

數理統計問題詳解

曉園出版社
世界圖書出版公司

内 容 简 介

本书是 R. V. 霍格所著的《Introduction to Mathematical Statistics (4th-ed)》一书的习题详解。本书思路清晰, 非常适合于自学。

数 理 统 计 问 题 详 解

R. V. 霍格 原著

骆效宗 译著

晓 园 出 版 社 出版

世界图书出版公司北京分公司重印

(北京朝阳门内大街 137 号)

北 京 中 西 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1992 年 4 月 重印 开本 850×1168 1/32
1992 年 4 月第一次印刷 印张 15.25

印数: 0,001—2,300

ISBN: 7-5062-1157·2/O·16

定价: 10.30 元

世界图书出版公司通过中华版权代理公司

购得重印权 限国内发行

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

數理統計問題詳解

(目 錄)

第一章	隨機變數之分配	i
第二章	條件機率與隨機獨立	63
第三章	一些特殊的分配	93
第四章	隨機變數之函數的分佈	142
第五章	極限分佈	224
第六章	估計	247
第七章	統計假說	296
第八章	其他的統計檢定	334
第九章	無母數方法	374
第十章	充分統計量	408
第十一章	有關統計推論的更深一層論題	444
第十二章	更進一步的常態分配理論	473

第一章 隨機變數之分配

1.1 敘述下列各題隨機實驗的樣本空間 $\mathcal{C}$ ，並由經驗（或直覺）上決定每一 C 事件的 P 值。

- (a) 投一正常錢幣， C 事件表出現反面。
- (b) 擲一骰子， C 事件表出現5點或6點。
- (c) 從一組紙牌中抽一張，若抽出的是黑桃，則 C 事件發生。
- (d) 在區間 $(0, 1)$ 中取一數，若此數小於 $1/3$ 則 C 事件發生。
- (e) 正方形之相對頂點為 $(1, 1)$ 、 $(-1, -1)$ 在正方形取一點。 C 事件為此點之坐標和小於 $1/2$ 。

解：

(a) $C = \{H, T\}$,	$P = \frac{1}{2}$
(b) $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,	$P = \frac{1}{3}$
(c) $C = \{S, H, D, C\}$,	$P = \frac{1}{4}$
(d) $C = \{x; 0 \leq x \leq 1\}$,	$P = \frac{1}{3}$
(e) $C = \{(x, y); -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$,	$P = \frac{23}{32}$

1.2 由一固定圓的內部以隨意的方式取出點。問取出的點落在另一圓內的機率 P 應定為多少？而此圓半徑為第一個圓半徑之半且完全落於第一個圓內。

解：此二圓面積比為 $\pi \cdot (\frac{r}{2})^2 : \pi \cdot r^2 = 1 : 4$ 。第一個圓為樣本空間，依題意點的取出係隨意的，故機率 P 可定為 $\frac{1}{4}$ 。

1.3 一公正銅幣投擲兩次。試指定第一次投擲出現正面，第二次投

擲出現反面的事件的機率 P_1 ，試定在二次投擲中出現一次正面，一次反面的機率 P_2 。

解：投擲出現正面記為“+”，出現反面記為“-”。

則投擲二次出現的狀況可為 $(+, -)$ ， $(+, +)$ ， $(-, -)$ ， $(-, +)$ 。

$$\text{得知可定 } P_1 = \frac{1}{4}, \quad P_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}。$$

1.4 求下列兩集合 A_1 及 A_2 的交集 $A_1 \cap A_2$ 與聯集 $A_1 \cup A_2$ 。

(a) $A_1 = \{x; x=0, 1, 2\}$, $A_2 = \{x; x=2, 3, 4\}$

(b) $A_1 = \{x; 0 < x < 2\}$, $A_2 = \{x; 1 \leq x < 3\}$

(c) $A_1 = \{(x, y); 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$, $A_2 = \{(x, y); 1 < x < 3, 1 < y < 3\}$

