REAL AND ABSTRACT ANALYSIS

实分析与抽象分析

现代实变函数论

[美] E·HEWITT
K. R. STROMBERG 著

孙广润 译

徐利治 巩宪文 校

天津大学出版社

实分析与抽象分析

（现代实变函数论）

休伊特
〔美〕E. Hewitt
斯特龙伯格 著
K. R. Stromberg

孙广润 译

徐利治 巩宪文 校

天 津 大 学 出 版 社

（津）新登字012号

实分析与抽象分析

（现代实变函数论）

E.侯域　K.R.斯特朗堡　著

孙广润　译

徐利治　巩宪文　校

*

天津大学出版社出版
（天津大学内）
河北省邮电印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168 毫米1/32 印张：23.5 字数：610千
1994年5月第一版　1994年5月第一次印刷
印数：1—3 000

ISBN 7-5618-0453-9
O·48 定价：23.00元

内容简介

本书据西德Springer出版社1978年出版的由E. Hewitt与K.R.Stromberg著的《Real and Abstract Analysis》一书译出. 原著为一套著名的国际大学生丛书之一. 本书收入了现代分析学所依赖的五项系统知识, 即抽象集论和数学基础, 近世代数, 一般拓扑学, 拓扑线性空间(泛函分析)以及分析本身的基本训练, 在此基础上就经典实变函数论作了现代研究, 对Lebesgue积分和微分理论进行了精辟阐述. 本书立论严谨, 取材丰富, 观点新颖, 讨论细致, 选材现代化, 并注意联系应用科学. 每章均有"评注", 对课题进行深入分析和延伸. 全书配备了不同难度的习题作为进入研究领域的引导.

本书可作为理工科大学高年级教材或参考书, 也可供科技工作者学习参考.

Edwin Hewitt Karl R. Stromberg
Real and Abstract Analysis
—A Modern Treatment of the Theory
of Functions of a Real Variable
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1978

著者为中文版写的序言

我们以感激而又愉快的深切心情获悉，我们的《实分析与抽象分析》一书已由优秀学者孙广润教授译成中文，知名数学家徐利治教授和巩宪文教授审阅了孙教授的译文，为我们的著作倍增光彩.

自本书初版以来，已经过去整整二十年了. 我们怀着年青时代的热忱写作了本书. 假如今天从事这类艰巨的工作，我们当然不会写同样的书了，尽管如此，本书作为陈述我们对经典分析与现代分析所持的观点，我们对它还是满意的，它反映了1965年起我们对这些主题的理解. 至于选题和表述方面的缺点，理应如实保留着才是.

当得知我们的著作可供中国数学界使用，这给予我们莫大快乐。我们祝愿研读数学的中国大学生和研究生能从本书多多受益. 与此同时，请允许我们抱有这样的希望，即老一代数学家有时也可能从中发现某一事实，对其研究工作有所助益.

E.侯 域 于华盛顿大学

K.R.斯特朗堡 于堪萨斯州立大学

1985年5月

校者前言

《实分析与抽象分析》是杰出的现代分析学家E.Hewitt教授及其合作者K.R.Stromberg教授的有名著作. 这个译本是根据1978年修订版译出的. 原著主要有三个特点：一是全书题材选择精当，论述完备，凡重要而必需的现代分析工具均应有尽有. 二是叙理简明扼要，论证严密精确，主次分明，前后呼应，易于混淆和必须注意之处，都有交待，并能切中要害，颇具启发性. 三是原著序言富有指导意义，对各章主要题材作了重点说明，给教师和自学者提出了极为中肯有益的建议.

曲阜师范大学孙广润先生，近几年来在讲授一系列分析课程中，从这本著作里汲取了不少教益，深感有译成中文的必要，以扩大它的影响，因此决定利用业余时间译出此书. 他严肃认真地从事这项工作，既在充分揭示全书的实质内容，真实体现其特点上狠下功夫，又在文字上对各章各节各段推敲琢磨，字斟句酌，力求内容与形式的统一，用适当的译文语言重新表达原作的内容. 他一再修改译稿，花了相当大的精力，终于完成了这一艰巨的译述任务.

