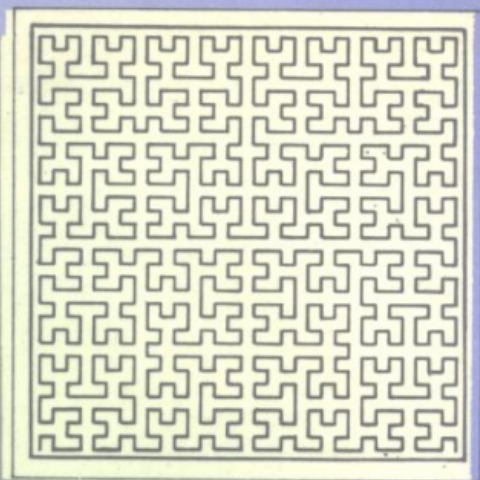


刘怀俊 编著



实变函数基础

武汉大学出版社

51.621

5

實變函數基礎

劉懷俊編著

武汉大学出版社

1993

内容提要

本书系根据武汉大学数学系实变函数课程讲义写成. 主要内容有: 集、点集、测度、可测函数、勒贝格积分、一般测度与积分共六章, 各章附有适量习题. 全书行文流畅, 说理详明透彻, 论证深入浅出, 体系比较完整, 可作为综合大学与师范学院数学系《实变函数》教学用书或参考书.

(鄂)新登字 09 号

ZNB4/22

实变函数基础

©刘怀俊 编著

*

武汉大学出版社出版发行

(430072 珞珈书苑)

《数学物理学报》激光印字室激光照排

湖北省崇阳县印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 7.125 印张 178 千字

1993 年 8 月第 1 版 1993 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1-1000

ISBN 7-307-01579-X/O · 135

定价: 4.15 元

前 言

本书是在武汉大学《实变函数》课程讲义基础上,历经增删修订写成的.

全书六章可分为三部分:前两章为柔性集论,讲述集的一般理论与点集拓扑性质;第三、四两章为刚性集论,叙述点集测度与可测函数基本性质;最后两章为积分论,论述 Lebesgue 积分理论与 σ 代数上的测度与积分.具体内容详见目录.

本书围绕教学大纲传统内容,对某些重要材料予以补充.如 Cantor 连续统假设, Russell 悖论, Peano 曲线,环与代数上的测度理论,广义测度 Hahn 分解, Radon-Nikodym 定理等,这对现代分析特别是近代函数论、泛函分析、概率论等都是重要的基础.

书中用小号字排版的几节,在教学中可以按需取舍,这样在使用时可使讲授学时数有较大的伸缩性.

书末附有索引,以便查考.其中对本书所涉及的数学家,都注明其生卒年代及国籍.

本书出版过程中,得到武汉大学数学系、中科院武汉数理所的大力支持,老一辈教学家李国平教授为本书作了内封题字,又由《数学物理学报》和《武汉大学出版社》的朋友们鼎力相助.在此一表示诚挚的感谢.

限于作者水平,书中可能出现不妥甚至谬误之处,恳请读者不吝指正.

常用记号表

符号	名称	含 义	页码
$\in$	属于	$a \in A$, 表示 a 为集 A 的元素	1
$\notin$	不属于	$a \notin B$, 表示 a 非集 B 的元素	2
$\subset$	包含于	$A \subset B$, 表示集 B 包含集 A .	2
$\cup$	并	$A \cup B = \{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$	3
$\cap$	交	$A \cap B = \{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	3
$\complement$	补	$\complement A = \{x x \notin A\}$	4
$\times$	直积	$A \times B = \{(x, y) x \in A, y \in B\}$	125
$+$	直和	$A + B = A \cup B$ 当 $A \cap B = \emptyset$	3
$-$	差	$A - B = \{x x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$	5
$\triangle$	对称差	$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$	172
$\stackrel{\text{def}}{=}$	定义符	“赋值为”或“定义为”	5
$\forall$	全称量词	“对所有的”	2
$\exists$	存在量词	“存在着”	3
$\sim$	对等	$A \sim B$ 表示集 A 与 B 等势	8
$<$	序关系	表示“前于”或“不后于”	40
$P(A)$	幂集	$P(A) = \{E E \subset A\}$	19
$\tilde{E}$	上限集	$\tilde{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$	5
$\underline{E}$	下限集	$\underline{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$	5
$\xrightarrow{a.e.}$	概收敛	$f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 表示 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f	88
$\xrightarrow{me}$	测度收敛	$f_n \xrightarrow{me} f$ 表示 $\{f_n\}$ 测度收敛于 f	88
$R = (X, \rho)$	环	表示环或 σ 环(见第六章 § 1)	171
$A = (X, \alpha)$	σ 代数	表示 σ 代数或可测空间	174
I	结束符	表示“证毕”, 或“本段结束”.	

