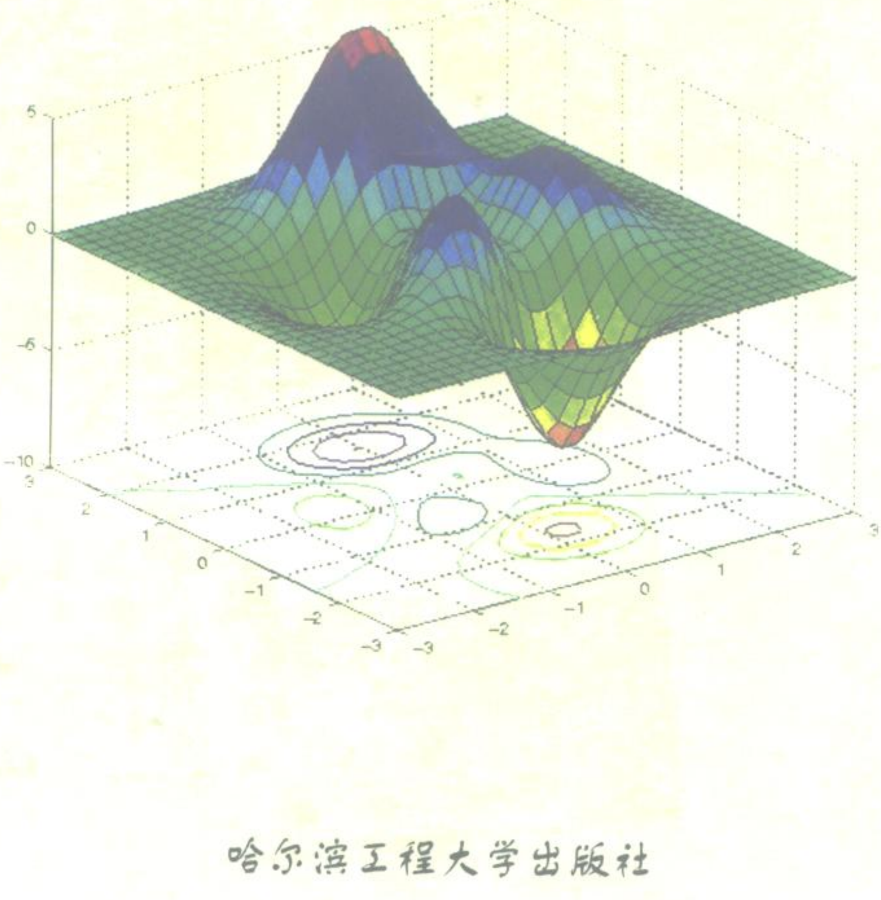
高等学校数学改革试点教材

大学数学实验

主　编　何文章　桂占吉　贾　敬
副主编　宋作忠　刘照升
主　审　蔡吉花



哈尔滨工程大学出版社

高等学校数学改革试点教材

大学数学实验

主　编　何文章　桂占吉　贾　敬
副主编　宋作忠　刘照升
主　审　蔡吉花

哈尔滨工程大学出版社

内 容 提 要

大学数学实验是以数值计算、数据处理和数学建模为主体的数学中的一门新课，它做为工科院校的必修课已纳入教学计划，目的是为了加强对学生应用数学能力的培养。

本书包括工科数学中的主要内容，共分五章，即微积分实验、数值代数与数值分析实验、数理统计实验、最优化计算方法实验及数学建模实验。在每个实验中均阐述了实验的目的、原理与方法以及内容与步骤，并且附有练习题。

本书的主要特色是把数学与计算机相结合，数学与实际问题相结合，数学与教学内容、教学方法及教学手段改革相结合，力求符合数学素质教育的要求。本书可作为各类高等学校本、专科开设数学实验课的教材，也可作为各行业工程技术人员学习科学计算软件的参考书。

