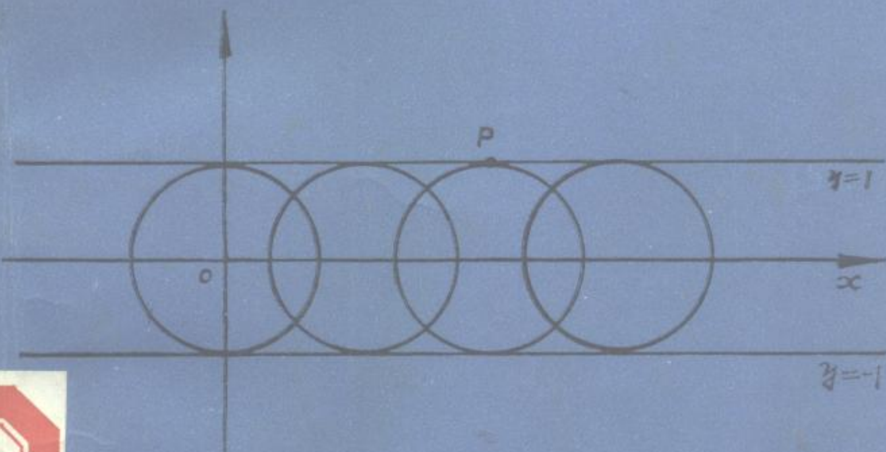
常微分方程及其应用

陈庆益　柳训明　编



華中工学院出版社

常微分方程及其应用

陈庆益　柳训明编

责任编辑　陈礼镕

•

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行　各地新华书店经售

湖北省沔阳县印刷厂印刷

•

开本：787×1092　1/32　印张：8.5　字数：192,000

1983年10月第1版1983年10月第1次印刷

印数：1—10,000

统一书号：13255-019　　定价：0.95元

内 容 简 介

本书按教育部颁布的大纲编写，共分六章．前三章论述常微分方程的基本方法及理论，并结合较多及较新的应用问题，如最优控制、医疗诊断等．第四章讨论一阶偏微分方程．第五章介绍定性理论，带周期系数的方程．第六章介绍小摄动、对比方程及边界层修正等方法．各节后面附有较多习题；

本书可作为理工科和师范院校数学、应用数学、计算、力学等专业的教材，也可供工程技术人员参考。

目　录

绪　论

常微分方程的研究主要起源于力学问题。作为微积分的孪生兄弟(Newton利用微积分讨论的质点力学问题，就归结为常微分方程组的研究)，常微分方程研究已有三百多年的历史，它是近代数学中最古老的一个分支；同时，由于与实际问题有着紧密的联系，它又是近代数学中最有生命力的一个分支。

大家知道，方程是未知量的确定函数与已知量的确定函数间的条件等式，由此可以决定未知量。这正是方程的威力和用途所在。这个未知量可以是数值，也可以是函数。例如，

代数方程　$x^3+x-5=0$；

超越方程　$e^x-\sin x=0$；

函数方程　$f(x)+f(y)=f(xy)$；

$x(t+h)-2x(t)+x(t-h)=0$　(差分方程)。

由于这些方程不含微分运算或积分运算等无限过程的极限运算，所以统称为**有限方程**，以区别于微分方程、积分方程或积微分方程等。

微分方程是未知函数及其导数的确定函数与已知函数间的条件等式。至于象苏联的Arnold在其所著《常微分方程》中提到的条件等式

$$\frac{dx}{dt}=x(x(t))$$

自然地应排除于微分方程的范畴之外，因为对于未知函数$x(t)$、$x(x(t))$是不确定的函数，是更高一个层次的未知关系。

微分方程的上述通用定义，是十分朴素又高度概括的。例如，常微分方程（自变量的个数是1）

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t),$$

偏微分方程（自变量的个数大于1）

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right);$$

单个方程(方程的个数是1，未知函数个数不必是1)

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=f(t,x,y)\quad（不定方程），$$

方程组（方程的个数大于1，未知函数个数不必大于1）

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=g(x,y)\quad（超定方程组）；$$

一阶方程（出现的导数的最高阶数是1）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

高阶方程（出现的导数的最高阶数大于1）

$$\frac{d^n x}{dt^n}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt},\cdots,\frac{d^{n-1}x}{dx^{n-1}}\right)\quad(n>1);$$