目 录

前言

常用记号表

第一章 集	1
§ 1. 集及其运算	1
1. 集的概念(1)	
2. 集的运算(2)	
3. 上限集与下限集(5)	
§ 2. 可数集	7
1. 可数集(8)	
2. 可数势 $\aleph_0$ (9)	
§ 3. 连续势	11
1. 连续统(12)	
2. 连续势的运算(15)	
§ 4. 势的比较	16
1. Bernstein 定理(17)	
2. 幂集(19)	
3. 连续统假设(21)	
§ 5. 集合公理系	21
1. Russell 悖论(21)	
2. 数学“危机”(22)	
3. 集合公理系(23)	
习题一	24
第二章 点集	26
§ 1. 开集, 闭集, 完全集	26
1. 开集(26)	
2. 闭集(27)	
3. 完全集(29)	

§ 2. 开集、闭集的构造	32
1. 开集的构造(32)	
2. 闭集的构造(32)	
3. 稠密集与疏朗集(33)	
§ 3. $\mathbb{R}^n$ 中开集、闭集的构造, 点集隔离性	35
1. $\mathbb{R}^n$ 中开集、闭集的构造(35)	
2. 点集间距离与隔离性(37)	
§ 4. 序集	40
1. 序(40)	
2. Zorn 引理(41)	
§ 5. Peano 曲线	42
1. Cantor 曲线(42)	
2. Peano 曲线(42)	
3. Sierpinski 地毯(44)	
习题二	46
第三章 测度	48
§ 1. 直线上开集、闭集的测度	48
1. 有界开集 G 的测度(48)	
2. 有界闭集 F 的测度(49)	
3. 开集测度与闭集测度的关系(51)	
§ 2. 外测度与内测度	53
1. 外测度与内测度的概念(53)	
2. 外测度与内测度的性质(54)	
3. 外测度与内测度的半可加性(55)	
§ 3. Lebesgue 测度	56
1. 定义(56)	
2. 外、内测度互补性(58)	
3. Vallée Poussin 定理(59)	
4. 极限包与极限核(60)	
5. Carathéodory 定理(62)	

§ 4. Borel 集	63
1. Borel 集(63)	
2. L 可测集类(64)	
3. 不可测集(66)	
§ 5. $\mathbb{R}^n$ 中的点集测度	68
1. 开集的测度(69)	
2. 外测度(69)	
3. $\mathbb{R}^n$ 中的可测集(70)	
4. Carathéodory 条件(70)	
习题三	71
第四章 可测函数	73
§ 1. 可测函数及其性质	73
1. Lebesgue 可测函数(74)	
2. 简单函数(75)	
3. L 可测的充要条件(76)	
§ 2. 可测函数列的上、下极限	78
1. 函数列的上下确界函数(78)	
2. 函数列的上下极限函数(79)	
3. 发散点集(81)	
4. Baire 函数类(84)	
§ 3. 概收敛与测度收敛	88
1. 概收敛与测度收敛概念(88)	
2. 概收敛与测度收敛的关系(89)	
3. Egorov 定理(92)	
§ 4. 可测函数的构造—Luzin 定理	94
1. Luzin 定理(94)	
2. Luzin 定理的推广(96)	
习题四	98
第五章 Lebesgue 积分	100
§ 1. Lebesgue 积分的概念	100