大学数学实验

DA XUE SHU XUE SHI YAN

主　　编　何文章　桂占吉　贾　敬

副 主 编　宋作忠　刘照升

主　　审　蔡吉花

责任编辑　国廷生

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

东 北 林 业 大 学 印 刷 厂 印 刷

*

开本　787×1092　1/16　印张 10　字数 244 千字

1999 年 1 月第 1 版　1999 年 1 月第 1 次印刷

印数：1～2500 册

ISBN　7-81007-896-8

O · 65　定价：15.00 元

前　　言

1995 年 5 月，高等学校工科数学课程教学指导委员会提出了《关于工科数学系列课程教学改革的建议》，1997 年 5 月又进一步提出了《关于一般院校工科数学课程建设与改革的几点意见》，这些建议和意见指明了面向 21 世纪工科数学教学内容和课程体系的改革重点应放在数学思想和方法的教育和启发上，放在加强应用和实践上，而不是放在大量地训练运算和解题技巧上。大量的数值计算、符号运算问题可以用已有的计算机软件或在软件上编程来实现。

为了培养学生使用软件包和科学计算的能力，《建议》中指出"应当逐步创造条件，开设数学实验课程。"开设大学数学实验课的目的是加强学生创新能力、科学计算能力以及工程实践能力的培养，增加教学内容，加大课堂信息量，提高课堂教学效率。

清华大学肖树铁教授指出："工科的基础课中大部分都有实验，只有数学课没有实验，只有习题课。习题课当然很重要，但它不能解决跟计算机很好结合的问题，因此建议创造条件，逐步在一年级或二年级开设数学实验课，加强运用计算机进行运算和数据处理的训练"。中科院院士、北京大学姜伯驹教授对建立数学实验课十分重视，他认为"应该试验组织数学实验课程，在教师的指导下，探索某些理论的或应用的课题。学生的新鲜想法借助数学软件可以迅速实现，在失败与成功中得到真知。这种方式变被动的灌输为主动的参与，有利于培养学生的独立工作能力和创新精神"。中科院院士数学家王元教授也强调："计算机和软件使用对培养工科学生学习能力和研究能力十分重要"。

工科数学的教学改革核心是提高学生的数学素质，培养学生的创新精神和创新能力。"创新是一个民族的灵魂"。对工科数学而言，就是培养学生用数学知识创造性地解决实际问题，而在解决实际问题的过程中，经常涉及到数值分析、矩阵运算、数据处理、统计分析、图形绘制、图象处理、优化设计、模型求解等方面的大量科学计算问题，利用 FORTRAN 或 C 语言等计算机语言进行编程计算，不仅需要对所使用的算法有深刻的理解，还需要熟悉掌握所用语言的语句和编程技巧，例如：对优化问题，首先要选择一个较好的优化算法，然后用 FORTRAN 或 C 语言进行编程、调试来逐步地实现此算法。既使编程者对计算机语言和算法非常熟悉，在几天甚至几周内调试通过也是很困难的。近年来，随着计算机软件的不断发展，现在已推出了很多大型的科学计算软件，如：MATHEMATICA、MATLAB 等。这些软件在国外大学已成为大学生、硕士生、博士生必修的课程。

按照课委会和专家们的建议和指导，我们把"大学生数学实验课的实践与探索"作为面向 21 世纪数学教学改革的课题之一。为此在数学教学改革试点班，数学建模集训班上

零散地开设过数学实验，本教材这次正式出版又作了大量的修改，特别是把 DOS 平台推广到 WINDOWS 平台，所使用的数学软件由原来的 MATHEMATICA 1.0改为现在的 MATHEMATICA 2.2，由原来的 MATLAB 2.0改为现在的 MATLAB 5.1，并且充分开发了 MATLAB 语言工具箱的强大功能。

