好的效果。换句话说,如果我们在求解区域的不同地方采用不同级数展开式则可充分发挥解析法的优点,又可克服经典解析法的上述缺陷。再进一步说,我们还可以考虑在求解域不同的地方采用不同的方法,例如有的地方采用解析法,有的地方采用有限元方法,等等。可以想象得到,这样的算法其效率将会是很高的。很早就有人考虑这样的算法,然而其最大的困难在于不同的区域采用不同的级数展开式或有限元方法时,它们往往是非常不协调的,因此如何处理这些非协调的问题是一个关键问题,也是一个十分困难的问题。虽然有人讨论过这些非协调的处理办法,并取得一定的成功,但由于这些处理办法都比较复杂,给软件的实现带来相当的困难。但采用覆盖函数方法,这种非协调性自然消失,软件实现时与通常的协调方法没有多大区别,一切困难迎刃而解。也就是说采用“数值流形”方法很容易就解决了人们多年来研究的至今尚未有好的解决办法的局部区域解析法(即在求解区域的不同地方采用不同的级数展开式)以及有限元与解析法相结合(即在 DDA 非连续覆盖部分的许多局部区域中,有的地方采用有限元,有的地方采用解析法)的方法。

总之，“数值流形”方法是一种新的数值方法，它具有的某些优点是现代的有限元方法和经典的解析法所没有的，它统一解决有限元、DDA 和解析法的计算问题，是具有广泛的应用前景的最新的数值方法。

中科院数学所
梁国平
1997 年 4 月

目　录

第一部分　数值流形方法

第二部分 块体系统的非连续变形分析

第三部分 流形方法、有限元方法、非连续变形分析和解析分析的单纯形积分

第 一 部 分

数 值 流 形 方 法

提　要

对总体分析来说，著名的数学流形或许是现代数学的一个最重要的课题。以数学流形为基础，新发展的数值流形方法是一种有普遍意义的数值方法(本书以下所说的流形方法均指“数值流形方法”——译者注)。这种方法是用以计算结构或材料的位移和变形的。数值流形方法的网格是许多有限覆盖。按照材料的区域，有限覆盖相互重叠并涵盖全部材料体。在各覆盖上，流形方法定义一个独立的覆盖位移函数。各个覆盖上的覆盖位移函数连接在一起，在整个材料体上形成一个总体的位移函数。

总体的位移函数是在几个覆盖的共同部分上的局部独立覆盖函数的加权平均。用有限覆盖系统，连续的、裂缝的或块状的材料可以用一个数学上协调的方法进行计算。对流形计算来说，数学覆盖和物理网格(即物理覆盖——译者注)是独立的，因此，数学覆盖是不定界和不变化的。数学覆盖可以移动，可以开裂并且可随意被移开或加上。如移动覆盖，大变形和边界位移可分步算得。裂缝、块体边界可把一个覆盖划分成两个或更多的独立覆盖，连同它们位移函数一起，用一般的不连续材料就可模拟。

连续体的有限元方法(FEM)和块体系统的非连续变形分析方法(DDA)只是这一数值流形方法的特例。在数值流形方法发展的现阶段，藉用有限覆盖方法、广义的有限元方法可以计算块体和裂缝的有很大柔性的和明显可见的变形和位移。

第一章　流形方法的一般有限覆盖

1.1.1　由数学网格和物理网格生成的有限覆盖

在有限覆盖系统的基础上，新发展的“数值流形方法”有满足更多工程要求的潜力。这里所说的“流形”来源于拓扑流形和微分流形，它是数学的微分几何、代数拓扑、微分拓扑和现代代数的主要课题。这里的“数值流形”和传统的微分流形的区别在以下几点：微分流形的总体函数是高度可微分的，且完全可被定义而与覆盖无关；而这里的数值流形的总体函数是在覆盖基础上定义的，且只分段微分，在接触交面上几乎都是不连续的。

在物理上，材料对象通常有不同的形状。当材料体有断裂、成块状或分不同区域时，形状和边界变得更为复杂。在大变形和边界移动情况下，会产生更多困难，因为常规分析的近似方法只在代表整个材料一小部分的局部连续域内是可行和有用的。