线性方程（未知函数及其导数以线性组合出现）

$$a_0(t)\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x$$
$$=f(x),$$

非线性方程（与上相反的情形）

$$\frac{dx}{dt}+x^3=0;$$

显式方程（所含（最高阶）导数中至少有一个被解出）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

隐式方程（与上相反的情形）

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^4=f(u,x,y);$$

以及恰定方程组（方程个数等于未知函数个数）、不定方程组（方程个数小于未知函数个数）和超定方程组（方程个数大于未知函数个数）等，都概括在上述通用定义之内。如果一定要以方向场来定义微分方程，如Arnold所主张的那样，全部偏微分方程就要被排除于微分方程的范畴之外了，因为对于偏微分方程来说，方向场的概念过于狭窄，或者过于不自然。如果一定要把$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$也看成方向场，则由偏微分方程，如由

$$a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}+d\frac{\partial u}{\partial z}=1$$

所确定的，并非向量场本身，而是其分量间的一个关系。所以，我们不推荐用方向场定义微分方程的观点，而宁愿采取通用的朴素定义。

由这个朴素定义，还容易理解积分方程或积微分方程的含义。

显然，有限方程的威力和用途毕竟是有限的，这主要是因为，在许多实际问题中，不易或者不能直接找到相随变化的那些量本身间的变化规律，但却可以建立这些量的变率即导数或微分之间的联系.也就是说，客观世界中的大量运动过程或变化规律是由微分方程描述的。由此可看出微分方程与实际问题的紧密联系，以及微分方程这一数学分支的重要性。但这还只是问题的一个方面。

问题的另一方面，则是常微分方程在数学本身范围内的重大理论价值。为了说明这个方面，不妨回顾一下常微分方程研

究的历史概况。作为对比，先略述代数方程的情况，在代数方程研究的两千多年的漫长历史中，绝大部分时期只从事于个别方程的求解问题，一般性的讨论到上世纪初才取得成果。关于一般五次以上的代数方程是否可用公式表示根的问题，导致群论的出现，其理论意义远远超出代数乃至整个数学的范围，影响之深远，在数学领域内，只有《几何原本》一书的影响可以比拟.

常微分方程的历史也有类似的情况，只是影响比不上群论，但进程要快一些。在常微分方程历史的前二百来年中，也只是从事于个别方程的求解研究。到上世纪三十年代，才出现一般性的讨论，这主要是关于一般常微分方程的初值问题的讨论。一般方程是否可用初等函数或积分求解的问题，导致连续群或拓扑群的讨论.这个理论虽然在常微分方程领域内远没有得到象群论对代数方程求解问题那样巨大的成功，但对数学其它分支也发生了相当大的影响。在常微分方程研究中比较成熟的是上世纪末出现的定性理论，即在无法因而不必求出解的表达式的情况下，由常微分方程本身的结构来判定解的一些重要性质，例如解曲线的全局几何形状及拓扑性质、在奇点近旁的分布与走向以及解的稳定性与有界性等定性研究，以区别于定量的研究.这种定性研究不仅有重大的理论意义和实际价值，对数学的其它领域有着相当大的影响，而且由此产生出新的数学分支，如代数拓扑学。与定性研究同等重要的定量研究，虽在十八世纪已有萌芽，但主要还是在上世纪末得到更大发展，这些当然都是实际需要所促成的。定量研究有两个方面：求常微分方程的解的近似表达式和数值近似，前者包括各种的摄动方法和渐近方法，后者由于本世纪五十年代以来高速电子计算机的不断更新而突飞猛进。此外，常微分方程还有一些成熟的一般性理论，例如上世纪中开始的解析理论和固有值理论，对于经

典物理学和量子力学都有重大应用，后者还是泛函分析的重要原型之一。总之，常微分方程在上世纪末已建立一些成熟的一般性理论，而偏微分方程方面则相形见拙，它只在线性情形，于本世纪五十年代以后，才开始有一般性理论的出现。原因在于偏微分方程的情况要复杂得多，例如，五十年代中才发现下面这样的方程

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}-2i(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f(x_3)$$

甚至连广义解都不存在，这里$f(x_3)$是无穷可微但非解析的函数，例如

$$f(x_3)=\begin{cases}e^{-1/x_3^2} & (|x_3|>0);\\ 0 & (x_3=0).\end{cases}$$

详见H.Lewy,Ann.ofMath.(2)66(1957)155——158.