本书作为工科院校本、专科数学改革教材，可作为单独开设数学实验课的教材，也可作为目前开设的高等数学、线性代数、数值分析、最优化计算方法、数学建模等课程的配套辅助教材。建议教师在课堂上针对每部分内容重点讲授实验中原理、方法和步骤，具体实验内容由学生课外时间进行，若有条件建议教师在教学过程中适当配以计算机的演示。

本书由何文章、桂占吉、贾敬任主编，宋作忠、刘照升任副主编，全书由蔡吉花主审。

在本书的编写过程中，参阅了许多文献和一些介绍 Mathematica 和 MATLAB 的资料，对这些文献和资料的作者以及给予本书关心和支持的有关领导、专家和同行一并表示衷心的感谢。

由于数学实验是一门新课，又没有太合适的参考书可以借鉴，编者水平又很有限，再加上时间紧迫，不妥之处，希望各位同行及读者批评指正，不胜感谢。

编者

1998.12

目　录

1　微积分实验

1.1　函数作图与极限

1.1.1　实验目的

①学习在 Windows 下 Mathematica 软件的启动和退出及其绘图语句和选项。

②从图形上体会函数的表达方式与图形特点间的联系。

③理解与掌握数列极限与函数极限间的关系。

1.1.2　原理与方法

(1)　函数的几种表示形式

①显函数　函数 $y=f(x)$ 表示两个变量 y 与 x 之间的对应关系，这种对应关系可以用各种不同方式表达，如果等号左端是因变量的符号，而右端是含有自变量的式子，当自变量取定义域内的任一值时，由这个式子能确定对应的函数值，用这种方式表达的函数叫做显函数。例如，$y=\sin x$；$y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$ 等都是显函数。

②隐函数　如果一个函数的两个变量 x 与 y 之间的对应关系是以一个方程的形式给出的，这样的函数称为隐函数。例如，方程 $x+y^3-1=0$ 表示一个函数，因为当变量 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内取值时，变量 y 有确定的值与之对应。

③由参数方程所确定的函数　一般地，若参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

确定 y 与 x 之间的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数。

(2)　平面曲线的参数方程与极坐标方程的转化

若已知一平面曲线的极坐标方程为 $r=f(\theta)$ 则其参数方程为

$$\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)。$$

(3)　极限

①数列极限的概念　设 $\{a_n\}$ 是一个数列，a 是一个确定的数，若对任给正数 ε，总存在某一自然数 N，使得 $n>N$ 时，都有 $|a_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，a 称为它的极限，并记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

②函数极限的概念　如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等

式，$0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么，常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

③函数极限与数列极限的关系　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域，$0<|x-x_0|<\delta$ 内有定义，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在的充要条件是，对任何以 x_0 为极限，且含于 $0<|x-x_0|<\delta$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

1.1.3　内容与步骤

(1)　Mathematica 的进入与退出

启动计算机，屏幕上显示 Windows 界面，单击开始进入主菜单中，将鼠标移向程序找到包含 Mathematica 的程序组，单击就进入了该系统，此时系统已进入交互状态，在等待用户输入命令。

例如，输入 2+3 后，按Insert键，屏幕上就会显示出

In[1]:=2+3

Out[1]:=5。

(2)　利用 Mathematica 作图

我们可以利用 Mathematica 系统里的绘图语句(Plot)画出函数的图形，利用条件语句画出分段函数的图形。

①观察函数图形叠加情况

输入指令

```
Plot[Log[u],{u,0,10}]
Plot[Sqrt[z],{z,0,10}]
Plot[1+x^2,{x,-10,10}]
Plot[Log[Sqrt[1+x^2]],{x,-10,10}]
```

上述四条语句分别表示要作出函数 $y=\text{Log}u$；$u=\sqrt{z}$；$z=1+x^2$ 以及 $y=\text{Log}\sqrt{1+x^2}$ 的图形。