解：(a) $A_1 \cap A_2 = \{x; x=2\}$

$$A_1 \cup A_2 = \{x; 0, 1, 2, 3, 4\}$$

(b) $A_1 \cup A_2 = \{x; 0 < x < 3\}$

$$A_1 \cap A_2 = \{x; 1 \leq x < 2\}$$

(c) $A_1 \cup A_2 = \{(x, y); 0 < x < 3, 0 < y < 3\}$

$$A_1 \cap A_2 = \{(x, y); 1 < x < 2, 1 < y < 2\}$$

1.5 對全集 $\mathcal{A}$ 而論，求 A 集合的補集 A^*

(a) $\mathcal{A} = \{x; 0 < x < 1\}$, $A = \{x; 5/8 \leq x < 1\}$

(b) $\mathcal{A} = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $A = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

(c) $\mathcal{A} = \{(x, y); |x| + |y| \leq 2\}$, $A = \{(x, y); x^2 + y^2 < 2\}$

解：(a) $A^* = \{x; 0 < x < \frac{5}{8}\}$

(b) $A^* = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

(c) $A^* = \{(x, y); |x| + |y| \leq 2, x^2 + y^2 \geq 2\}$

1.6 寫出 m, a, r, y 四字母的所有排列情形，並設 A_1 為 y 排末位的集合， A_2 為 m 排首位的集合，求 $A_1 \cup A_2$ 與 $A_1 \cap A_2$ 。

解： $A_1 = \{\text{mary, mray, amry, army, ramy, rmay}\}$

$A_2 = \{\text{mary, mray, mayr, myra, myar, mrya}\}$

$A_1 \cup A_2 = \{\text{mary, mray, amry, mayr, army, myra, ramy, myar, rmay, mrya}\}$

$A_1 \cap A_2 = \{\text{mary, mray}\}$

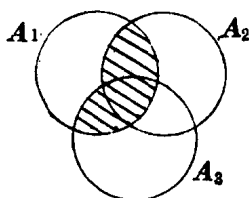
1.7 用 VENN 圖解比較下列集合。

(a) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$ 與 $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$

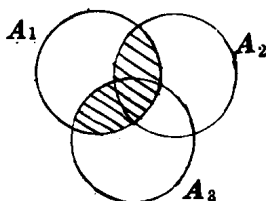
(b) $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$ 與 $(A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$

(c) $(A_1 \cup A_2)^*$ 與 $A_1^* \cap A_2^*$ (d) $(A_1 \cap A_2)^*$ 與 $A_1^* \cup A_2^*$

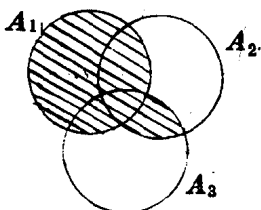
解：(a) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$



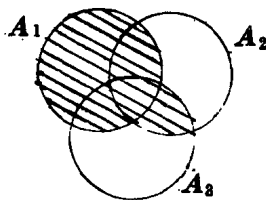
$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$



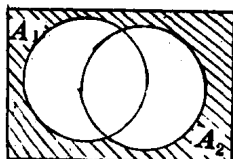
(b) $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$



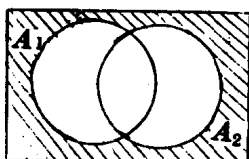
$(A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$



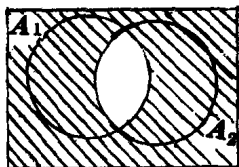
(c) $(A_1 \cup A_2)^*$



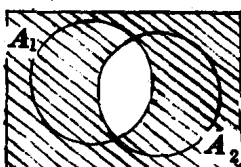
$A_1^* \cap A_2^*$



$$(d) \quad (A_1 \cap A_2)^*$$



$$A_1^* \cup A_2^*$$



- 1.8 若集合序列 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 滿足 $A_k \subset A_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, 則此序列稱為非遞減序列。試給一個此種集合序列的例子。

解：令 $A_n = \{x; x \leq n, x \in \mathbb{N}\}$ 此即為所求。

- 1.9 若集合序列 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 滿足 $A_k \supset A_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, 則此序列稱為非遞增序列。試給一個此種集合序列的例子。

解：令 $A_n = \{x; x \geq n, x \in \mathbb{N}\}$ 此即為所求。

- 1.10 設 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 為集合而 $A_k \subset A_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

並定 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ 為 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$, 求 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ 若

(a) $A_k = \{x; 1/k \leq x \leq 3 - 1/k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