所谓“流形”是把许多个别的重叠的区域连接在一起，去覆盖全部材料体。因此，总体形状可用局部覆盖所定义的函数来计算。新的方法有分开的且独立的数学覆盖和物理网格：数学覆盖只定义近似解的精度；而物理网格，作为实际的材料边界，定义其积分区域。

数学覆盖由用户选择，它由占整个材料体的许多有限重叠覆盖所组成。常规的网格和域，诸如规则的格子、有限元的网格或级数的收敛域，能转换为有限数学覆盖。在有限覆盖基础上，流形方法足以很好地将发展得很好的解析方法、广泛应用的有限元方法和适用于块体的 DDA 方法，包含并融合于统一形式中。

物理网格包括材料体的边界、裂缝、块体和不同材料区域的交接面。不变化的水面也是物理网格的一部分。物理网格代表材料条件，它不能人为地选择。

物理覆盖系统是由数学覆盖和物理网格两者组成。如果裂缝或块体边界把一个数学覆盖分成两个或更多的完全不连续的区域，这些区域定义为物理覆盖。因此物理覆盖是不连续缝对数学覆盖的再剖分。流形方法更适合于计算连续的和有裂缝的或块状的两种材料的大变形和边界移动。

图 1.1.1 和图 1.1.2 中，由两个圆和一个矩形（用细线表示）划定三个覆盖：

$$V_1, V_2, V_3$$

形成数学网格，粗线表示材料边界和内部弧形裂缝。图 1.1.1 中，V_1被物理网格分成两个物理覆盖 1_1、1_2，V_2 有两个物理覆盖 2_1、2_2，V_3有两个物理覆盖 3_1、3_2。

图 1.1.2 表示一个更为复杂的网格。数学覆盖 V_2包含三条曲线，但总共只形成两个不连接的物理覆盖 2_1，2_2。上边的曲线（在覆盖 2_1 内）不能切穿矩形 V_2 以形成更多的物理覆盖，因此覆盖 2_1 是一单个的物理覆盖。同样，因数学覆盖 V_3 正好交在上边曲线的顶端，故形成物理覆盖 3_1，3_2。在图 1.1.1 和 1.1.2 两个图中，两个或更多的物理覆盖的共同部