执行，可在屏幕上显示出四个图形。分别表示 $y=\text{Log}u$；$u=\sqrt{z}$；$z=1+x^2$ 以及它们复合而成的函数图形，由此我们可以看到，对于任给一个很复杂的函数，Mathematica 都可很方便地画出其图形来。

②画参数曲线的图形

指令形式为　ParametricPlot[{x(t),y(t)},{t,x_0,x_1}]

输入指令

```
ParametricPlot[{2Cos[t]^3,2Sin[t]^3},{t,0,2Pi}]
ParametricPlot[{2(t-Sin[t]),2(1-Cos[t])},{t,0,4Pi}]
```

上述两语句分别表示要画出星形线 $\begin{cases}x=2\cos^3t\\y=2\sin^3t\end{cases}$ 如图 1-1；摆线 $\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\y=2(1-\cos t)\end{cases}$ 的图形。

执行可得到其图形，观察图形的特点。

③画极坐标图形

在上面的两种指令形式以及今后所用到的作图指令中都可以设定可选项，如颜色(RGBColor)、样点(PlotPoints)、范围(PlotRange)、光线(Lighting)等，但值得注意的是如果计算机的分辨率不够，此时如设定预选项有时不能执行，这时可去掉颜色等选项，则可以继续执行。

输入以下指令

```
r[t _]:=2Sin[2t]
ParametricPlot [{r[t]Cos[t],r[t]Sin[t]},{t,0,2Pi},
              PlotStyle->{RGBColor[0,1,0]}]
```

(PlotStyle 代表格式，RGBColor 代表颜色)

执行，可得到四叶玫瑰线 $r=2\sin 2t$ 的图形，如图 1-2。

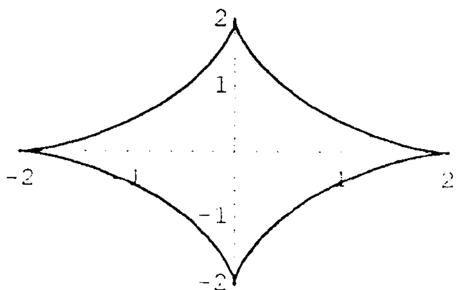


图 1-1

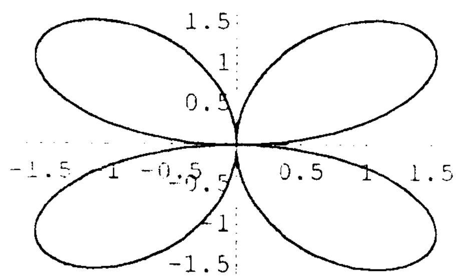


图 1-2

④画分段函数图形

利用条件语句可以画出分段函数的图形

输入以下语句

```
f[x _]:=x^2*Sin[1/x]/;x<0;f[x _]:=x^2/;x>=0
Plot[f[x],{x,-5,5}]
```

执行，可得分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x<0; \\ x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

的图形。

(3) 利用 Mathematica 中的语句 Limit[ ]求极限

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$。

解 首先画出数列的散点图，观察数列的趋向，然后求出极限，输入以下语句

```
fnt=Table[Sqrt[n+2]-2*Sqrt[n+1]+Sqrt[n],{n,100}]//N
ListPlot[fnt,PlotStyle->{RGBColor[1,0,1],PointSize[0.03]}]
Limit[Sqrt[n+2]-2*Sqrt[n+1]+Sqrt[n],n->Infinity]
```

执行，可得数列的散点图和极限为 0。

例 2 求$\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$。

解 输入语句

Limit[(E^ x－E^ (－x)－2x)/(x－Sin[x]),x－>0]

执行可得所求极限为 2。

1.1.4 注意事项

①利用 Mathematica 系统作图时，每个语句及其中的函数的第一个字符必须大写。

②如果函数的图形在某一点处回转的次数特别多时图中有点模糊，这是由于在回转多的地方尽量取多的样点，但样点不会无穷多而造成的，例如，Plot[Sin[1/x],{x,－1,1}]就如此。

