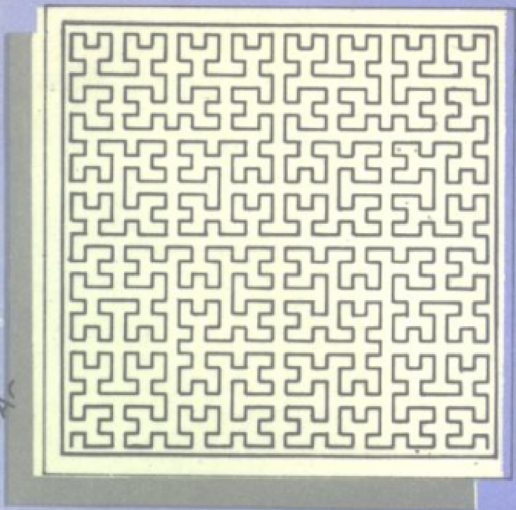
刘怀俊 编著



实变函数基础

武汉大学出版社

實變函数基礎

劉懷俊 編著

武汉大学出版社
1993

内容提要

本书系根据武汉大学数学系实变函数课程讲义写成．主要内容有：集、点集、测度、可测函数、勒贝格积分、一般测度与积分共六章，各章附有适量习题．全书行文流畅，说理详明透彻，论证深入浅出，体系比较完整，可作为综合大学与师范学院数学系《实变函数》教学用书或参考书．

（鄂）新登字 09 号

实变函数基础

© 刘怀俊　编著

*

武汉大学出版社出版发行

（430072 武昌珞珈山）

《数学物理学报》激光印字室激光照排

湖北省崇阳县印刷厂印刷

*

850×1168　1/32　7.125 印张　178 千字

1993 年 8 月第 1 版　　1993 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—1000

ISBN 7-307-01579-X/O・135

定价：4.15 元

前　言

本书是在武汉大学《实变函数》课程讲义基础上，历经增删修订写成的.

全书六章可分为三部分：前两章为柔性集论，讲述集的一般理论与点集拓扑性质；第三、四两章为刚性集论，叙述点集测度与可测函数基本性质；最后两章为积分论，论述 Lebesgue 积分理论与 σ 代数上的测度与积分. 具体内容详见目录.

本书围绕教学大纲传统内容，对某些重要材料予以补充. 如 Cantor 连续统假设，Russell 悖论，Peano 曲线，环与代数上的测度理论，广义测度 Hahn 分解，Radon－Nikodym 定理等，这对现代分析特别是近代函数论、泛函分析、概率论等都是重要的基础.

书中用小号字排版的几节，在教学中可以按需取舍，这样在使用时可使讲授学时数有较大的伸缩性.

书末附有索引，以便查考. 其中对本书所涉及的数学家，都注明其生卒年代及国籍.

本书出版过程中，得到武汉大学数学系、中科院武汉数理所的大力支持，老一辈教学家李国平教授为本书作了内封题字，又由《数学物理学报》和《武汉大学出版社》的朋友们鼎力相助. 在此一一表示诚挚的感谢.

限于作者水平，书中可能出现不妥甚至谬误之处，恳请读者不吝指正.

常用记号表

符号	名称	含　义	页码
$\in$	属于	$a\in A$，表示 a 为集 A 的元素	1
$\overline{\in}$	不属于	$a\overline{\in}B$，表示 a 非集 B 的元素	2
$\subset$	包含于	$A\subset B$，表示集 B 包含集 A.	2
$\cup$	并	$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$	3
$\cap$	交	$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$	3
$\mathscr{C}$	补	$\mathscr{C}A=\{x\mid x\overline{\in}A\}$	4
$\times$	直积	$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$	125
$+$	直和	$A+B=A\cup B$ 当 $A\cap B=\varnothing$	3
$-$	差	$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\overline{\in}B\}$	5
$\triangle$	对称差	$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$	172
$:=$	定义符	“赋值为”或“定义为”	5
$\forall$	全称量词	“对所有的”	2
$\exists$	存在量词	“存在着”	3
$\sim$	对等	$A\sim B$ 表示集 A 与 B 等势	8
$\prec$	序关系	表示“前于”或“不后于”	40
$P(A)$	幂集	$P(A)=\{E\mid E\subset A\}$	19
$\overline{E}$	上限集	$\overline{E}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k$	5
$\underline{E}$	下限集	$\underline{E}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}E_k$	5
$\xrightarrow{a.e.}$	概收敛	$f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 表示$\{f_n\}$几乎处处收敛于 f	88
$\xrightarrow{mes}$	测度收敛	$f_n\xrightarrow{mes}f$ 表示$\{f_n\}$测度收敛于 f	88
$R=(X,\rho)$	环	表示环或 σ 环（见第六章§1）	171
$A=(X,\alpha)$	σ 代数	表示 σ 代数或可测空间	174
▌	结束符	表示“证毕”，或“本段结束”.	