(b) $A_k = \{(x, y); 1/k \leq x^2 + y^2 \leq 4 - 1/k\}$, $k = 1, 2, 3$

解：(a) $\{x; 0 < x < 3\}$

(b) $\{(x, y); 0 < x^2 + y^2 < 4\}$

- 1.11 設 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 為集合，而且 $A_k \supset A_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

定 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ 為 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$ 求 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ 若

(a) $A_k = \{x; 2 - 1/k < x \leq 2\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

(b) $A_k = \{x; 2 < x < 2 + 1/k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

(c) $A_k = \{(x, y); 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1/k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

解：(a) $\{x; x = 2\}$

(b) Null Set ϕ

$$(c) \{(x, y); x^2 + y^2 = 0\}$$

1.12 對每個一度空間集合 A ，設 $Q(A) = \sum_A f(x)$ ，其中 $f(x) = (\frac{2}{3})$

$(\frac{1}{3})^x$ ， $x=0, 1, 2, \dots$ 其他為 0，若 $A_1 = \{x; x=0, 1, 2, 3\}$ 與 $A_2 = \{x; x=0, 1, 2, \dots\}$ 求 $Q(A_1)$ 與 $Q(A_2)$ 之值。

$$\text{解： } Q(A_1) = \sum_{A_1} f(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{80}{81}$$

$$Q(A_2) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{3}) (\frac{1}{3})^k = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1$$

1.13 設對每個一度空間集合 A ，其積分為存在，設 $Q(A) = \int_A f(x) dx$ ，

$$\text{其中 } f(x) = \begin{matrix} 6x(1-x) & 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{其他} \end{matrix}$$

若 $A_1 = \{x; \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\}$ ， $A_2 = \{x; x = \frac{1}{2}\}$ 與 $A_3 = \{x; 0 < x < 10\}$ 求 $Q(A_1)$ ， $Q(A_2)$ 與 $Q(A_3)$

$$\text{解： } Q(A_1) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 6x(1-x) dx$$

$$= 6 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} x dx - x^2 dx = 6 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{11}{16}$$

$$Q(A_2) = d(6x - 6x^2) / x = \frac{1}{2} = 6 - 12x \mid x = \frac{1}{2} = 0$$

$$Q(A_3) = \int_0^1 6x(1-x) dx = 6 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1$$

1.14 A 為一度空間集合，設 $Q(A)$ 等於集合 A 中正整數的個數，若

$A_1 = \{x; x \text{ 為 } 3 \text{ 的倍數而小於或等於 } 50\}$ 與 $A_2 = \{x; x \text{ 為 } 7$

的倍數而小於或等於 50}，求 $Q(A_1)$, $Q(A_2)$, $Q(A_1 \cup A_2)$ 與 $Q(A_1 \cap A_2)$ 並證明 $Q(A_1 \cup A_2) = Q(A_1) + Q(A_2) - Q(A_1 \cap A_2)$

$$\text{解: } Q(A_1) = 16, \quad Q(A_2) = 7$$

$$Q(A_1 \cup A_2) = 21, \quad Q(A_1 \cap A_2) = 2$$

$$Q(A_1) + Q(A_2) - Q(A_1 \cap A_2) = 16 + 7 - 2 = 21$$

$$\text{故 } Q(A_1 \cup A_2) = Q(A_1) + Q(A_2) - Q(A_1 \cap A_2)$$

1.15 A 爲二度空間集合，設 $Q(A)$ 等於 A 中點 (x, y) ，其 x, y 均爲正整數的個數，若 $A_1 = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4\}$ 與 $A_2 = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9\}$ ，求 $Q(A_1)$ 與 $Q(A_2)$ 之值，注意 $A_1 \subset A_2$ 及 $Q(A_1) \leq Q(A_2)$ 。

$$\text{解: } Q(A_1) = 1$$

$$Q(A_2) = 4$$

1.16 設 $Q(A) = \int_A \int (x^2 + y^2) dx dy$ ，並其中 A 爲二度空間集合且其

積分存在。若 $A_1 = \{(x, y); -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ ， $A_2 = \{(x, y); -1 \leq x = y \leq 1\}$ 與 $A_3 = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ 求 $Q(A_1)$, $Q(A_2)$ 與 $Q(A_3)$ 之值。

$$\text{解: } Q(A_1) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{2}{3} dy + 2y^2 dy$$

$$= \frac{2}{3} [y]_{-1}^1 + 2 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}$$

$$Q(A_2) = 0$$

$$Q(A_3) = 2 \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi.$$

1.17 $\mathcal{A}$ 係落在對頂為 $(0, 0)$, $(1, 1)$ 的正方形的內部或邊界的點所成集合。令 $Q(A) = \int_A \int dy dx$

