最优化理论与应用

（第二届全国最优化学术会议论文集）

主编　赵民义

西安电子科技大学出版社

最优化理论与应用

（第二届全国最优化学术会议论文集）

主　编　越民义

副主编　韩继业

陈开周

西安电子科技大学出版社

1994年10月

(陕)新登字 010 号

内 容 简 介

最优化理论与方法是近代应用数学的一个重要分支，它是越来越显得重要的一门学科，应用很广泛。本书是第二届全国最优化学术会议的论文集，汇集了自1991年第一届全国最优化学术会议以来我国学者在最优化理论、算法与应用方面所取得的一些可喜的最新研究成果。内容分为四个部分：综合报告、优化理论、优化算法和优化应用。特别是本书内容中，在排序问题、线性规划与非线性规划、多目标规划、随机规划、非光滑分析、总体极值、图论与网络流、神经网络的优化计算以及最优方法的实际应用等方面，均有较大的新进展。

本书可供从事最优化理论工作、运筹工作、应用数学工作、计算数学工作、管理科学工作、系统工程工作和经济学工作的学者以及高等学校有关专业高年级学生和研究生学习参考，也可供搞优化设计的工程技术人员和科研人员参考。

最优化理论与应用
越民义　主编
责任编辑　夏大平　徐德源

西安电子科技大学出版社出版发行
西安通力印刷厂印刷
开本 787×1092　1/16　印张 36　8/16　字数 889 千字
1994 年 10 月第 1 版　1994 年 10 月第 1 次印刷　印数 1—600

ISBN 7-5606-0362—9/O·0023　　定价：60.00 元

前　言

最优化这门学科作为运筹学的一个重要领域在我国已有 30 多年的历史。30 多年来，它的发展虽然经历了诸如"文革"等外来因素的干扰，但通过国内同行们的不懈努力，无论在理论方面还是应用方面，在深度上还是广度上都取得了长足的进展。在它的某些分支，例如线性与非线规划、组合优化、多目标规划，等等，国内的一些研究工作可以说已进入了世界的先进行列。特别可喜的是，近几年越来越多的青年同志加入到最优化的研究队伍中来。鉴于这一发展势头，定期交流我们的研究成果和在教学、科研方面的工作经验势在必行。因此，在 1991 年泰安全国最优化会议之际，经讨论决定：每三年举办一次全国最优化会议。参加这届西安全国最优化会议的同志预计 150 人，宣读论文百余篇。出席人数和收到的论文篇数均比上届泰安会议显著增多。这本论文集就是 3 年来我们最优化同行们辛勤工作的成果总结，也是对我们的工作的一次检阅。

本论文集共收入论文一百余篇，分为四部分：综合报告；优化理论；优化算法；优化应用。论文集论题广泛，涉及线性与非线性规划、图论与网络流、多目标规划、非光滑优化、总体极值、排序问题、优化问题的并行算法以及各种各样的实际应用问题。论文作者分布全国，老中青齐上阵，尤其是年轻人增多，大显身手，充分显示了我国最优化学科生气勃勃、后继有人的可喜景象。作为老同志，我们对此深感欣慰。

这次会议的具体筹办工作主要由西安电子科技大学应用数学系承担，她在人力上和财力上都给会议以全力支持。此外，中国数学会、曲阜师范大学运筹学研究所和中科院应用数学研究所也都给会议以大力支持，包括经费上的资助。由于这些支持和资助，特别是西安电子科技大学的支持和资助，使这次会议得以顺利召开、论文集得以按时出版。我们谨向他们表示衷心的感谢！

中国科学院应用数学研究所
越民义
韩继业
西安电子科技大学应用数学系
陈开周
1994 年 9 月

目　录

第一部分　综合报告

第二部分　优化理论

第三部分 优化算法

第四部分　优 化 应 用

最优化的神经网络实现及在网络优化上的应用

章祥荪* 张广鉴** 朱会灿*

摘要 本文考虑使用神经网络来求解最优化问题。对于无约束或简单上、下界约束情形,文中给出了理论算法模型并且得到了一些结果。文中指出许多网络优化问题可以化成简单上下界约束的最优化问题。并且目标函数是二次时。该理论算法模型可以由一 Hopfield 模型来实现。