作为译著的校阅者，我们认为这个中译本无论在文字表述的精确性上，或者表述方法上，都没有使原著逊色. 由于原著具有可贵的特点，因此我们有理由期望，这个译本将对国内研究或讲授现代分析数学的教师们，对高年级学生、研究生和自学者，都会带来助益. 同时我们也希望读者如发现有译述不当之处，及时函告译者，不吝指正为幸.

徐利治　巩宪文

1985年2月

原 书 序

本书的写作，首先是设想成为通常所称的“实变函数论”这门课的教材. 在美国大学里，本课目前照惯例列为一、二年级研究生课程，可是有迹象表明，这种程度的分析课，会很快列入大学高年级课程. 在我们看来属分析学家基本训练的课题，已尽收入本书. 我们还写到了若干饶有兴味的分支专题. 我们也希望本书成为成熟数学家和其他科学工作者的一本有用的参考书. 因此，对于不少重要定理和重要构造，我们提出了非常一般和完善的说法. 鉴于初学者理解这些复杂说法或许感到困难，所以凡重要定理无不给出了一些初等的具体化表述，过渡处则予以适当提示. 此外，全部定义、解释和证明都详尽无遗. 这样本书不仅可用作教科书，而且也适于自学.

学习本书须具备以下条件：假定读者已有初等分析知识，比如说T.M.Apostal①或W.Rudin②中所阐述的内容. 学习本书无须具备别的条件——我们几乎定义了所用到的其他所有概念. 不过，预先懂得一点抽象代数，或许有助于理解本书. G.Birkhoff和S.Mac Lane写的课本③，收入了比本书读者所需要的远为丰富的代

① T. M.Apostal, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publ.Co., Reading, Mass., 1957.

② W.Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.（有中译本，据1976年第三版译出：《数学分析原理》，上、下册，赵慈庚等译，人民教育出版社，1979年.）

③ G.Birkhoff and S.Mac Lane, *A Survey of Modern Algebra*, 3rd Ed., MacMillan Co., New York. 1965.（有中译本：《近世代数概论》，上、下册，王连祥、徐广善译，人民教育出版社，1980年.）

数知识.

现代分析至少凭借五个方面的系统训练：其一，为了研究测度论，即使为了研究实数系的结构，人们也必须利用抽象集论这一强有力的工具．其二，在研究分析问题时，代数概念和代数方法颇具启发性，往往还是必不可少的．其三，建立并研究测度时，需要集论拓扑学知识．其四，经常运用拓扑线性空间理论(《泛函分析》)来获得基本分析结果，其方法之简单出人意表．最后，分析毕竟是分析，我们认为，运用不等式、用具体函数进行计算以及求得实际数值等，都是每位数学家必须掌握的基本技能．因此，这五方面的课题在本书中都占有一定的地位．为了使本书对概率学家、统计学家、物理学家、化学家以及工程师等也有所助益，我们收录了不少“应用”课题：Hermite函数；Fourier级数与Fourier积分，其中包括Plancherel定理及点态可和性；强大数定理；数直线上的复值测度的详尽讨论等．抽象理论的此类应用，对于想要探索他所从事的学科的实际来源和发展趋势的纯数学家也充满活力.

在华盛顿大学和俄勒冈大学我们所开的实变课程中，除少数例外，本书内容都至少由著者之一讲过不止一遍，然而，按照实际情况来看，本书内容无疑过多了，并非全部适用于一年的课程．为使教师或自学者深入中心课题，不被一些分支专题的兴趣所吸引，以致舍本逐末，谨提出以下建议.

第一章 须了解§1和§2，以建立本书所采用的记号．§3—5可以略去或布置为课外阅读．主要的是，读者理应具备运用基数、良序关系、实数域及复数域的能力.

