振动分析及应用

·王 彬 主编·

…版社·

前　言

本书汲取了国内外出版的一些振动理论专著及研究生教材的特点，总结了作者近十年研究生振动课的教学实践，对原讲义又一次作了修改和补充后编写而成。

书中全面、系统地叙述了振动分析的基础理论及有关的近似方法、数值计算和在机械系统振动分析中的应用。在线性确定性振动部分，讨论了在时间域和频率域中，单自由度、多自由度系统在各种类型激励作用下，稳态、瞬态响应分析的理论和方法；多自由度系统的特征值问题；振型迭加法以及近似解法；介绍了系统的动态特性及其在时域和频域中的描述和应用。最后阐述了弦、杆、轴、梁的运动微分方程的建立及其固有振动，介绍了连续系统响应分析的振型迭加法和近似解法。在非线性振动部分，定性和定量地讨论了单自由度系统非线性振动的基本概念和方法。在随机振动部分着重介绍了描述随机振动的数字特征及随机响应分析的基本方法。

本书的主要特点是：

1. 在完整地叙述了时间域的响应分析的同时，强调了频率域响应的分析及复频率响应的概念及应用，使时间域与频率域的响应分析有机地结合起来，给读者以分析响应的完整概念。

2. 在全面地叙述基本理论的基础上，介绍了几种常用的多自由度系统响应分析的数值方法，使理论与应用结合起

3. 选编了与各章内容相适应的17个用FORN

的程序，它们不仅可用于教学，也可应用于工程

机辅助计算。

全书理论推导力求简明、易懂，注重物

本书由王彬主编，负责全书内容的组

二、五、七、八、九章及六章部分内容；崔相国编写第一、三、四及六章部分内容；陈宏编写习题和程序，并应用 AUTOCAD 绘制了书中全部插图。由陆佑方对全书作了审校。

本书所以能出版是和校研究生部给予的鼓励和大力支持分不开的，对此表示感谢；对冯冠民、张京军、齐朝晖、邹建奇、王志选等给予的热情帮助，也一并致以谢意。

由于作者水平有限，书中错误、不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

王　彤

于长春 吉林工业大学

1992 年 6 月

引　言

当代工程中各种结构物、机械系统，如航天器、船舶、地面车辆、机械设备以及高层建筑等等，不断向着复杂、高速、高精度方向发展，为保证其良好的性能及可靠的寿命，振动问题已成为必须认真研究和解决的重要课题。由于大型高速电子计算机和先进的测试技术的出现，使分析和解决工程中复杂的振动问题成为可能。

机械振动常常是引起机械结构系统和零部件损坏、失效的直接原因，因而是有害的，需要运用振动的基本理论和分析方法设法限制它、避免它；但振动现象又有其可利用的一面，如振动打桩、振动输送、测量传感器等等，也都需要运用振动理论来设计和创造，以满足工程实际的需要。振动理论在现代许多科技领域占有的地位已愈来愈重要，成为广大工程技术人员必不可少的基础理论知识。

在机械、结构系统中，只要具有惯性(如质量)和恢复力(如弹性力)，就可能产生振动，这样的系统我们称之为振动系统。弹性和质量以及阻尼表征系统的固有属性。外界对系统的作用，如外加力、基础的运动等，称为激励(或输入)，系统在激励的作用下产生的运动，称为系统的响应(或输出)。振动问题就是研究激励、响应和系统动态特性三者的关系，具体有如下三方面的课题：振动分析——已知激励与系统动态特性，求系统的响应；环境预测——已知系统动态特性和响应，确定系统所受的激励；系统识别——已知系统的激励和响应，确定系统的动态特性。