1. Lebesgue 积分(102)	
2. 有界可积与有界可测(105)	
3. Baire 上、下函数, Riemann 可积充要条件(108)	
4. Lebesgue 可积函数(112)	
§ 2. Lebesgue 积分的性质	115
1. L 积分的简单性质(115)	
2. 积分绝对连续性与完全可加性(117)	
3. Lebesgue 基本引理(119)	
§ 3. 积分号下取极限	120
1. Levi 定理(120)	
2. Fatou 引理(121)	
3. Lebesgue 控制收敛定理(122)	
4. Vitali 定理(124)	
§ 4. Fubini 定理	126
1. 直积测度(126)	
2. 下方图形(128)	
3. 截面定理(130)	
4. Fubini 定理(132)	
§ 5. 围变函数与绝对连续函数	135
1. 围变函数(135)	
2. Jordan 分解定理(138)	
3. Vitali 覆盖引理(143)	
4. 单调函数的导数(146)	
5. 绝对连续函数(152)	
§ 6. Stieltjes 积分	160
1. Stieltjes 积分(160)	
2. S 积分存在条件(163)	
3. 积分号下取极限(165)	
习题五	168
第六章 一般测度与积分	171

§ 1. 集系	171
1. 环与代数(171)	
2. σ 代数(174)	
3. Borel 集系(174)	
§ 2. 测度空间	176
1. 可测空间(176)	
2. 测度的基本性质(177)	
3. Carathéodory 条件(180)	
4. 测度的扩张(184)	
§ 3. 一般积分	188
1. μ 可测函数(188)	
2. 一般积分(189)	
3. Lebesgue—Stieltjes 积分(191)	
§ 4. Radon—Nikodym 定理	192
1. 测度绝对连续性(193)	
2. Hahn 分解(195)	
3. Radon—Nikodym 定理(200)	
4. Lebesgue 分解(206)	
习题六	209
参考书目	212
索引	214

第一章 集

本章主要讨论:集及其运算,可数集、连续势、势的比较、罗素悖论和集论公理等.

§ 1 集及其运算

1. 集的概念

集(*Set*) 又称**集合**,它是数学中最重要的基本概念之一,是一种不能用更“基本”的概念来定义的基本概念,正像几何学中的点、直线一样,但对具体的集却可给予精确的描述.例如

$N = \{n\}, n = 1, 2, \dots$, 表示自然数全体所成的集.

$E = [0, 1]$ 表示满足 $0 \leq x \leq 1$ 的实数 x 全体所成之集.

$F = \{f(x) | a \leq x \leq b\}$ 表示 $[a, b]$ 上实函数 $f(x)$ 全体所成之集.

元素(*Element*) 组成集 A 的成员 a ,称为 A 的元素.有时简称**元**.

元素 a 与集 A 的关系是用“属于”(belong to)来表示的.任何元素或者属于集 A ,或者不属于集 A ,二者必居其一且仅居其一.

若元素 a 属于集 A ,就简记为

$a \in A$. “ $\in$ ”读作“属于”.

若 a 不是集 A 的元素,则记为

$a \in A$. “ $\in$ ”读作“不属于”。

我们将看到,元素、属于、集合这些基本构件可以构筑起集论的“大厦”。

空集 (Empty) 不含任何元素的集,称为空集,记为 $\emptyset$ 。

仅含一个元素的集,叫做单元素集,常记为 $A = \{a\}$, 其中 a 为 A 的唯一元素。若集 B 含有多个元素 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 则可记为

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \quad \text{或} \quad \{b_k | k=1, 2, \dots, n\}.$$

这里花括弧 $\{ \}$ 表示集合(即集),而竖线“ $|$ ”左边表示该集的代表元素,竖线右边表示其特征属性。一般多采用这种方式表示集合:

$$A = \{a | a \text{ 具有某种确定性质} \}$$

比如: $N = \{n | n=1, 2, \dots\}$, $[0, 1] = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$, $K = \{k | k \text{ 为素数} \}$, $T = \{t | t \text{ 是实数, 但不是任何整系数多项式的根(零点)} \}$ 等。

从元素与集合的属于关系可以派生出许多其他概念、关系和运算。

包含 (Inclusion) 若集 A 的任一元 a 都是集 B 的元, 就称集 A 包含于集 B 中(或称 B 包含 A)。记为

$$A \subset B \quad (\text{或 } B \supset A).$$

子集 (Subset) 若 $A \subset B$, 就称 A 为 B 的子集。若 $A \subset B$, 且存在 $b \in B$ 使 $b \notin A$, 则称 A 为 B 的真子集。

相等 (Equal) 若 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 就称二集 A, B 相等, 记为 $A = B$ 。

2. 集的运算

介绍两个以后常用的记号: “ $\forall$ ”与“ $\exists$ ”。

$\forall$ 为全称量词, 表示“对所有的”(for all)或“对任意的”(for arbitrary), 取其第一个字母 A 旋转 180° 而得。

$\exists$ 为存在量词, 表示“存在”(exist), 取其第一个字母 E 旋

转 180° 而得.