关键词 神经网络,极限集,平行算法

§1 引 言

平行算法和神经网络算法是近年来研究的热点,它们在优化计算中的应用虽然还没有达到传统优化算法的实用和普及,但其潜在的作用不可忽视。随着平行计算机和神经网络计算机的发展,对其理论研究的需要也会迫切。本文着重研究的是神经网络算法。

J. J. Hopfield 在 1984 年提出他的著名的人工神经网络的模型后[1],于 1985 年开始就着手研究在优化问题上的应用[2],[3]。这种应用同时关注到具有连续变量的优化问题(数学规划)[3]和具有离散变量的优化问题(组合优化问题)[2]。他的开创性的研究十分重要,引起了许多学者的注意。但由于理论上的结果还不完善,所以局限了它的应用。

当把 Hopfield 网应用到组合优化问题上去时,引起的主要的目前尚未解决的问题有两个,即确定型神经网络(例如离散的 Hopfield 网)在解总体极值时的能力问题和如何克服伪极值点的问题(在 Hopfield 网作为关联存储器时,即所谓的伪模式问题),这些问题由文[4]作了较全面的阐述。而在应用 Hopfield 型的人工神经网络于连续型的优化问题时,首先考虑的自然是线性规划和二次规划,因为它们是非线性规划的特殊情形而且常常构成解非线性规划的基本子程序。Tank 和 Hopfield 在文[3]中首先提出了解线性规划的网络,但这一网络的平衡点不能保证就是问题的 $K-T$[5]。

以后的一系列研究试图克服这一缺点。所构造的人工神经网络相对于数学规划理论可以分为两类,一类是模拟罚函数法,一类是模拟梯度方法。所不同的是算法不再在冯·诺伊曼计算机的原理下进行,而是在人工神经网络上实现,其特点是大量简单非线性单元在相互联结下作平行计算。这方面的代表性工作有文[6—9]。

章祥荪和朱会灿的文[10]在这些工作的基础上提出了一个 Hopfield 型的网络来解带有

* 北京,100080,中国科学院应用数学研究所。
** 北京,102600,核工业管理干部学院,1267 信箱。

简单上下界约束的二次规划，并严格证明了网络的平衡点就是问题的 $K-T$ 点，并可利用这一网络来解线性规划问题。

为了推广这些结果，在本文中我们研究了无约束最优化问题

$$\min f(x) \tag{1}$$

和具有简单约束的非线性规划问题

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t. } 0 \leq x_i \leq 1 \qquad i = 1,\cdots,n \end{cases} \tag{2}$$

在§2中，针对这两个问题分别提出了平行算法的理论模型并证明了有关的收敛结果。由于这些模型都基于常微分方程组，故亦称为动力系统模型。为了说明具有简单上下界的约束非线性规划是有意义的，在§3中列举出网络优化中的若干问题，它们均可化为问题(2)。

§2 理论算法模型及其神经网络实现

首先介绍一些微分方程的概念。

考虑微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x) \qquad i = 1,\cdots,n \tag{3}$$

这里 $f: G^* \to R^n$ 连续，G^* 是 R^n 的一个开集，且(3)式的满足初始点的解在 G^* 内唯一。

设 $V: G^* \to R, G \subset G^*$，$V$ 叫做(3)式的在 G 上的 Liapnov 函数，如果

(i) V 连续；

(ii) $\dot{V}(x) \leq 0, \forall\, x \in G$。

这里 $\dot{V}(x)$ 定义为

$$\dot{V}(x) = \lim_{t \to 0^+} \inf \frac{1}{t}(V(\pi(t,x)) - V(x))$$

其中 $\pi(t,x)$ 是(3)式的满足初始点 $\pi(0,x)=x$ 的解。

关于 Liapnov 函数，有如下的原理：

Lasalle Invariance Principle：设 V 是(3)式的在 G 上的 Liapnov 函数，$x(t)=\pi(t,x^0)$ 是(3)式的一个解，且 $x(t) \in G, \forall\, t \in [0,+\infty)$。如果 $x(t)$ 有界，则 $x(t) \to E \cap V^{-1}(c)$。这里

$$E = \{x : \dot{V}(x) = 0, x \in \bar{G} \cap G^*\},\ V^{-1}(c) = \{x : V(x) = c\}$$

也就是说，设 $\Omega(x^0)$ 是 $x(t)$ 正极限集，则 $\Omega(x^0) \subset E \cap V^{-1}(c)$，且 $\Omega(x^0)$ 是一个紧致连通集。