目　录

第一章　集

本章主要讨论：集及其运算，可数集、连续势、势的比较、罗素悖论和集论公理等.

§1　集及其运算

1.　集的概念

集（*Set*）　又称**集合**，它是数学中最重要的基本概念之一，是一种不能用更"基本"的概念来定义的基本概念，正像几何学中的点、直线一样，但对具体的集却可给予精确的描述。例如

$N=\{n\}, n=1,2,\cdots,$　表示自然数全体所成的集.

$E=[0,1]$　表示满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的实数 x 全体所成之集.

$F=\{f(x)|a\leqslant x\leqslant b\}$　表示$[a,b]$上实函数 $f(x)$ 全体所成之集.

元素（*Element*）　组成集 A 的成员 a，称为 A 的元素. 有时简称为元.

元素 a 与集 A 的关系是用"**属于**"（*belong　to*）来表示的. 任何元素或者属于集 A，或者不属于集 A，二者必居其一且仅居其一.

若元素 a 属于集 A，就简记为

$$a\in A.\qquad \text{“}\in\text{”读作“属于”}.$$

若 a 不是集 A 的元素，则记为

$$a \overline{\in} A. \qquad \text{“}\overline{\in}\text{”读作“不属于”.}$$

我们将看到，元素、属于、集合这些基本构件可以构筑起集论的“大厦”.

空集（*Empty*） 不含任何元素的集，称为空集，记为$\varnothing$.

仅含一个元素的集，叫做单元素集，常记为 $A=\{a\}$，其中 a 为 A 的唯一元素. 若集 B 含有多个元素 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，则可记为

$$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\} \qquad \text{或}\{b_k \mid k=1,2,\cdots,n\}.$$

这里花括弧{ }表示集合（即集），而竖线“|”左边表示该集的代表元素，竖线右边表示其特征属性. 一般多采用这种方式表示集合：

$$A=\{a \mid a\ \text{具有某种确定性质}\}$$

比如：$N=\{n \mid n=1,2,\cdots\}$， $[0,1]=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$K=\{k \mid k$ 为素数$\}$，$T=\{t \mid t$ 是实数，但不是任何整系数多项式的根（零点）$\}$ 等.

从元素与集合的属于关系可以派生出许多其他概念、关系和运算.

包含（*Inclusion*） 若集 A 的任一元 a 都是集 B 的元，就称集 A 包含于集 B 中（或称 B 包含 A）. 记为

$$A\subset B \qquad (\text{或 } B\supset A).$$

子集（*Subset*） 若 $A\subset B$，就称 A 为 B 的子集. 若 $A\subset B$，且存在 $b\in B$ 使 $b\overline{\in} A$，则称 A 为 B 的真子集.

相等（*Equal*） 若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，就称二集 A、B 相等，记为 $A=B$.

2. 集的运算

介绍两个以后常用的记号：“$\forall$ ”与“$\exists$ ”.

$\forall$ 为**全称量词**，表示“对所有的”（*for all*）或“对任意的”（*for arbitrary*），取其第一个字母 A 旋转 180°而得.

$\exists$ 为**存在量词**，表示“存在”（*exist*），取其第一个字母 E 旋

转 180°而得.

并(*Union*) 两集 A、B 元素的全体(相同元算作一个)所成的集,称为 A、B 两集的**并集**. 记为 $A\cup B$. 有时用 $A+B$ 表示当 A 与 B 无公共元素时的并集 $A\cup B$.