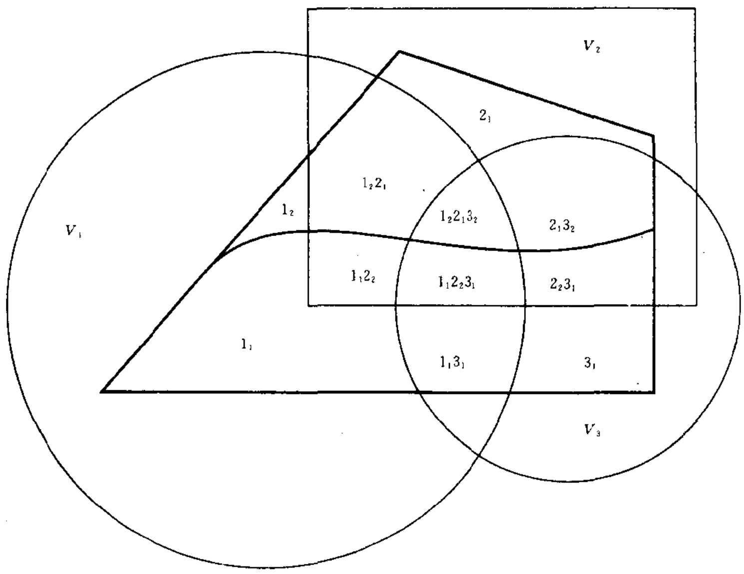

图 1.1.1　有一条裂缝的一般覆盖

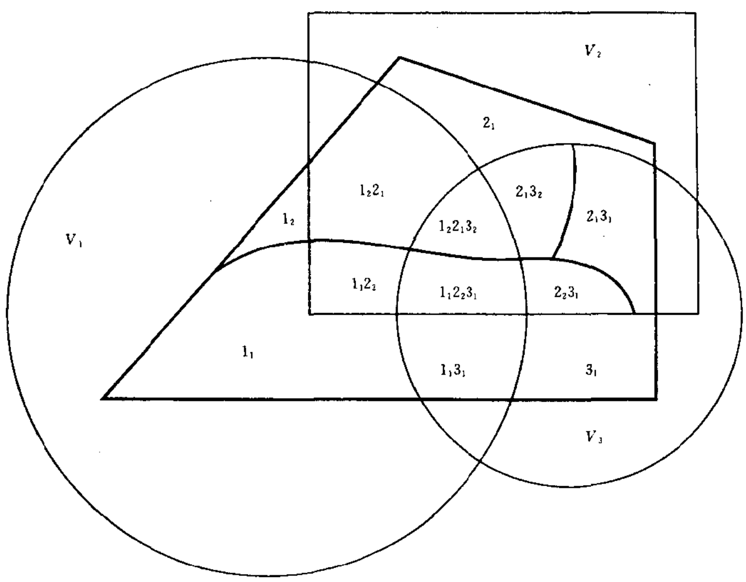

图 1.1.2　有两条裂缝的一般覆盖

分定义为“单元”，并用它的覆盖号作表记。

图 1.1.3 表示一个简单且常用的链状覆盖系统。该覆盖系统对长而窄的材料形状特别方便。

图 1.1.4 表示一个 DDA 块体系统，这里每个块体是一个数学覆盖和物理覆盖。在 DDA 情况下，任何两个覆盖之间没有重叠。

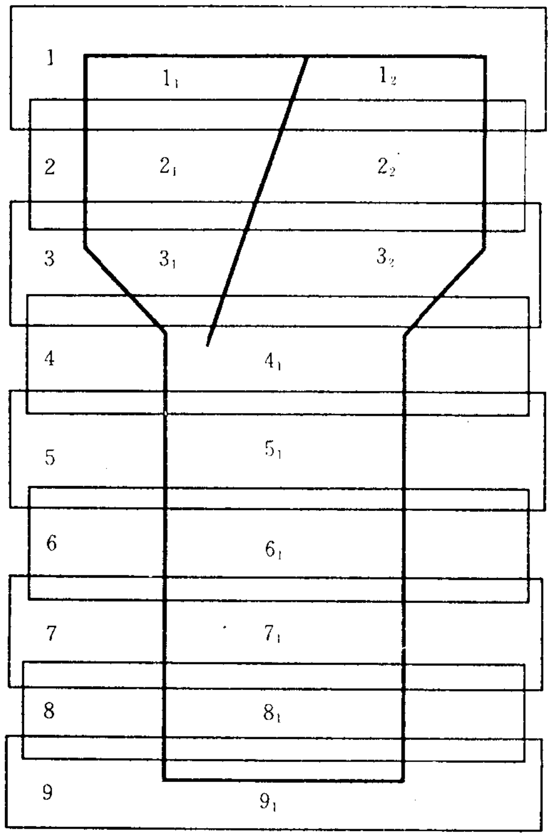

图 1.1.3 链状覆盖系统

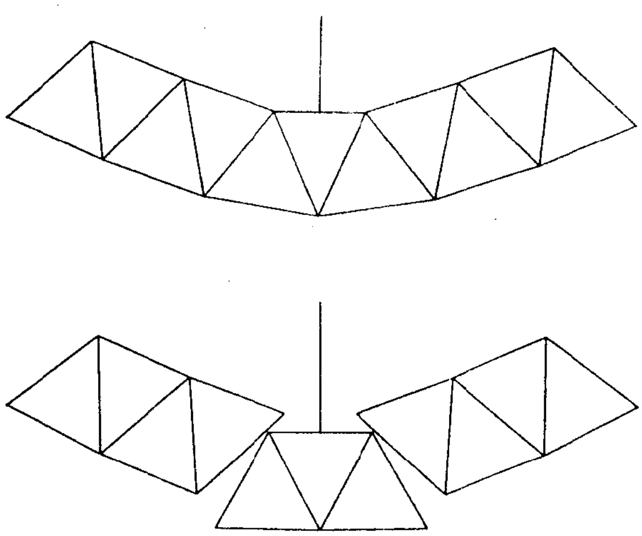

图 1.1.4 DDA 块体形成的一般覆盖