对于问题(1)，假定 f 连续可微，构造如下的动力系统

$$\frac{dx_i}{dt} = -\nabla_i f(x) \qquad i = 1,\cdots,n \tag{4}$$

又设 f 满足：$\forall\, x_0 \in R^n$，集合 $\{x : f(x) \leq f(x_0)\}$ 有界，则我们有：

定理 1 设 $x(t)$ 是(4)式的任一满足 $x(0)=x^0$ 的解，则

$$x(t) \to S = \{x : \nabla f(x) = 0\}$$

证明 取 Liapnov 函数 $V=f(x)$，则

$$\dot{V}(x(t)) = -|\nabla f(x(t))|^2 \leq 0$$

从而 $f(x(t)) \leq f(x(0))$，即 $x(t) \in \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$。所以 $x(t)$ 有界，故满足 Lasalle Invariance

Principle 的条件，因此有

$$x(t) \to \{x : V(x) = 0\} = \{x : \nabla f(x) = 0\} \triangleq S$$

且 S 是一紧致连通集。

可以发现该收敛定理与传统最优化方法中的最速下降法得到的结果是一致的。而且该定理保证了：如果集合 S 的点都是离散点，则轨线 $x(t)$ 收敛到唯一的极限点。

再考虑如下一般的情形：

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t. } g_j(x) \leq 0 \qquad j = 1,\cdots,m \end{cases} \tag{5}$$

设 $F = \{x : g_j(x) \leq 0, j = 1,\cdots,m\}$ 为一含有内点的凸区域。为方便起见，不妨设 F 是有界的。记 F 的边界为 ∂F，记向量 $x(i) = \{x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n\}$。$R_i^{n-1}$ 为由 $x(i)$ 形成的 R^n 的子空间。设 F^i 为 F 在 R_i^{n-1} 上的投影，∂F^i 为 F^i 的相对边界。可以定义空间曲面 S_i 如下：

$$S_i = \{x : x \in \partial F, x(i) \in \partial F^i\} \tag{6}$$

于是 S_i 将 ∂F 分成两半，分别记为 ∂F_+ 和 ∂F_-。∂F_+ 和 ∂F_- 可以看成是定义在 R_i^{n-1} 上的 x_i 的两个单位函数，记为 $\bar{g}_i^+(x(i))$ 和 $\bar{g}_i^-(x(i))$，设 $\bar{g}_i^+(x(i)) \geqslant \bar{g}_i^-(x(i))$。

对于(5)式，我们的理论计算模型为

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(x_i - \bar{g}_i^-(x(i)))(\bar{g}_i^+(x(i)) - x_i) \qquad i = 1,\cdots,n \tag{7}$$

假定初始点 $x(0) \in F$，这一算法的几何意义是十分明显的。当初始点 $x(0)$ 位于 F 的内部中部时，项 $(x_i - \bar{g}_i^-(x(i)))(\bar{g}_i^+(x(i)) - x_i)$ 不起很大作用，此时计算轨线沿着负梯度方向发展，使目标函数下降。当 $x(t)$ 靠近边界时，则该项控制轨线靠近边界。所以这是一种梯度内点法。

对于问题(2)，(7)式变成

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i(1 - x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad i = 1,\cdots,n \tag{8}$$

引理 1 设 $x^0 \in (0,1)^n$，则(8)式的以 x^0 为初始点的解 $x(t) \in (0,1)^n, \forall t \in [0,\infty)$。(证明略。)

下面的定理描述算法(8)的收敛性质。

定理 2 设$\in C^1$，若 $x(t) \subseteq (0,1)^n$ 为(8)式的一个解，且当 $t \to \infty$ 时仅有唯一的极限点 x^*，则 x^* 是问题(2)的 $K-T$ 点。

证明 问题(2)的 $K-T$ 方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_i + \mu_i = 0, \lambda_i\mu_i = 0, \\ \mu_i(x_i - 1) = 0 \qquad -x_i \leq 0, x_i - 1 \leq 0 \\ i = 1,\cdots,n \end{cases} \tag{9}$$

相当于要证

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{cases} \leq 0 & x_i^* = 1 \\ = 0 & x_i^* \in (0,1) \\ \geq 0 & x_i^* = 0 \end{cases} \tag{10}$$