③利用 Limit[ ]语句求极限时，必须指明趋向方向，否则对于某些极限求不出正确结果。

④在无穷振荡点处虽然函数极限不存在，但 Limit[ ]语句仍能够求出函数无穷振荡时的可能取值范围，例如，Limit[Cos[1/x^ 2],x－>0]就如此。

练 习 题

1. 用 Mathematica 语句画出下列函数的图形

(1) $\begin{cases}x=2(t+\sin t)\\ y=2(\cos t-1)\end{cases}$，$[0,2\pi]$；　(2) $r^2=9^2\cos 2\theta$，$[0,2\pi]$；

(3) $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$，$[-20,20]$；　(4) $f(x)=|2x^3-9x^2+12x|$，$[-\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{2}]$。

2. 画出数列 $F_0=1,F_1=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$的散点图，列出前 40 项数列的值，并求极限。

3. 利用 Limit[ ]语句求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^{x+2}\cdot(x+3)^{x+3}}{(x+5)^{2x+5}}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$。

1.2 导数及其应用

1.2.1 实验目的

①学习并掌握 Mathematica 的求导和微分命令。

②利用图形来研究中值定理。

1.2.2 原理与方法

①导数的概念　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处

取得增量 Δx 时，相应地函数 y 取得增量 Δy，如果 $\Delta y/\Delta x$ 当 $\Delta x \to 0$ 时的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数，记作 $y'|_{x=x_0}$ 即

$$y'|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}。$$

②微分的概念　设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可以表示为：$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，而 $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x。$$

③罗尔定理　如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足：(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；(2) $f(x)$ 在 (a,b) 上可导；(3) $f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$ 使 $f'(\xi)=0$。

④拉格朗日中值定理　如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足：(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；(2) $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，则在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$ 使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立。

1.2.3　内容与步骤

①利用 D[f,x]语句求函数的一阶导函数

例 1　求函数 $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$ 的一阶导数。

解　命令为

```
D[Sqrt[x * Sin[x] * Sqrt[1-E ^ x]],x]
```

执行，可得结果。

例 2　求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处的导数值。

解　先求导数

```
diff[x _]=D[(3-x)^ 4 * Sqrt[x+2]/(x+1)^ 5,x]
```

此时已定义了一个自定义函数 diff(x)为导函数，可用下面的方式得到导数值。

```
diff[1/2]
```

执行可得结果为　$\dfrac{-8875\sqrt{10}}{729}$。

②利用 D[f[x],{x,n}]语句求函数的 n 阶导数

例 3　求函数 $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{1-x}}$ 的二阶导数。

解　命令为

```
D[(Sqrt[1+x]-Sqrt[1-x])/(Sqrt[2+x]+Sqrt[1-x]),{x,2}]
```

执行，可得二阶导函数。

当求导得到的结果较复杂时，可用简化函数 Simplify[ ]来进行简化，以便得到一个

较为简单的结果。

例 4 求函数 $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 的二阶导数在 $x=\frac{1}{3}$ 处的值。

解 先求导数

```
diff2[x _]=D[ArcSin[Sqrt[(1-x)/(1+x)]],{x,2}]
Simplify[diff2[x]]
diff2[1/3]
```

执行可得结果为 $\frac{27}{16}$。

③利用 Dt 命令来求函数的微分

例 5 求函数 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的微分，并求 $dy|_{x=5}$ 的值。

解 可用命令

```
Dt[Sqrt[(x-1)*(x-2)/(x-3)*(x-4)]]
```

可求得 dy，要求 $dy|_{x=5}$ 则需用微分定义，即 $dy=f'(x)dx$，先求导数，再写出微分，即

```
(D[Sqrt[(x-1)*(x-2)/(x-3)*(x-4)]/.x->5])D[x]
```