并 (Union) 两集 A, B 元素的全体 (相同元算作一个) 所成的集, 称为 A, B 两集的并集. 记为 $A \cup B$. 有时用 $A+B$ 表示当 A 与 B 无公共元素时的并集 $A \cup B$.

并的运算可以多次进行, 如集组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的并集

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

由逐次取“并” $(n-1)$ 次而得到. 显然

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \{x | \exists k, 1 \leq k \leq n, \text{使 } x \in A_k\}.$$

对集列 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 应当取“并”无穷多次, 其并集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \{x | \exists n, \text{使 } x \in A_n\}$$

一般, 对集族 $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, Λ 为指标集, 则有

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x | \exists \lambda \in \Lambda, \text{使 } x \in A_\lambda\}.$$

交 (Intersection) 两集 A, B 的公共元素全体形成的集, 称为 A 与 B 的交集. 记为

$$A \cap B.$$

显然, A 与 B 之交 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$.

集组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交集 $\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 可经求交 $(n-1)$ 次而得.

集列 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的无穷交

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

应是逐次求交无穷次而得. 但也可用另一种方式表示出来

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x | \forall n, x \in A_n\}.$$

一般对 $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, Λ 为指标集, 则有

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x | \forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\}.$$

集 A 与 B 的并 $A \cup B$, 交 $A \cap B$ 有下列关系:

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

此由定义显然可见.

定理 1(三定律)

I 交换律(*Commutative law*)

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

II 结合律(*Associative law*)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

III 分配律(*Distributive law*)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

证 取各定律第一式证之,第二式类似.

对 I, 两端的元素皆为: “ $x \in A$ 或 $x \in B$ ”.

对 II, 两端的元素皆为: “ $x \in A$ 或 $x \in B$ 或 $x \in C$ ”.

对 III, 左右两端元素皆为: “ $x \in A$ 且同时 $x \in B$ 或 $x \in C$ ”.

补集(*Complement set*) 设 $A \subset S$, 则称 S 中不属于 A 的元素组成的集为 A 关于 S 的补集, 记为

$$\mathcal{C}_S A \text{ 或简记为 } \mathcal{C}A$$

特别是取 S 为 *Euclid* 空间 R^n , 则集 $A \subset R^n$ 的补集为 $\mathcal{C}A = R^n - A$, 而有:

$$A \cup \mathcal{C}A = E^n$$

$$A \cap \mathcal{C}A = \emptyset$$

棣·摩根(*De Morgan*)定理:

$$\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$$

$$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$$

证: 第一式: 两端元素皆满足: “ x 既不属于 A , 亦不属于 B ”.

第二式: 两端元素皆满足: “ x 或不属于 A , 或不属于 B ”.

所证定理称为摩根律, 或对偶律(*duality law*). 可表述为

“并之补”=“补之交”, “交之补”=“补之并”.

差集 (Difference set) 设 A 与 B 为任意两集, 称属于 A 而不属于 B 的元素全体所成之集为 A 与 B 的差集. 记为 $A-B$ 或 $A \setminus B$.

差集可用补集表示.

$$A-B = A - A \cap B = A \cap \bar{B}.$$

集 A 与 B 的并、交、差、以及补集都可用文氏图形象地表示出来. 见图 1-1 中各分图的阴影部分所示.

集的运算性质, 除“三定律”与摩根律外, 尚有其它诸律, 见习题一之 2、3.