由稳定点的性质，对 $x^* \in [0,1]^n$，有

$$\frac{df}{dt}\Big|_{x^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^*(1 - x_i^*)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x^*}\right)^2 = 0$$

此式隐含

$$-x_i^*(1-x_i^*)(\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x^*})^2=0 \tag{11}$$

于是

(i) 若 $x_i^* \in (0,1)$，则 $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x^*}=0$，满足(9)式。

(ii) 若 $x_i^*=0,\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x^*}<0$，当 $t>T$ 时，$\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x(t)}<0$，于是对 $t>T$

$$\frac{dx_i}{dt}=-x_i(t)(1-x_i(t))\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x(t)}>0$$

且

$$x_i(t)=x_i(T)+\int_T^t \frac{dx_i(s)}{ds}ds>x_i(T)>0$$

这同 $x_i^*=0$ 矛盾。于是必有 $x_i^*=0$ 时$\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x^*}\geq 0$。

(iii) 若 $x_i^*=1,\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x^*}\leq 0$ 的情况一样可以证明。

这一定理的证明是文[10]中定理的简单推广，只是为了读者方便而写在这里。

算法(7)与(8)均是理论上的模型，它们是一种平行算法，但没有给出具体的像在数学规划中那样的迭代算法。因为只有迭代算法才能在电子计算机(冯·诺伊曼机)上有效地实现。一种最简单的离散化是，选定 t 的一个间隔 Δt。取 $t_0,t_1=t_0+\Delta t,t_2=t_1+\Delta t,\cdots$，将(7)式写成：

$$x_i(t_{k+1})=x_i(t_k)-\Delta t(x(t_k)_i-\bar{g}_i^-(x(t_k)(i))-x(t_k)_i)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x(t_k)} \tag{12}$$

对这种离散化应作数学分析，特别是稳定性分析。

但当 f 是二次函数时，算法(8)却对应着一个明确的算法，这就是在文[10]中研究的神经网络算法。

§3 网络优化问题化成简单约束的数学规划问题

在这一节中我们指出网络优化问题中的最短路问题、最大流问题和最小费用流问题可以写成问题(2)的形式，我们在这里不一一写出。由于这些问题是熟知的问题，我们在叙述时尽量简单。

1. 最短路问题

给定有向图 $G=(V,E)$，对每一弧 $e_j\in E$，有一权数 $c_j\geq 0$。所谓最短路问题就是从源点 s 到终点 t 找到一条路，具有最小的权值和。定义关联阵 $A\doteq(a_{ij},i=1,\cdots,|V|,j=1,\cdots,|E|$。

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若弧 } e_j \text{ 自点 } i \text{ 出发}\\ -1 & \text{若弧 } e_j \text{ 进入点 } i\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设 x_j 为在 e_j 上的设想的流量，$j=1,\cdots,|E|$。

问题的数学模型为

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} s \\ t \\ \triangleq d \\ \\ \\ \end{matrix} \\ x_i \geq 0 \end{cases} \tag{13}$$

由于 A 是全 模矩阵(totally unimodular),所以解不是取 0 就是取 1,所以(13)式等价于:

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ \text{s. t. } Ax = d \\ 0 \leq x_i \leq 1 \end{cases} \tag{14}$$

进而可由解

$$\begin{cases} \min\ c^T x + M \| Ax - d \|^{\alpha} \\ \text{s. t. } 0 \leq x_i \leq 1 \end{cases} \tag{15}$$

来得到近似解,其中 M 为一充分大的整数,$\alpha>0$。(15)式是形如(2)式的问题,当 $\alpha=2$ 时,有

$$\begin{cases} \min\ c^T x + M(Ax - d)^T(Ax - d) \\ \text{s. t. } 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \end{cases}$$

则目标函数是二次的。

类似地,可以把最大流问题与最小费用流问题化成(2)式的形式。

2. 旅行推销员问题(TSP)