④求隐函数的导数

利用上述命令 D 与 Dt 不仅可以求显函数的导数和微分，还可以用其求隐函数的导数和微分。

自定义求由方程 $F(x,y)=0$ 所确定隐函数的导函数

```
ImplyD[f _,x _,y _]:=Solve[D[f,x]==0,y'[x]]
```

值得注意的是 f 表达式中的 y 应写成 y[x]，否则会出现错误的结果。

例 6 求由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定隐函数 y 的导数 y'。

解 用上述自定义函数，则有

```
ImplyD[E^ y[x]+x*y[x]-E,x,y]
```

执行可得结果{{y'[x]->-($\frac{\text{y[x]}}{\text{x+E^ y[x]}}$)}}

例 7 求由方程 $x^2+cy^2=0$（c 为常数）所确定隐函数导数 y'_x。

解 可用命令

```
ImplyD[f _,x _,y _]:=Solve[D[f,x]==0,y'[x]]
ImplyD[x^ 2+c*y[x]^ 2,x,y]
```

执行可得结果 {{y'[x]->-($\frac{\text{x}}{\text{cy[x]}}$)}}。

⑤求由参数方程所确定函数的导数

直接利用参数方程所确定函数的求导公式：$y'_x=dy/dt/dx/dt$

自定义函数 ParametricD[y _,x _,t _]:=D[y,t]/D[x,t]

例 8 求由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{3t}{1+t^2}, \\ y=\frac{4t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 所确定函数的导数。

解 命令为

```
ParametricD[y _,x _,t _]:=D[y,t]/D[x,t]
```

ParametricD[4 * t^ 2/(1+t^ 2),3 * t/(1+t^ 2),t]

执行，可得结果。

⑥验证罗尔定理

利用 Mathematica 首先作出一个函数的图形，观察其特点，然后求方程 $f'(x)=0$ 的根（近似值）。

例 9 验证罗尔定理对函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 在区间[-1,1]上的正确性。

解 可用如下语句

f[x_]:=x^ 3-x^ 2-x+1;

Plot[f[x],{x,-2,4}]

执行，可得函数图形，可以看到在[-1,1]上函数恰好满足罗尔定理的三个条件，寻找 ξ 值，即求 $f'(x)=0$ 在(-1,1)上的根。

可用命令

f1=D[f[x],x]

Slove[f1==0,x]//N

执行可得结果{{x->-0.33333}}。

⑦拉格朗日定理及其应用

例 10 对于定义在区间[0,1]上的函数 $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$，求一点 ξ，使 $f(x)$ 在 ξ 处的切线平行于经过点(0,-2)，(1,-2)的直线。

解 首先作出函数 $f(x)$ 的图形

输入以下语句

f[x_]:=4 * x^ 3-5 * x^ 2+x-2;

Plot[f[x],{x,0,1}]

执行，可得函数图形，从图上我们可以看到函数满足拉格朗日定理条件。

输入命令

f1=D[f[x],x]

Solve[f1==(f[1]-f[0])/(1-0),x]//N

执行可得结果{{x->0.116204},{x->0.717129}}。

1.2.4 注意事项

①当函数的表达式中含有参数时，若求微分，应首先将参数设置为常数，才能求出正确结果，方法为 SetAttributes[t,Constant]；即设置 t 为常数。

②如果在一个程序中对于前面自定函数 f[x_]，已不再需要时，应用指令 Clear[f]给予清除。

练 习 题

1. 求下列函数的一阶和二阶导数

(1) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$；　　(2) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}$；

(3) $\begin{cases} x=\dfrac{4t+1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\dfrac{2t^2}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$　　(4) $y=\dfrac{2x^3+\sqrt{x}+4\sin x}{\sqrt{x+4}}$。

2. 求由下列方程所确定的隐函数导数

(1) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;　　(2) $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$。

3. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$上的正确性。

4. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=x^3+6x^2-15x-20$ 在$[-2,2]$上的正确性。