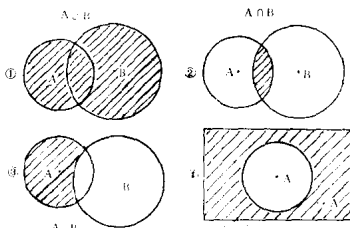


图 1-1 集运算的文氏 (Venn) 图

3. 上限集与下限集

定义 设 $\{A_n\}$ 为任意集列,

凡属于无穷多个 A_n 的元素全体所成之集, 称为 $\{A_n\}$ 的 **上限集** (superior limit of a sequence of sets). 记为

$$\tilde{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n, \quad := \{x \mid \exists \{n_k\} \text{ 使 } x \in A_{n_k}, \quad k=1, 2, \dots\}$$

凡除开有限个 A_n 外, 而属于一切 A_n 的元素全体所成之集, 称为 $\{A_n\}$ 的 **下限集** (inferior limit of a sequence of sets). 记为

$$\underset{\sim}{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n, \quad := \{x \mid \exists n_0, \text{ 当 } n \geq n_0 \text{ 时, } x \in A_n\}$$

此处 $\tilde{A}$ 与 $\underset{\sim}{A}$ 表示式中的记号“ $=$ ”表示“定义为”.

定理 2 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为任意集列, 则有

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \\ \underset{\sim}{A} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \end{aligned}$$

证 对前一式: $\forall x \in \tilde{A}$; 则 $x \in A_k$, 对无穷个 k 成立; 得 $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \forall n$; 即 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$; $\therefore \tilde{A} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

以上论证过程可以逆向推理, 得 $\tilde{A} \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

因此, $\tilde{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

后一式类似推证: $\forall x \in A; \exists n_0$, 使 $k \geq n_0$, 有 $x \in A_k$; 得 $x \in \bigcap_{k \geq n_0} A_k$; 因此 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$; 于是 $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. 此推理可逆向进行, 而有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A$. 得出

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

系 集列 $\{A_k\}$ 的上限集 $\tilde{A}$ 包含其下限集 A .

即 $A \subset \tilde{A}$.

这是因为“除有限个外属于全部 A_k ”的元素必然“属于无穷个 A_k ”. 就是说: A 的元必在 $\tilde{A}$ 内.

极限集 当 $A = \tilde{A}$ 时, 称集列 $\{A_n\}$ 收敛 (converge) 于其极限集 $A = A = \tilde{A}$. 记为

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

例 1. 渐伸集列: $\{A_n | A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in N\}$. 与渐缩集列: $\{B_n | \forall n \in N, B_n \supset B_{n+1}\}$ 都是收敛的.

证 先证 $\tilde{A} = A$,

由于 $\{A_n\}$ 为渐伸列, 得 $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \forall n \in N$ 成立. 因此,

$$\tilde{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

又由 $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \quad (\because A_n \subset A_{n+1} \subset A_{n+2} \subset \dots)$, 得 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \tilde{A}$. 得

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \tilde{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

其次,对渐缩列 $\{B_k\}$, $\because B_n \supset B_{n-1}, \forall n$, 有 $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k = B_n, n=1,$

$2, \dots$, 得 $\tilde{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. 又从 $\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \quad \forall n \in N$ 成立.

得

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \tilde{B}.$$

$$\text{例 2. 设 } A_n = \begin{cases} (0, 1 + \frac{1}{n}), & n \text{ 为奇数,} \\ (-\frac{1}{n}, 1), & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

则有

$$\tilde{A} = [0, 1], \quad A = (0, 1).$$

事实上, $[0, 1]$ 中每一点都在无穷多个 A_n 中, $0 \in (-\frac{1}{2k}, 1) = A_{2k}, 1 \in (0, 1 + \frac{1}{2k+1}) = A_{2k+1}$. 而 $[0, 1]$ 外的任一点都不属于无穷多个 A_n , 故得 $\tilde{A} = [0, 1]$.

另一方面, $\forall n \in N$ 有 $(0, 1) \subset A_n$ 成立, 得 $(0, 1) \subset A$. 而从 A_n 表示式可见, 对 $x \leq 0$ 或 $x \geq 1$ 的任何点 x , 不可能从某个序号以后属于所有的 A_n , 因而不属于 A . 得出 $A = (0, 1)$.

§ 2 可数集

对有限集 $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B_m = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. 要比较 A_n 与 B_m 哪个集的元素个数多. 通常的办法是数一数它们各自有多少元素, “数”的结果得到 A_n 有 n 个元素, B_m 有 m 个元素. 若 $n < m$, 自然得出 B_m 的元素比 A_n 的多了.

除此以外, 还有另外一种十分有效的方法可以比较 A_n 与 A_m 的元素的多少. 这就是: 对于 A_n 中元素 a_1 , 取 B_m 的元素 b_1 与之