第二章 §6的重要性自不待言，但是讲课教师在它上面化过多时间却未必明智．使用本书时，许多学生已经在其他课中学习过拓扑学原理，有的也正在学习过程中．因此，读者如感到时间确实紧，则可以略去§6，然后在全书其余部分，凡“局部紧Hausdorff空间”处就换上“实直线”，而“紧Hausdorff空间”处则换上“实直线的有界闭子集”．虽然我们并不完全赞同这种删削和代

眷，但这至少会缩短阅读时间．我们力促人人都详细研究§7，或许要除去习题．

第三章 本章是全书的核心，须切实加以研究，这一章看来几乎没有可省略的．对于全部后续内容来说（不包括§14整节和§16大部分），第三章是不可缺少的．

第三章一结束，则有若干方案可供选择．一是可直接进入§21，学习乘积测度和Fubini定理〔可是（21.32）及以下 Fubini 定理的应用等等内容，却需要§§13—18的部分知识．〕．二是可立即学习§§17—18．三是自然可以依次读§§13—22．

第四章 读者理应学习§13．由于后面并不用（13.40）—（13.51）各段，因此如必要则可略去．也可删掉§14．（虽然后文需要§14，但对于我们的主要定理来说，它并非必要．）尽管如此，§14本身作为泛函分析的基础部分，我们依然相信它是很有价值的．§15是运用经典分析的实例，学有余力的读者都应读懂这一节．在Lebesgue-Radon-Nikodým定理（§19）的证明中，我们确乎应用了定理（15.11），但正如读者将看到的那样，不用（15.11）也是完全可以的．为了弄明白§19，略去§15的读者必须了解§16才行．

第五章 须仔细研究§17和§18．这两节是经典分析的必读内容．§19中只有（19.1）—（19.24）以及（19.35）—（19.44）各段才是真正必要的．至于§20，读者都应研究（20.1)—(20.8)，而其余部分虽饶有趣味，却属次要论题．但是必须指出，在深入研究§22所介绍的无穷乘积测度时，则需要（20.55）—（20.59）各段．

第六章 人人至少都应读（21.1）—（21.27）．但是我们希望大多数读者要安排时间读关于Plancherel定理（21.31）—（21.53）和Hardy-Littlewood 极大定理（21.74）—（21.83）的介绍．§22可选读．对于进修概率论的学生来说，§22必不可少，而且据我们看，其结果非常精致，但必要时也可割爱．

偶尔我们使用“稍思即得”或“一想便知”之类的短语，这类短语的真实意义是，证明不难，写出来却累赘笨拙，而且我们认为多写势必混淆问题实质．我们布置了大量习题，难度不一，有的很简单，有的却非常非常难，较难习题都予以提示．虽然我们料想读者会欢迎某些提示，但有雄心的读者自然可以不理会它们．勤于做相当数量的练习，对于真正掌握本书极其重要．——习题之对于数学家，正如“练习曲”①之对于钢琴家那样．

我们该大大感谢许多朋友．K.A.Ross教授审阅过全部底稿，删去了许多罗唆的证明条文，并揭示出众多方面的错误．承蒙L.W.Erlebach先生读了本书大部分内容，并从学生的观点提出了有启发性的建议．K.L.Phillips教授汇集了成为本书梗概的课堂笔记，在为印刷工人准备打字稿时，又慨然予以协助．他还编写了目前版本的（21.74）—（21.83）等段．诸位教授提供了宝贵的口头意见和建议，他们是：R.M.Blumenthal，I.Glicksberg，W.H.Sills，D.R.Truax，B.Yood及H.S.Zuckerman等教授．B.Thompson小姐核对了参考书目．俄勒冈大学计算中心，特别是J.H.Bjerring先生慨然帮助编制了索引．我们感激数百名大学生，他们听了我们所开的这门课，在我们陷于表述困境时，他们不总是沉默无言．我们深切感谢S.Thanil夫人，她以杰出的才干打印了全部底稿．

我们也向俄勒冈大学和华盛顿大学谨致谢忱，在编写原稿的过程中，这两所大学减免了我们的其他任务，并给予财政支援．最后我们欣然感谢Springer出版社给予我们的大力帮助，他们迅速精细地出版了这本著作．

E.Hewitt于Washington州Seattle

K.R.Stromberg于Oregon州Eugene

① “练习曲”一词，原文为德文CZERNY．K.Czerny 为奥地利钢琴家、作曲家，尤以其练习曲著称．译文将CZERNY引申为“练习曲”．——译者注

译者的话

译述这本著作为我提供了很好的机会，得以欣赏原作思想的清晰，论述的系统，探讨的深入，以及抽象数学所固有的美学特征.