(a) 若 $A \subset \mathcal{A}$, 用 $A = \{(x, y); 0 < x < y < 1\}$, 計算 $Q(A)$ 。

(b) 若 $A \subset \mathcal{A}$ 而 $A = \{(x, y); 0 < x = y < 1\}$, 計算 $Q(A)$ 。

(c) 若 $A \subset \mathcal{A}$ 而 $A = \{(x, y); 0 < x/2 \leq y \leq 3x/2 < 1\}$, 計算 $Q(A)$ 。

解: (a) $A = \{(x, y); 0 < x < y < 1\}$

$$\begin{aligned} \text{則 } Q(A) &= \int_0^1 \int_0^y dx dy = \int_0^1 y dy \\ &= \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) $A = \{(x, y); 0 < x = y < 1\}$

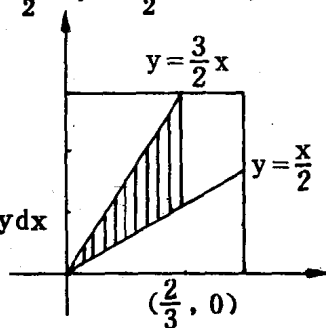
$$\begin{aligned} \text{則 } Q(A) &= \int_0^1 \int_0^y dx dy \\ &= \int_0^1 0 dy = 0 \end{aligned}$$

(c). $A = \{(x, y); 0 < \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{3x}{2} < 1\}$

A 集合的圖示如右

$$\left(\frac{3}{2}x < 1 \Rightarrow x < \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{則 } Q(A) &= \int_0^{\frac{2}{3}} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{3x}{2}} dy dx \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} x dx \end{aligned}$$



$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{9}$$

1.18 $\mathcal{A}$ 係落在正方體內部或邊界上的點所成集合。該正方體位於第一卦限，一頂點為 $(0, 0, 0)$ 及其對頂為 $(1, 1, 1)$

。令 $Q(A) = \iiint_A dx dy dz$ 。

(a) 若 $A \subset \mathcal{A}$ ，而 $A = \{(x, y, z); 0 < x < y < z < 1\}$ ，計算 $Q(A)$

(b) 令 A 為部分集合 $\{(x, y, z); 0 < x = y = z < 1\}$ ，計算 $Q(A)$

解：(a) $A = \{(x, y, z); 0 < x < y < z < 1\}$

$$Q(A) = \int_0^1 \int_0^z \int_0^y dx dy dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^z y dy dz$$

$$= \int_0^1 \frac{z^2}{2} dz$$

$$= \frac{z^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

(b) $A = \{(x, y, z); 0 < x = y = z < 1\}$

$$Q(A) = \int_0^1 \int_z^z \int_y^y dx dy dz$$

$$= \int_0^1 \int_z^z 0 dy dz = 0$$

1.19 令 A 表示集合 $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ，計

算 $Q(A) = \iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ 提示：用球座標來變換變數。

解：令 $z = r \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$,
 $0 \leq r \leq 1$,

$$y = r \sin \varphi \cos \theta$$

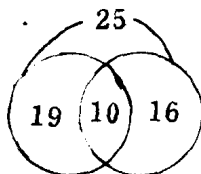
$$x = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \quad , \quad |J| = r^2 \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} Q_A &= \iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 r \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \right) \left(-\cos \varphi \Big|_0^\pi \right) \left(\theta \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times 2 \times 2\pi = \pi \end{aligned}$$

- 1.20 設某一個俱樂部，其中會員為統計學家、數學家，或二者兼有，今有一個 25 人組成的俱樂部其中有 19 位統計學家，16 位數學家，請問有多少位是數學家兼統計學家。

解： $16 + 19 - 25 = 10$ (位)