近年来，常微分方程方面还出现了一些重要研究方向，除结合经典质点力学在可微流形上的动力系统的全局研究外，还有结合调节和控制问题的最优过程理论和有微分方程作限制条件的微分对策理论，以及结合概率论的随机微分方程等。所有这些方向，有一个共同特点，就是与其它学科分支交叉。这当然是整个近代科学研究中的一个特点。

常微分方程研究的中心任务是：确定方程的解并讨论解的性质。

作为常微分方程基础课教材，本书以基本概念、基本理论和基本方法为主，但考虑到近年来的需要，有所侧重于准确解及解的近似表示的寻求方面。

第一章 初等解法

1.1. 方程、定解问题和解

1.1.1. 描述自然现象的常微分方程

举几个典型的例子.

例1 落体运动方程

设质量为m克的质点在离地面s_0米处以初速v_0米/秒仅受重力作用(自由落体)下落. 为描述这个运动，取质点与地心联线为s轴，s轴与地面交点0为原点，背离地心方向为s轴正向，记质点在时刻t的位移（从原点量起）为$s(t)$. 显然，不易直接求出位移s与t的函数关系$s(t)$，但由Newton第二定律

$$f = ma, \tag{1}$$

可立即得出未知函数$s(t)$所应满足的常微分方程. 因

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad f = -mg,$$

这里g为重力加速度，其正向指向地心，而与位移正向相反，故出现负号. 为简单起见以后略去单位. 把上述表示代入(1)式，即得描述自由落体运动的常微分方程

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \tag{2}$$

这是一个线性的二阶常微分方程. 如果落体除受重力作用外，还受给定力$F(t)$的作用，则（1）式中的$f = F - mg$，于是得

落体运动方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=F-mg. \tag{3}$$

（2）或（3）式描述一般落体的运动状态，至于特定的落体运动，则由其高度s_0及速度v_0所表征。显然，从不同的高度以不同速度下落的物体，其运动状况是有差别的。因此，对于特定的落体，除考虑方程（2）或（3）外，还应考虑其特定状况（起始状况）：

$$s(t_0)=s_0,\quad v(t_0)=\frac{ds(t_0)}{dt}=v_0, \tag{4}$$

这里t_0为物体开始下落的时刻（起始时刻），通常取$t_0=0$。条件（4）称为**初值条件**，在条件（4）下求解方程（2）或（3）的问题，称为**初值问题**。至于方程(2)或(3)的一个解，则是一个二次连续可微的确定函数$s(t)$，把它代入方程(2)或(3)后，使它成为关于t的恒等式，即条件等式(2)或(3)成为恒等式。解$y=y(x)$在(x,y)平面*）上的图形，称为**解曲线**.

例2 生物总数的数学模型

本来，生物总数只取离散的整数值，绝非时间t的可微函数，因此似乎不能用微分方程来描述其变化；但若事先能肯定这个总数很大，且在短时间内只有少量增减，则可近似地认为这个总数是t的连续函数，甚至是可微函数。

设$p(t)$为在时刻t的生物总数，$r(t,p)$为出生率与死亡率之差。若这种生物是孤立系统，即既无迁出，又无迁入，则总数的时间变率为

$$\frac{dp}{dt}=r(t,p)\,p. \tag{5}$$

---

*）为了与一般记n维Euclid空间为$R^n=(x_1,\cdots,x_n)$的写法一致，这里及以后记平面为(x,y)平面、(t,x)平面等，而不采用平面解析几何中的记法xoy等.