1.3 一元函数的极值

1.3.1 实验目的

①掌握利用驻点求一元函数极值。

②正确体会极值与最值的区别。

1.3.2 原理与方法

①极值定义　设函数 $f(x)$在(a,b)内有定义，x_0 是(a,b)内的一个点，如果存在着点 x_0 的一个邻域，对于这个邻域内的任何点 x，除 x_0 外都有 $f(x)<f(x_0)$成立，就称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个极大值；如果在这个邻域内的任何点 x，除 x_0 外都有 $f(x)>f(x_0)$成立，则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个极小值。

②极值的必要条件　设函数 $f(x)$在点 x_0 处具有导数，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$。

③极值的充分条件　设函数 $f(x)$在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么，当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$在 x_0 处取得极大值；当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$在 x_0 处取得极小值。

1.3.3 内容与步骤

①直接利用语句 FindMinimum[ ]　求函数的局部极小值

FindMinimum[f,{x,x_0}]　求 $f(x)$在 x_0 附近的最小值。

FindMinimum[f,{x,{x_0,x_1}}]　求 $f(x)$在区间$[x_0,x_1]$附近的最小值。

例如，输入语句

```
FindMinimum[x^3-x^2-x+1,{x,1}]
```

执行，可得函数 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 在 $x=1$ 附近的最小值为 0。

如果我们输入语句

```
FindMinimum[2*x^3+3*x^2-12*x+14,{x,-1,4}]
```

执行，可求得函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 在 $x=1$ 处的极小值为 7。

②用驻点法求一元函数的极值

求导数　D[f[x],x],结合求根语句 Solve[f'[x]==0,x]或 NSolve[ ],FindRoot[ ]等,可用求驻点的方法,求一元函数的极值。

例 1　求函数 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 的极值。

解　自定义函数

```
Clear[f];
f[x_]=x^3-6*x^2+11*x-6;
```

求导数

```
diff=D[f[x],x]
```

求 $f'(x)=0$ 的根

```
Solve[diff==0,x]
```

执行可得结果　$\{x->\frac{12-2\sqrt{3}}{6}\},\{x->\frac{12+2\sqrt{3}}{6}\}$。

利用二阶导数判别是极大值点,还是极小值点。

首先求二阶导数,并将二阶导数定义为 diff2[x]

```
diff2[x_]:=D[f[x],{x,2}];
```

diff2[$(12-2\sqrt{3})/6$]$=-2\sqrt{3}$

diff2[$(12+2\sqrt{3})/6$]$=2\sqrt{3}$

由二阶导函数在驻点处的值可判别函数 $f(x)$ 在 $\frac{12-2\sqrt{3}}{6}$ 处取得极大值,在 $\frac{12+2\sqrt{3}}{6}$ 处取得极小值,如图 1-3。

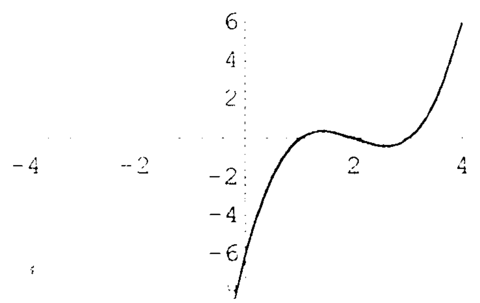


图 1-3

计算极植

$f[\frac{12-2\sqrt{3}}{6}]$

$f[\frac{12+2\sqrt{3}}{6}]$

可得极大值与极小值分别为　$\frac{2}{3Sqrt[3]}$;$\frac{-2}{3Sqrt[3]}$。

1.3.4　注意事项

①利用 FindMinimum[ ]求得极值,可能是局部极小值,也可能是全局最小值。

②利用 FindMinimum[f{x,{x_0,x_1}}]　求函数在区间[x_0,x_1]附近的最小值时,区间[x_0,x_1]不能过大,否则无法求出。

练　习　题

1. 求下列函数在给定点附近的极小值

(1)　$y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$,$x_0=-3$;　　(2)　$y=x^3-3x^2-9x-5$,$x_0=2$。