译者也有幸回顾近二百年来经典分析与现代分析的重要成就.作者以博大精深的思想和简洁畅达的文笔综述了直至20世纪60年代现代分析的一系列研究成果，将其穿插安排在正文、评注、习题中，使之与经典分析结果融为一体. 本书所具有的时代特色是十分引人注目的.

同时，作者对本书论题所需要的有关分支也作了自给自足的讲解. 的确，在这样一本篇幅不长的著作中，将现代分析所必需的集论、数学基础、代数学、一般拓扑学、泛函分析等都作了简明扼要而自成体系的阐述，内容如此丰富，是非常值得珍贵的. 专攻分析的读者固然也可以从有关专著中寻觅养料，但未免夹杂，不可尽收. 要识别那些能导向其研究核心的知识，要汲取那些真正带有根本性的最重要的东西，可以从本书中找.

用现代数学的观点讲授实变函数论，课题本身势必是相当抽象的. 读者可以从全书充分体验公理数学奇妙的和谐，享受严谨理论所给予心灵的欢娱. 抽象分析所特有的这种雅与美，是学数学的人能够感受到的. 根本的问题并不在理解和鉴赏，而在于抽象思维能力的培养. 但初学者由此预想这是一门纯数学的课程，乃是误解. 事实远非如此. 实分析应用的广泛性是众所周知的. 可贵的是，本书论述抽象理论相当周详，但也不忘耕耘应用课题. 其实这方面的线索还是非常多的，而且所精选的应用例子颇为明显地启示了更为广阔的应用远景，正反映了抽象理论的生命力所在.

作为教师，译者当然更关心本书所给予我们教材建设上的启

迪．除已指出的优点之外，我特别赞赏本书的首尾完整，结构严密，条理井然，脉络贯通．积分的引入就是一例．本教材采用Daniell方法，从§8的导引出发，层层开拓，步步深化，直到§12才最终将所开拓的泛函理解为Lebesgue积分，此为主旨所在．这一长达200页的推演，经过作者的启发引导，丝丝入扣，全篇浑然一体．这些逐节的精心之作，思路如此之明晰，以至于读者不难把这一系统的论述作由厚到薄的理解．著者以其深邃的思想，浑厚的功力，特有的风格，锤炼精粹的语言，显示了这本著作的很大的优越性．就主要课题的阐述，作者卓然有所树立．

译者格外喜爱本书的大量“评注”、“注意”、“讨论”之类的段落．它们言简意赅，发人深省，开拓思路，旁征博引．简短明快的评说，深寓着透辟的分析，展示着更广的课题，可谓别开生面．这不仅有益于自学者，而且对于即将踏上研究道路的青年也具有指导意义．“评注”之类的编写，作者是有眼光的，堪称真知灼见．希望读者能同样珍视这些极为生动而深刻的段落．

我还想到教材与课堂教学的统一问题．在本书大大小小课题之间，作者从未节省文辞，都作了扼要的分析说明．这是本书所具有的特色之一．正因为如此，读者肯定不会产生只见树木不见森林的迷路感．这种出色体现课堂上真实教学过程的教材，非是好教师写不出．徐利治教授曾称著者“具有教育家风度”，这实在是恰如其分的赞语．假如相反，把启发引导一概归于课堂教学，结果书面材料流于堆积呆板，繁冗乏力，令初学者望而生畏，当内容较为抽象复杂时，尤其如此．这种该说的不说，刻意追求形式上“简洁”的倾向，势必把数学教材推上了形式主义道路．这是否就算简洁干净，那可不一定．本书的风格迥异．其过渡处联系之细密，为目前教材所少见．

本书偏离主要课题的东西，作者作了颇具匠心的处理，不少纳入了习题．这就突出了最基本的内容，而且使读者获得了丰富多彩的知识．必须特别指出习题在本书中所处的重要地位，就本书的编