这就是描述生物总数变化情况的方程：一阶非线性常微分方程。在最简单的模型中，设$r=a$为常数，得线性方程：

$$\frac{dp}{dt}=ap. \tag{6}$$

若在某个计算起始时刻$t=t_0$统计出总数为p_0，即得初值条件：

$$p(t_0)=p_0. \tag{7}$$

模型(6)与实际情况的偏离较大，通常采用模型：

$$\frac{dp}{dt}=ap-bp^2, \tag{8}$$

常数a,b称为生物总数的**生命系数**。一般说，$b<<a$，它们都是按统计结果算出的。

例3 悬链线方程

大家都见过相邻二电线杆间电线呈曲线状态，这个曲线究竟是怎样的曲线呢？这里只写出曲线所应满足的方程而略去推导。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\rho g}{H}\sqrt{H\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \tag{9}$$

其中，x表示二电杆水平联线上的坐标，不妨取二杆联线中点为原点，二杆的坐标为$x=\pm a$；$y=y(x)$为电线在x处离水平面的高度；ρ为电线的质量线密度（通常可认作是常数，因此是单位长度上的质量）；g是重力加速度值；H为电线的水平方向的张力，表征电线的弹性性能，通常也可认作是常数。显然，电线的悬垂情况与两端在二电杆上的高度有关。所以，为了确定电线的悬垂状况，对(9)式还须附加**边界条件**：

$$y(-a)=A;\qquad y(a)=B, \tag{10}$$

其中，A,B分别是电线在两端$x=\pm a$的悬挂高度.在条件(10)下求解方程(9)的问题，称为**边值问题**。边值问题(9)、(10)在高压输电架线工程中有重要应用。

读者尝试比较初值问题与边界问题的差别。这两个问题是微分方程问题中的典型**定解问题**；初值条件、边值条件则是典型的**定解条件**。

1.1.2. 由几何问题引出的常微分方程

例4 正交轨线族问题

给定以$(\pm 1,0)$为焦点的共焦点椭圆族

$$\frac{x^2}{1+\lambda}+\frac{y^2}{\lambda}=1 \quad (\lambda>0), \tag{11}$$

求另一族曲线，使其中每条曲线都与(11)式给出的所有椭圆正交，即在交点的切线互相垂直。

由于曲线$y=y(x)$的一阶导数$y'(x)$表示曲线在点$(x, y(x))$的切线的斜率，而二切线正交的充要条件是二斜率互为负倒数，故须求出族(11)中曲线的斜率。为此，把(11)式的两边对x作微分运算得

$$\frac{2x}{1+\lambda}+\frac{2yy'}{\lambda}=0. \tag{12}$$

因为正交性应对所有λ成立，故须由(11)与(12)式消去λ。不难解得

$$xyy'^2+(x^2-y^2-1)y'-xy=0. \tag{13}$$

这是一个隐式一阶非线性常微分方程，或称一阶二次方程，因为它关于最高阶导数y'为二次的。显然，对任何一个λ，由(11)式确定的$y=y(x)$是方程(13)的解。这种由(11)式确定的隐式解，通称为方程的积分，它在(x,y)平面上的曲线称为**积分曲线**。注意一阶方程(13)的积分(11)含一个任意常数$\lambda>0$。以后我们会看到，任何一个n阶常微分方程的解或积分包含n个互相独立*)的任意常数。这种含与阶数相同个数的独立常数

*) 这里的"互相独立"，为函数无关之意。

的解或积分称为**通解**或**通积分***)；由它令常数取特定值而得的解称为**特解**。反过来，由含一个任意常数λ的曲线族(11)消去λ得一个一阶方程，一般地，由含n个互相独立的任意常数的曲线族消去常数，可得一个n阶常微分方程。