本书主要讨论振动分析，即已知系统的动态特性和各种类型的激励，确定系统的响应并讨论其性质。振动分析的基本理论也是其他两个振动课题的基础。

在本书中涉及到的有关振动类型的一些术语及其含义介绍如

下：

简谐振动：随时间按正弦或余弦函数变化的运动。

周期振动：每经相同的时间间隔，其运动量值重复出现的振动。

稳态振动(稳态响应)：持续的周期性振动。

瞬态振动(瞬态响应)：非稳态，非随机的短暂存在的振动。

自由振动：去掉激励或约束之后所出现的振动。

强迫振动：外部周期性激励所激起的稳态振动。

自激振动：在非线性机械系统内，由非振荡性能量转变为振荡激励所产生的振动。

以上几种振动都可以用确定的时间函数描述，统称为确定性振动。

随机振动：对未来任何一给定时刻，其瞬时值不能予先确定的振动。

依据问题的性质和需要，可将振动系统抽象为不同的模型：

离散系统：由集中参数元件：质量、弹簧和阻尼器所组成，它们是相互分离的，在任意瞬时，需要用有限个广义坐标确定其位置的系统。用常微分方程描述其运动规律。

连续系统：由连续分布参数元件所组成，即阻尼、质量和弹性是连续分布的，在任意瞬时，需要用无限多个广义坐标才能完全确定其位置的系统。用偏微分方程描述其运动规律。

线性系统：可用线性微分方程描述其运动规律的系统。

非线性系统：系统中某个或某几个参数具有非线性性质，只能用非线性微分方程描述其运动规律的系统。

一个振动系统究竟采用哪种简化模型，属于哪一类振动，应该依据问题的性质而定，具体问题要作具体分析。

目　　录

第一章 单自由度系统的自由振动

最简单的单自由度振动系统就是一个弹簧连接一个质量的系统，如图 1.1 所示。若不受外加激励的作用，仅由初始条件(初位置和初速度)引起的振动，或者去掉激励或约束之后所出现的振动，称为自由振动。某些实际的机械或结构系统的振动问题有时简化为单自由度系统的振动。如图 1.2(*a*)的建筑框架，若不计两支柱的质量，仅考虑它的弹性时，可以简化为图 1.2(*b*)所示的单自由度系统；图 1.3(*a*)的汽车，当仅考虑车身(质心)的铅垂方向的振动时，简化为图 1.3(*b*)的单自由度系统；又如图 1.4(*a*)所示的气门摇臂机构系统，若只考虑气门弹簧的弹性，不计摇臂、气门及挺杆的质量及弹性，则可简化图 1.4(*b*)所示的单自由度系统。本章讨论无阻尼和有阻尼的单自由度系统的自由振动，它也是研究多自由度系统的基础。

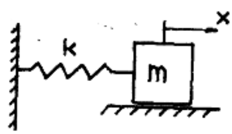

图 1.1

1.1 无阻尼系统的自由振动

考虑图 1.5 所示的无阻尼单自由度系统，质量 m 悬挂于弹簧下端，弹簧上端为刚性支承，弹簧刚度为 k，不计弹簧质量。m 处于静止时的位置称为静平衡位置，此时弹簧变形为 δ_u，则有

$$mg = k\delta_u \tag{1.1}$$

取静平衡位置为坐标原点，设向下为坐标正向。则质量 m 的运动用广义坐标 x 描述。对于任一位置 x，由牛顿第二定律得

$$m\ddot{x} = -k(x + \delta_u) + mg$$

考虑式(1.1)，则

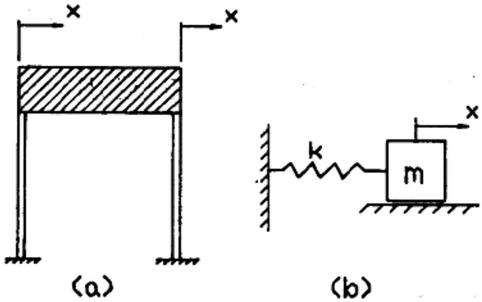

图 1.2

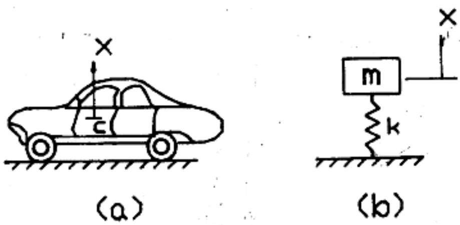

图 1.3

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1.2}$$

令

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{1.3}$$

方程(1.2)改写为

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{1.4}$$

称方程(1.2)或(1.4)为单自由度系统的运动微分方程。设解为

$$x(t) = ce^{st} \tag{1.5}$$

其中 c、s 为待定常数。将式(1.5)代入方程(1.4)得

$$c(s^2 + \omega_n^2) = 0$$

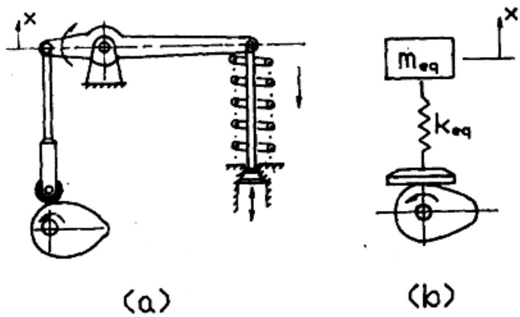

图 1.4

为寻找 $x(t)$ 的非零解，必须有

$$s^2 + \omega_n^2 = 0 \quad (1.6)$$

即

$$s = \pm \sqrt{-\omega_n^2} = \pm i\omega_n \quad (1.7)$$

称方程(1.6)为运动微分方程(1.4)的特征方程，由式(1.7)给出了方程的两个根，则方程(1.4)的通解为

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_n t} + c_2 e^{-i\omega_n t} \quad (1.8)$$

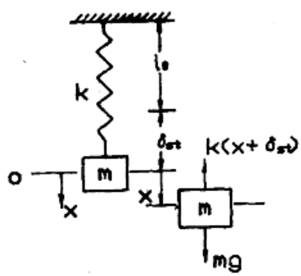

图 1.5

考虑到

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos\omega_n t \pm i\sin\omega_n t$$