- 1.21 在一次苦戰足球賽後，有下列報告，在十一位與賽者中，八位傷及臀部，六位傷及手臂，五位傷及膝部，其中三位臂與臀均傷，兩位傷及臀與膝，一位傷及臂與膝，而無人各部分均受傷。用集合符號表示上面之報告。

解：A 表傷及臀部之人 所成之集合

B 表傷及手臂之人 所成之集合

C 表傷及膝部之人 所成之集合

則 $n(A) = 8$ $n(B) = 6$ $n(C) = 5$

$$\text{且 } n(A \cap B) = 3 \quad n(A \cap C) = 2$$

$$n(B \cap C) = 1 \quad n(A \cap B \cap C) = 0$$

$$\text{未受傷者爲 } N(\text{全體人數}) - n(A) - n(B) - n(C)$$

$$+ n(A \cap B) + n(B \cap C)$$

$$+ n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

$$= 11 - 8 - 6 - 5 + 3 + 2 + 1 = -2 \text{ (矛盾)}$$

所以此報告不正確

1.22 投一般骰子則可能結果爲正整數 1 至 6 中之一數，因此其樣本空間

$\mathcal{C}$ 中元素爲 1, 2, 3, 4, 5, 6, 設 $C_1 = \{c; c=1, 2, 3, 4\}$ $C_2 =$

$\{c; c=3, 4, 5, 6\}$ 若每一元素 C 的機率 $P = \frac{1}{6}$ ，求 $P(C_1)$

$P(C_2)$ 與 $P(C_1 \cap C_2)$, $P(C_1 \cup C_2)$ 之值。

$$\text{解: } P(C_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(C_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(C_1 \cap C_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(C_1 \cup C_2) = 1$$

1.23 從一副牌 52 張中抽一張爲一隨機實驗，設機率集合函數 P 每一

可能結果之機率爲 $\frac{1}{52}$ ，若 C_1 表 13 張紅心的集合， C_2 表 4 張 K

的集合。求 $P(C_1)$, $P(C_2)$, $P(C_1 \cap C_2)$ 與 $P(C_1 \cup C_2)$ 之值。

$$\text{解: } P(C_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad P(C_2) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(C_1 \cap C_2) = \frac{1}{52}, \quad P(C_1 \cup C_2) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

1.24 若重複投一錢幣直到出現正面爲止，則樣本空間 $\mathcal{C}$ 中元素 C 爲 H ,

$TH, TTH, TTTH$, 等等，其機率依次設爲 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

證明 $P(\mathcal{C}) = 1$ ，若 $C_1 = \{c; c \text{ 是 } H, TH, TTH \text{ 或 } TTTH\}$ 求

$P(C_1)$ 之值，若 $C_2 = \{c; c \text{ 是 } TTTH \text{ 或 } TTTTH\}$ 求 P

(C_2) , $P(C_1 \cap C_2)$ 與 $P(C_1 \cup C_2)$ 之值。

$$\text{解: } P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$P(C_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

$$P(C_2) = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{3}{64}$$

$$P(C_1 \cap C_2) = \frac{1}{32}$$

$$P(C_1 \cup C_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

1.25 若 $\mathcal{C} = C_1 \cup C_2$, 且 $P(C_1) = 0.8$, $P(C_2) = 0.5$, 求 $P(C_1 \cap C_2)$ 之值。

$$\text{解: 因 } P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2)$$

$$1 = 0.8 + 0.5 - x$$

$$\therefore x = 0.3$$

$$P(C_1 \cap C_2) = 0.3$$

1.26 樣本空間為 $\mathcal{C} = \{C; 0 < C < \infty\}$ 。 $C \subset \mathcal{C}$ 而 $C^* = \{C; 4 < C < \infty\}$ 且取 $P(C) = \int_C e^{-x} dx$ 。計算 $P(C)$, $P(C^*)$

, $P(C \cup C^*)$

$$\text{解: (1) } P(C) = \int_4^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_4^\infty = e^{-4}$$

$$(2) \text{由定理 1 知 } P(C) = 1 - P(C^*)$$

$$e^{-4} = 1 - P(C^*)$$

$$P(C^*) = 1 - e^{-4}$$

$$(3) \text{由定理 2 知 } P(C \cap C^*) = P(\emptyset) = 0$$

$$\text{由定理 5 知 } P(C \cup C^*) = P(C) + P(C^*)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(C \cap C^*) \\
 &= e^{-1} + (1 - e^{-1}) - 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