并的运算可以多次进行,如集组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

由逐次取"并"$(n-1)$次而得到. 显然

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k = \{x\mid \exists\ k,\ 1\leqslant k\leqslant n,\text{使 } x\in A_k\}.$$

对集列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 应当取"并"无穷多次,其并集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\{x\mid \exists\ n,\text{使 } x\in A_n\}$$

一般,对集族$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$,$\Lambda$ 为指标集,则有

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda = \{x\mid\exists\ \lambda\in\Lambda,\text{使 } x\in A_\lambda\}.$$

交(*Intersection*) 两集 A、B 的公共元素全体形成的集,称为 A 与 B 的 **交集**. 记为

$$A\cap B.$$

显然,A 与 B 之交 $A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}$.

集组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 可经求交$(n-1)$次而得.

集列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的无穷交

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$$

应是逐次求交无穷次而得. 但也可用另一种方式表示出来

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid\forall\ n,x\in A_n\}.$$

一般对$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$, Λ 为指标集,则有

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid\forall\ \lambda\in\Lambda,\ x\in A_\lambda\}.$$

集 A 与 B 的并 $A\cup B$,交 $A\cap B$ 有下列关系:

$$A\cap B\subset A\subset A\cup B,\quad A\cap B\subset B\subset A\cup B.$$

此由定义显然可见.

定理 1(三定律)

Ⅰ 交换律(*Commutative law*)

$$A\cup B=B\cup A,\qquad A\cap B=B\cap A.$$

Ⅱ 结合律(*Associative law*)

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\qquad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

Ⅲ 分配律(*Distributive law*)

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

证 取各定律第一式证之,第二式类似.

对Ⅰ,两端的元素皆为:"$x\in A$ 或 $x\in B$".

对Ⅱ,两端的元素皆为:"$x\in A$ 或 $x\in B$ 或 $x\in C$".

对Ⅲ,左右两端元素皆为:"$x\in A$ 且同时 $x\in B$ 或 $x\in C$".

补集(*Complement set*) 设 $A\subset S$,则称 S 中不属于 A 的元素组成的集为 A 关于 S 的**补集**,记为

$$\mathscr{C}_S A\quad 或简记为\quad \mathscr{C}A$$

特别是取 S 为 *Euclid* 空间 R^n,则集 $A\subset R^n$ 的补集为 $\mathscr{C}A=R^n-A$,而有:

$$A\cup\mathscr{C}A=E^n$$

$$A\cap\mathscr{C}A=\varnothing$$

棣·摩根(De Morgan)**定理**:

$$\mathscr{C}(A\cup B)=\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B$$

$$\mathscr{C}(A\cap B)=\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}B$$

证: 第一式:两端元素皆满足:"x 既不属于 A,亦不属于 B".

第二式:两端元素皆满足:"x 或不属于 A,或不属于 B".

所证定理称为**摩根律**,或**对偶律**(*duality law*).可表述为

"并之补"="补之交", "交之补"="补之并".

差集（*Difference set*） 设 A 与 B 为任意两集. 称属于 A 而不属于 B 的元素全体所成之集为 A 与 B 的**差集**. 记为 $A-B$ 或 $A\backslash B$.

差集可用补集表示.

$$A-B=A-A\cap B=A\cap \mathscr{C}B.$$

集 A 与 B 的并、交、差、以及补集都可用文氏图形象地表示出来. 见图 1—1 中各分图的阴影部分所示.

集的运算性质，除“三定律”与摩根律外，尚有其它诸律，见习题一之 2、3.

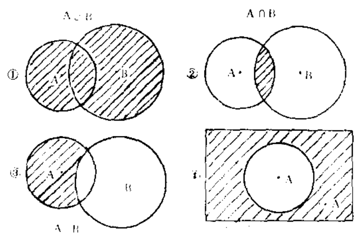


图 1—1 集运算的文氏（*Venn*）图

3. 上限集与下限集

定义 设 $\{A_n\}$ 为任意集列，

凡属于无穷多个 A_n 的元素全体所成之集，称为 $\{A_n\}$ 的 **上限集**（*superior limit of a sequence of sets*）. 记为

$$\widetilde{A}=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n, := \{x \mid \exists\ \{n_k\} \text{使 } x\in A_{n_k} \quad k=1,2,\cdots\}$$

凡除开有限个 A_n 外，而属于一切 A_n 的元素全体所成之集，称为 $\{A_n\}$ 的**下限集**（*inferior limit of a sequence of sets*）. 记为

$$\underset{\sim}{A}=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n. := \{x \mid \exists\ n_0, \text{当 } n\geqslant n_0 \text{ 时}, x\in A_n\}$$

此处 $\widetilde{A}$ 与 $\underset{\sim}{A}$ 表示式中的记号“$:=$”表示“定义为”.