2. 用求驻点的方法求下列函数的极值

(1)　$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$;　　(2)　$f(x)=2e^x+e^{-x}$;

(3) $f(x)=x^4-(x-1)^{\frac{2}{3}}$; (4) $f(x)=3x^4-4x^3+1$。

1.4 不定积分与定积分的计算

1.4.1 实验目的

①了解原函数与被积函数的关系。

②加深对积分定义的理解。

③验证牛顿-莱布尼兹公式。

1.4.2 原理与方法

(1) 原函数与不定积分

①原函数 如果在区间 I 内,可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$,那么 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 内的原函数。

②不定积分 在区间 I 内,$f(x)$ 的带有任意项的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 内的不定积分,记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$。

(2) 定积分的概念与微分基本定理

定积分的概念请参看《高等数学》相应的章节。

微积分学基本定理 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,而且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则有牛顿-莱布尼兹公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。

1.4.3 内容与步骤

①利用 Mathematica 中的 Integrate[f,x]求函数 $f(x)$ 的不定积分

例 1 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}}$。

解 输入语句

```
a=1/(x*Sqrt[4*x^2+9])
Integrate[a,x]
```

执行可得结果 $\frac{1}{3}\ln\frac{|x|}{3+\sqrt{4x^2+9}}$。

例 2 求 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$。

解 输入语句

```
b=Sin[x]^4
Integrate[b,x]
```

执行可得结果 $\frac{12x-8\sin 2x+\sin 4x}{32}$。

②利用 Mathematica 中的 Integrate[f,{x,a,b}]求函数 $f(x)$ 的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

例 3　求 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$。

解　输入语句

```
a=(x+2)/Sqrt[2x+1]
Integrate[a,{x,0,4}]
```

执行可得结果 $\frac{22}{3}$。

③利用 NIntegrate[f,{x,a,b}],求函数 $f(x)$在$[a,b]$上的数值积分

例 4　求 $\int_0^1 x\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x$。

解　输入语句

```
NIntegrate[x * ArcTan[x],{x,0,1}]
```

执行可得结果 0.285398。

④验证牛顿-莱布尼兹公式

例 5　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x\mathrm{d}x$。

解　输入语句

```
NIntegrate[Cos[x]^ 5 * Sin[x],{x,0,Pi/2}]
S[x_]=Integrate[Cos[x]^ 5 * Sin[x],x]
S[π/2]-S[0]
```

执行可得结果 0.166667;$\frac{1}{6}$。

⑤定积分应用

例 6　求星形线 $x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t$ 所围区域的面积。

解　首先作出星形线的图形,观察图形的特点

```
ParametricPlot[{2 * Cos[t]^ 3,2 * Sin[t]^ 3},{t,0,2 * Pi}]
```

然后利用公式 $S=\frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ 求图形的面积

```
x[t_]=2 * Cos[t]^ 3
y[t_]=2 * Sin[t]^ 3
z[t_]=x[t] * D[y[t],t]-y[t] * D[x[t],t]
s=(1/2) * Integrate[z[t],{t,0,2 * Pi}]
```

执行可得结果 $\frac{3\pi}{2}$。

例 7　求由摆线 $x=3(t-\sin t), y=3(1-\cos t)$的一拱,$y=0$ 所围成图形,绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积。

解　首先画出摆线的图形,观察其特点

```
ParametricPlot[{3 * (t-Sin[t]),3 * (1-Cos[t])},{t,0,2 * Pi}]
```

然后利用公式 $V=\int_{2\pi}^{\pi}\pi x_2^2(y)\mathrm{d}y - \int_0^{\pi}\pi x_1^2(y)\mathrm{d}y$,求出旋转体的体积

输入语句

```
x[t_]=3 * (t-Sin[t])
```