1.27 樣本空間為 $\mathcal{C} = \{C; -\infty < C < \infty\}$ ，若 $C \subset \mathcal{C}$ 且 $\int_{\mathcal{C}} e^{-|x|} dx$ 積分存在，試證此集合函數不為機率集合函數。我們該在此積分乘上何常數使其為機率集合函數。

$$\begin{aligned}
 \text{解：(i)} \quad \int_{\mathcal{C}} e^{-|x|} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\
 &= e^x \Big|_{-\infty}^0 - e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1 - (-1) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

若此集合函數為機率集合函數，則 $P(\mathcal{C}) = 1$ ，和上式矛盾，知其不為機率函數。

(ii) 於此積分乘上 $\frac{1}{2}$ 即為機率集合函數， $\frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} e^{-|x|} dx = P(C)$

(1) $e^{-|x|} > 0$ ，由積分性質知 $P(C) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} e^{-|x|} dx \geq 0$

(2) 若 $C_i \cap C_j = \emptyset$ ， $i \neq j$ 時，由積分性質知 $P(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + \dots$

(3) $P(\mathcal{C}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} e^{-|x|} dx = 1$

知如此定義的 $P(C)$ 為機率集合函數。

1.28 若 C_1, C_2 為 $\mathcal{C}$ 之子集，證明 $P(C_1 \cap C_2) \leq P(C_1) \leq P(C_1 \cup C_2) \leq P(C_1) + P(C_2)$

證： $C_1 \subset \mathcal{C}$, $C_2 \subset \mathcal{C}$

$$\text{因 } (C_1 \cap C_2) \subset C_1 \subset (C_1 \cup C_2)$$

$$\text{故 } P(C_1 \cap C_2) \leq P(C_1) \leq P(C_1 \cup C_2) \quad (1)$$

$$\text{又 } P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2)$$

$$\text{因 } P(C_1 \cap C_2) \geq 0$$

$$\text{故 } P(C_1) + P(C_2) \geq P(C_1 \cup C_2) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{由(1)(2)得 } P(C_1 \cap C_2) &\leq P(C_1) \leq P(C_1 \cup C_2) \\ &\leq P(C_1) + P(C_2) \end{aligned}$$

1.29 設 C_1, C_2, C_3 為 $\mathcal{C}$ 中三個互離子集，求 $P[(C_1 \cup C_2) \cap C_3]$ 與 $(C_1^* \cup C_2^*)$ 之值。

$$\text{解：因 } (C_1 \cup C_2) \cap C_3 = (C_1 \cap C_3) \cup (C_2 \cap C_3)$$

$$\text{由假設知 } P[(C_1 \cup C_2) \cap C_3]$$

$$= P[(C_1 \cap C_3) \cup (C_2 \cap C_3)]$$

$$= P(C_1 \cap C_3) + P(C_2 \cap C_3) = 0$$

$$\because C_1 \cap C_3 = \phi$$

$$C_2 \cap C_3 = \phi$$

$$\text{因 } C_1^* \cup C_2^* = (C_1 \cap C_2)^*$$

$$\text{故 } P(C_1^* \cup C_2^*) = P[(C_1 \cap C_2)^*]$$

$$= 1 - P(C_1 \cap C_2)$$

$$= 1 - P(\phi) = 1$$

1.30 設 C_1, C_2, C_3 為 $\mathcal{C}$ 之三子集，證明

$$P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) - P(C_1 \cap C_2) - P$$

$$(C_1 \cap C_3) - P(C_2 \cap C_3) + P(C_1 \cap C_2 \cap C_3)$$

並求 $\mathcal{C}$ 的四個或更多子集之聯集之機率為何？

[提示： $P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = P[C_1 \cup (C_2 \cup C_3)]$]，並利用定理 5.]

$$\text{解：} P[(C_1 \cup C_2) \cup C_3]$$

$$= P(C_1 \cup C_2) + P(C_3) - P[(C_1 \cup C_2) \cap C_3]$$