回到正交轨线族问题。为求得曲线族(11)的正交轨线族，应在方程(13)中换y'为$\frac{-1}{y'}$，由此得

$$xyy'^2+(x^2-y^2-1)y'-xy=0,$$

可见与(13)式一致.问题在于方程(13)关于y'是二次的，故在每一点(x,y)有两个y'值，一个对应于椭圆族中某个椭圆在该点的切线斜率，而另一个则对应于共焦点双曲线族

$$\frac{x^2}{1+\lambda}+\frac{y^2}{\lambda}=1 \quad (-1<\lambda<0)$$

中相应双曲线在该点的切线斜率。这两族共焦点圆锥割线作成正交轨线族。

附带提到，正交轨线族问题在电磁学及流体力学的某些平

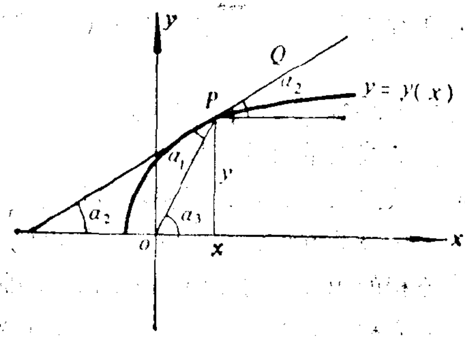


图 1.1.1

*) 我们采用通解的这种朴素定义，而不拟牵涉解的唯一性以及所有解是否都由通解给出等问题。

面问题中有所应用。

例5 探照灯反射镜面的形状

在设计探照灯的反射镜面时，要求把点光源射出的光线平行地反射出去。我们当然可取镜面为旋转曲面，于是问题就化为求平面曲线的问题。

设光源在坐标原点，取 x 轴平行于光的反射方向（图1.1.1），记所求曲线为 $y=y(x)$，过其上任一点 $P(x,y)$ 作切线 PQ。据光线的反射定律知入射角应等于反射角，即 $\alpha_1=\alpha_2$。由图1.1.1有 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2=2\alpha_2$，故得

$$\tan\alpha_3=\tan 2\alpha_2=\frac{2\tan\alpha_2}{1-\tan^2\alpha_2}. \tag{14}$$

又 $\tan\alpha_2=\dfrac{dy}{dx}$，$\tan\alpha_3=\dfrac{y}{x}$，代入(14)式得

$$\frac{y}{x}=\frac{2y'}{1-y'^2}.$$

由此解出 y' 有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\pm\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

对于图1.1.1所示曲线的上支，应有 $0<y'=\tan\alpha_2<1$，故得所求曲线应满足的常微分方程为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}. \tag{15}$$

例6 圆族的包络

考虑圆心沿 x 轴移动的单位圆族：

$$(x-\lambda)^2+y^2=1,\quad -\infty<\lambda<\infty. \tag{16}$$

显然，直线 $y=\pm1$ 为圆族的两条包络，过其上每一点有族中一圆与之相切（图1.1.2）。我们还可由微分方程的解的角度认识这种联系。为此先求族(16)所满足的微分方程，在(16)两边对

x 求导数得

$$2(x-\lambda)+2yy'=0.$$

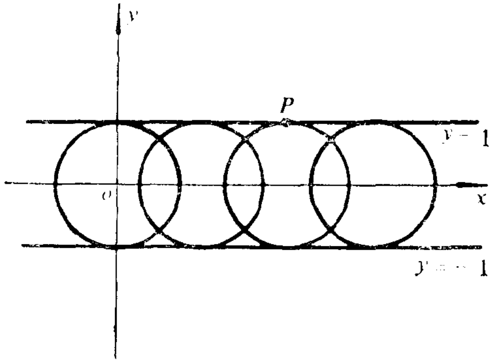


图 1.1.2

由此解出$\lambda=x+yy'$，代入(16)式得所需方程：

$$y^2y'^2=1-y^2. \tag{17}$$

显然，$y=\pm1$也是(17)式的解。还可看出，这两个解破坏了解的唯一性，过任一点P(参看图1.1.2)，有两条解曲线，一是直线，一是族(16)中的圆。解族的包络解称为奇解。

在某些实际问题中，奇解有特殊的用处。

1.1.3. 由其它方程引出常微分方程

例7 由函数方程

$$f(x+y)=f(x)f(y) \tag{18}$$

引出微分方程。显然，$f\equiv0$ 或$f\equiv1$为(18)式的解。这种平凡解意义不大。本来，在只要求f连续的情况下，也可求出(18)式的解$f(x)=a^x$，$a\neq0,1$.但技巧性较强。这里不妨要求f可微，化(18)式为常微分方程，以便于求解。首先在(18)式中取$y=0$,有