设有 $i=1,\cdots,n$ 个城市,相互间的距离为 $d_{i_1 i_2}$。要找出一条访问每个城市一次且仅一次的路径 $\pi(i)=j, j\in\{1,\cdots,n\}$,使总的里程最短。Hopfield 在其论文[2]中提出以下模型。定义 n^2 个变量 x_{ij},$x_{ij}=1$ 表示第 i 个城市列在第 j 的访问位置上,否则取值为零。于是问题是求

$$\begin{aligned} \min_{X_{ij}=0,1} M_1 \sum_i \sum_{j_1 \neq j_2} x_{ij_1} x_{ij_2} + M_2 \sum_i \sum_{i_1 \neq i_2} x_{i_1 j} x_{i_2 j} \\ + M_3 \Big(\sum_i \sum_j x_{ij} - n \Big)^2 + M_4 \sum_j \sum_{i_1 \neq i_2} d_{i_1 i_2} x_{i_1 j} (x_{i_2 j+1} + x_{i_2 j-1}) \triangleq F \end{aligned} \tag{17}$$

其中 M_1, M_2, M_3, M_4 皆为大于零的数。

注意到 $F\geq 0$。且在 $0\leq x_{ij}\leq 1$ 上为不定的二次型,若解问题

$$\begin{cases} \min\ F \\ \text{s. t. } 0 \leq x_{ij} \leq 1 \end{cases} \tag{18}$$

则不一定能保证收敛到处于边界上的总体极值点。(注意许多神经网络方法解 TSP 问题得不到适当的最优解的原因即在此。)

由于这些问题可以化成形如(2)式的简单约束的数学规划问题,所以我们可以通过求解(2)式来得到这些问题的解或近似解。(2)式可以看做这类问题的一个通用算法。

参考文献

[1] J. J. Hopfield, Neurons with graded response have colletive computational properties like those of two—state neurons, Porc. Nat. Acad. Sci, USA. vol. 81, 3088—3092(1984).

[2] J. J. Hopfield & D. W. Tank, Neural computation of decision in optimization problems. Biol. Cyber, vol.

52,141—152(1985).

[3] D. W. Tank & Hopfield, Simple neural optimization networds: An A/D converter, signal decision network and a linear programming circuit, IEEE Trans. Circ. Sys. vol. 33. 533—541(1986).

[4] S. V. B. Aiyer, M. Niranjan, & F. Fallside, A theoretical investigation into the performance of the Hopfield model, IEEE Trans. Neur. Net, vol. 1,204—215(1990).

[5] C. Y. Maa & M. A. Shanblatt, Linear and quadrtic programming neural network analysism, IEEE Trans. Neur. Net. vol. 3,380—3949(1992).

[6] M. P. Kennedy & L. O. Chua, Neural network for nonlinear programming. IEEE Trans. Circ. Sys. vol. 35, 554—562(1988).

[7] A. Rodriguez—Vazquez, et al. Nonlinear switched—capacitor for neural network for optimization problems. IEEE Trans. Circ. Sys. vol 37,384—398(1990).

[8] A. Bouzerdoum & T. R. Pattison, Neural network for quadratic optimization with bound constraints. IEEE Trans, Neur. Net, vol. 4,293—304(1993).

[9] S. Zhaug & A. G. Constantinides, Lagrange programming neural networks. IEEE Trans. Circ. Sys. vol. 39 411—452(1992).

[10] Xiang—sun Zhang & Hui—Can Zhu, A Neural network model for quadratic programming with simple upper and lower bounds and its application to linear programming. Technical Report 93—39, Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica. (1993).

时间表理论中最优排列问题的若干结果*

俞文鮆
(华东理工大学应用数学研究所，上海 200237)

摘要 本文叙述了近年来我们在时间表理论中最优排列问题的若干研究结果：对一台机器的总延误问题给出了相容偏序的概念，并对利用 Emmons 条件进行相容偏序扩张证明了有关结果，填补了 Emmons 优势准则与实际运用步骤之间的理论空隙；从局部解特性与最坏情形性能比方面研究了总延误问题的三个近似算法：关键位置法，顺时安排法，倒时安排法；对总延误问题分解定理的分解位置条件作了改进；将一般最优排列问题的相邻交换原则从拟全序推广到偏序情形；对于二台机器流水作业中加工时间线性依赖于等待时间的加工全长问题，证明了它为 NP 困难。

§1 引 言

组合最优化问题(参见文[7])有 3 种比较常见的形式：(1)组合结构上的整数变量问题，如最大流问题与最小费用流问题；(2)最优子集问题，如最大匹配问题，它要求在一个图的边集中找一个子集，使符合匹配条件，且使这个子集的基数达到最大；(3)最优排列问题，它要求一组元素的排列，使某个特定的目标函数达到最优，如旅行商问题。