将式(1.7)改写为

$$x(t) = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t \quad (1.9)$$

式中 A_1、A_2 为常数，由系统的初始条件确定。设初始条件为 $t=0$

时，$x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$，则由(1.9)得 $A_1=x_0$，$A_2=\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$，于是得到满足初始条件的解为

$$x(t) = x_0 cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} sin\omega_n t \tag{1.10}$$

式(1.10)还可以变换为相角形式的简谐函数。为此令

$$A_1 = Acos\varphi$$
$$A_2 = Asin\varphi$$

其中 A、φ 为新的常数。由初始条件表示为

$$\begin{aligned} A &= (A_1^2 + A_1^2)^{1/2} = \sqrt{x_0^2 + (\frac{\dot{x}_0}{\omega_n})^2} \\ \varphi &= arctg\frac{A_2}{A_1} = arctg\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_n} \end{aligned} \tag{1.11}$$

则式(1.10)变换为

$$x(t) = Acos(\omega_n t - \varphi) \tag{1.12}$$

若引入关系式

$$A_1 = Bsin\alpha$$
$$A_2 = Bcos\alpha$$

则

$$B = A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{\dot{x}_0}{\omega_n})^2}$$

$$\alpha = arctg\frac{x_0\omega_0}{\dot{x}_0} \tag{1.13}$$

于是，式(1.10)还可以变换为

$$x(t) = Asin(\omega_n t + \alpha) \tag{1.14}$$

式(1.10)或(1.12)为单自由度系统自由振动微分方程的解(式(1.14)也是解)。显然它是时间的简谐函数。质量 m 关于平衡位置运动是对称的，通过平衡位置时，速度最大，而加速度等于零，达到最远偏位时，速度为零，而加速度最大，无阻尼系统的自由振动为简谐振动。称 ω_n 为系统的固有频率，A 为振幅、φ 为初相角。简谐

振动的性质可以用旋转矢量在某轴上的投影来表示，如图 1.6 所示。令 A 为振幅 A 对应的矢量，它与铅垂 x 轴的夹角为 $(\omega t-\varphi)$。由于角 $(\omega t-\varphi)$ 是时间的线性函数，所以它随时间线性增加。每当矢量 A 旋转 2π 角后，它的位置就重复一次。所以矢量 A 在 x 轴上的投影就是式(1.12)所表示的简谐运动。如图 1.6 中的右图所示，

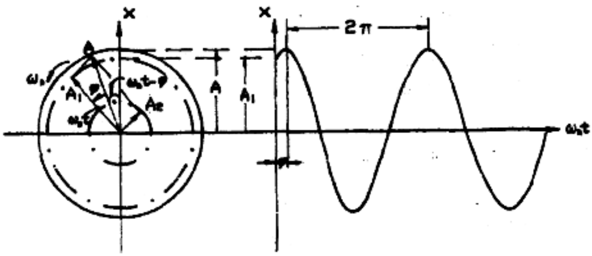

图 1.6

其中水平轴为 $\omega_n t$，则初相角由原点与第一个峰值之间的距离表示。

由(1.3)式得系统的固有频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.14}$$

考虑到式(1.1)，可将弹簧刚度 k 表示为

$$k=\frac{mg}{\delta_{st}}$$

则系统的固有频率又可由下式确定

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{1.15}$$

式中 δ_{st} 为在 mg 作用下，质量 m 对应静平衡位置的静偏位。由图 1.6 可以看出，振幅矢量 A 以等角速度 ω_n 逆时针旋转一周时，质量 m 往复振动一次，因此固有频率 ω_n 又称园频率，单位为 rad/s。在工程中又常用每秒振动的次数表示固有频率，即令

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{1.16}$$

f 的单位为赫兹(Hz)。每振动一次的时间称为固有周期,即

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1.17}$$

可见,系统的固有频率和周期只决定于系统的参数(此处为质量和刚度),而与初始条件无关。但由式(1.11)看出振幅和初相角却依赖于初始条件,随初始位置和初始速度的不同而改变。

例 1.1 铅垂园轴的上端固定,下端装有水平园盘,组成扭摆,如 1.7 所示。已知园轴长 l,直径为 d,不计质量。园盘对转轴的转动惯量为 I。试求扭摆微幅振动的固有频率和周期。

解: 设 θ 为园盘相对于静平衡位置的角坐标。根据材料力学知识,园盘所受的扭矩为

$$M_t = \frac{GJ_p}{l}\theta \tag{1}$$

式中 G 为剪切弹性模量,J_p 为园轴的截面极惯性矩,即

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \tag{2}$$

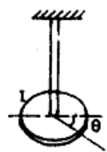

图 1.7

则园轴的扭转刚度系数为

$$k = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GJ_p}{l} = \frac{\pi G d^4}{32 l} \tag{3}$$

园盘扭转振动的微分方程为

$$I\ddot{\theta} = -k\theta \tag{4}$$

或

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I}\theta = 0 \tag{5}$$

则扭转振动的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{I}} = \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32 l I}} \tag{6}$$