定理 2 $\{A_n\}_1^\infty$ 为任意集列，则有

$$\widetilde{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,$$

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

证 对前一式：$\forall\ x\in\widetilde{A}$；则 $x\in A_k$，对无穷个 k 成立；得 $x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，$\forall\ n$；即 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$；$\therefore\widetilde{A}\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

以上论证过程可以逆向推理，得 $\widetilde{A}\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

因此，$\widetilde{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

后一式类似推证：$\forall\ x\in\underset{\sim}{A}$；$\exists\ n_0$，使 $k\geqslant n_0$，有 $x\in A_k$；得 $x\in\bigcap_{k\geqslant n_0}A_k$；因此 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$；于是 $\underset{\sim}{A}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$. 此推理可逆向进行，而有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\subset\underset{\sim}{A}$. 得出

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k. \qquad \blacksquare$$

系 集列$\{A_k\}_1^{\infty}$的上限集 $\widetilde{A}$ 包含其下限集 $\underset{\sim}{A}$.

即 $$\underset{\sim}{A}\subset\widetilde{A}.$$

这是因为"除有限个外属于全部 A_k"的元素必然"属于无穷个 A_k". 就是说：$\underset{\sim}{A}$的元必在 $\widetilde{A}$ 内.

极限集 当 $\underset{\sim}{A}=\widetilde{A}$ 时，称集列$\{A_n\}$收敛(*converge*)于其极限集 $A=\underset{\sim}{A}=\widetilde{A}$. 记为

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n.$$

例 1. 渐伸集列：$\{A_n|A_n\subset A_{n+1},\quad\forall\ n\in N\}$. 与渐缩集列：$\{B_n|\forall\ n\in N,B_n\supset B_{n+1}\}$都是收敛的.

证 先证 $\widetilde{A}=\underset{\sim}{A}$，

由于$\{A_n\}$为渐伸列，得 $\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ $\forall\ n\in N$ 成立. 因此，$\widetilde{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$.

又由 $\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=A_n$ $\quad(\because A_n\subset A_{n+1}\subset A_{n+2}\subset\cdots)$，得 $\underset{\sim}{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\widetilde{A}$. 得

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\widetilde{A}=\lim_{n\to\infty}A_n.$$

其次,对渐缩列$\{B_k\}$,$\because B_n\supset B_{n+1}$,$\forall\ n$,有$\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}B_k=B_n$,$n=1$,$2,\cdots$,得$\widetilde{B}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}B_k=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. 又从$\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}B_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}B_k$ $\forall\ n\in N$成立.得

$$\underset{\sim}{B}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}B_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k=\widetilde{B}.$$

例 2. 设 $A_n=\begin{cases}(0,1+\dfrac{1}{n}), & n\text{ 为奇数},\\ (-\dfrac{1}{n},1), & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

则有

$$\widetilde{A}=[0,1],\qquad \underset{\sim}{A}=(0,1).$$

事实上,$[0,1]$中每一点都在无穷多个A_n中,$0\in(-\frac{1}{2k},1)=A_{2k}$,$1\in(0,1+\frac{1}{2k+1})=A_{2k+1}$: 而$[0,1]$外的任一点都不属于无穷多个$A_n$,故得$\widetilde{A}=[0,1]$.

另一方面,$\forall\ n\in N$有$(0,1)\subset A_n$成立,得$(0,1)\subset\underset{\sim}{A}$. 而从$A_n$表示式可见,对$x\leqslant 0$或$x\geqslant 1$的任何点$x$,不可能从某个序号以后属于所有的$A_n$,因而不在$\underset{\sim}{A}$内. 得出$\underset{\sim}{A}=(0,1)$.

§2 可数集

对有限集 $A_n=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $B_m=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$. 要比较$A_n$与$B_m$哪个集的元素个数多. 通常的办法是数一数它们各自有多少元素,"数"的结果得到A_n有n个元素,B_m有m个元素. 若$n<m$,自然得出B_m的元素比A_n的多了.

除此以外,还有另外一种十分有效的方法可以比较A_n与A_m的元素的多少. 这就是:对于A_n中 元素a_1,取B_m的元素b_1与之