排来看，习题是正文不可分割的一部分．它并不仅仅用作练习，更重要的是作为正文的例证，阐明并开拓基本理论，讲解一些比较重要的分支专题等等。值得注意的是，某些习题在后面正文中是要引用的．对于习题的编排，细心的读者当能感受到作者的良苦用心，译者非常敬佩两位教授的严肃认真的创作精神．

由此看来，读者也应高度重视本书的习题．其实大部分题目都作了不同程度的提示．应该说，"提示"是够多的，也够详尽的．即使在详细提示的指导下，也会收到启发创造性思维能力之效果；肯于化大气力的读者可以撇开不管这些提示，这对发展独立思考和独立判断能力是大为有益的．为数不少的习题正是不久前的一些研究成果，可以肯定，完成它们无疑即步入研究门槛．

这里很难尽述这本著作的种种特色．管见所及，略举一二．译者相信，使用本书的教师都会一致认识到它的众多优点，为我们的教材建设提供值得借鉴的财富．通过借鉴而不流于照搬，仿效而又能有所创造，更新我们的教材，使之更符合现代的要求．

本书也有其不足之处．比如目录稍嫌简略，不便查阅其丰富内容，幸好书末附以出色的索引，可予部分弥补．译者放弃了另编较详参考目录的打算．

原书明显的印刷错误，译者订正了．有几处疑系印刷之误，亦予以刊正．个别证明中的疏漏，以及与初版比较，修订版未完全刊误之处，多已加译注说明，为数不多的晦涩费解，不易明确其意义，或稍有用词疏忽之处，译文均已稍加铺陈或略改．此外，译文是直译与意译相结合的．

德高望重的E。俣域教授给译者写来热情洋溢的信件，并与K。R。斯特朗堡教授一起为中文版作了短小精悍的序言，这充分体现了中美学界的友好情谊．承蒙赐助，译者至感盛情，谨致深切谢忱．

台湾著名教育家、译者的外祖父高震东教授慷慨解囊，为本书出版提供了资金支援．译者尊崇他的高尚信念，并感念其真挚亲情．

业师、八十高龄的巩宪文教授自始至终给予译者热情关怀和指导．著名数学家、大连理工大学应用数学研究所所长徐利治教授赴美国讲学前夕，在繁忙的出国准备工作中，仍不惜安排专门时间为中译本定稿．曲阜师范大学的各级领导一直关切并支持这一译述任务．学友吉林大学原子分子物理研究所所长丁培柱教授始终给予译者兄弟般的帮助．在此，谨向以上各位致以衷心谢意．

译者水平不高，译述不当或错误在所难免，我殷切期待着专家学者和青年朋友们的教正．

孙广润

1985年7月于曲阜师大

目　　录

第一章 集论与集代数

根据逻辑学家的观点，数学乃是集论及其逻辑结果．就分析学家而言，集以及直接由集所定义的概念是基本工具，经常熟练地使用这些工具是绝对必要的．因此，我们先讲述关于集与函数的两节，基本上述而不证，主要想规定记号和术语，读者如需要可用作复习．关于选择公理和无穷算术的§3、§4更为重要：这两节的定理大都有详细证明；不熟悉这些内容的读者仔细学习这两节是可取的．

显然，如果不弄清实数域和复数域的结构，人们就无法认真研究实值函数和复值函数．因之，§5给出这些对象的简明而完整的构造．读这一节时可复习有关知识；要不然就采取接受的态度．

就集论公理的程序意义上来说，本书并不严格．我们承认集、承认有理数就是了．除此之外，对所论及的都要设法予以证明．

§1 集代数

(1.1) **集的概念** 如上所述，我们把集的概念看作是已知的。粗略地说，一个集（集体、集合物、聚集体、类、族）①指的是任意一个可识别的某种事物的全体．我们用指出集的元（元素、点）的方法来识别集．人们已基于“是…的一个元”或“属于”概念公理化地表述了集论．从这些公理可以建立完善的集论，但这一过程是太冗长、繁难了，并且与经典分析相去甚远，而经典分析却是本书的主要课题．因此，我们不去费力地严格讨论集的概念，而始终

①皆为“集”的同义语．——译者注