时间表理论(参见文[4])中有大量的问题表现为最优排列问题，如一台机器情形与流水作业情形，因此时间表理论也常称为排序理论。不过，时间表理论中也有一些问题从形式上不能表达为寻找排列，如允许中断情形、平行机情形及其它作业情形。

近几年来，我们对时间表理论的若干最优排列问题作了一些工作，其中较多涉及一台机器的总延误问题。本文简要地叙述这些工作的结果，以促进交流。

§2 相容偏序与最优性相容条件

给定一组工件的加工时间与工期，要求确定这些工件在一台机器上的加工排列，使相应的总延误达到最小，这就是总延误问题。该问题在近年已被证明是NP困难的。Emmons 在文[2]中曾研究最优排列所能满足的偏序(我们在文[15]中称之为相容偏序)，并得到如下结论：

优势准则(见文[2])。设Q为某个总延误问题的相容偏序，又设$(i,j)\in EC(Q)$(与Q有关的一组条件，被称为Emmons 优势条件，细节从略)，则存在该问题的最优解，使工件i排在工

* 国家自然科学基金项目。

件 j 之前。

Emmons 优势准则在总延误问题的分支定界法中起着重要作用，在许多文献中被引用。在实际运用中，在依据上述准则的同时，反复地将 (i,j)"加到"相容偏序 Q 之中，得到扩张了的偏序。这样的加法一定能得到新的相容偏序吗？

我们注意到，与上述问题相联系，林诒勋在文[6]中首先指出，"我们也猜测这样做是对的，只是期待一个严格的证明"，Emmons 在文[2]中也曾提及，为使有关性质可以"积累"，需要"做许多必要的交换(变换)"。

我们认为，Emmons 优势准则是正确的，但实际运用它时所要求的理论依据要强于它本身。因此，我们研究了上述做法在理论上是否正确的问题。在文[14]～[16]中，我们发现了 Emmons 优势条件满足有限制的可递性，并着重证明：从零偏序出发，反复利用 Emmons 优势准则作偏序扩张，必能一直保持为相容偏序。还有例子表明，如果从一个任意的相容偏序出发，那么未必能保持为相容偏序。

作为总延误问题的相容偏序这一概念的推广，我们在文[13]中对一般形式的最优化问题提出最优性相容条件的概念，并涉及它的应用，可加性问题等。

§3　总延误问题的三个近似算法

从零时间出发，随着时间的增加，按某个准则逐个安排工件方法可称为顺时安排法，这类方法曾由 Wilkerson/Irwin[10]和林诒勋[5]所研究。随着时间的减少，按某个准则逐个安排工件的方法可称为倒时安排法，我们在文[11]和[12]中研究了这种方法，我们还在文[20]中提出了关键位置方法：先将工件按工期递增排列，然后将最长工件后移到关键位置(在所有上述后移中，到该位置的后移使总延误达到最小)，并对以后的子问题亦这样做。

我们在文[20]中给出了上述三个近似算法的计算试验报告。以工件数 $n=60$ 为例，100 个随机例子的数据表明：平均误差分别为 0.7%(关键位置法)、1.5%(顺时安排法)、3%(倒时安排法)。

上述三个近似算法均为多项式时间算法，有关理论结果如下：

(1)关键位置法。我们在文[20]中证明：所得工件排列为相邻交换意义下的局部解，它的性能比为 $n-1$。

(2)顺时安排法。由文[5]已知它所得到的工件排列为相邻交换意义的局部解。在文[18]中，我们进一步证明：所得工件排列为前移意义的局部解，它的最坏情形性能比为 $n/2$。

(3)倒时安排法。我们在文[12]中证明：所得工件排列为后移意义的局部解，它的性能比为 2^{n-2}。

§4　总延误问题的分解定理的改进

Lawler[3]所得的分解定理表明，总延误问题存在下列分解形式的最优解：先将工件按工期递增排列，然后将最长工件后移至某个位置(被称为分解位置)，前后各为二个相应子问题的最优解。尽管上述定理中分解位置不能预定，但该定理给出了分解算法的理论依据，该分解算法为拟多项式时间算法。Potts/Wassenhove[8]曾对最右分解位置作了研究，证明它必须

满足有关条件，从而使分解算法更为有效。

我们在文[1]中对最左分解位置作了研究，证明它必须满足更多的条件，从而有助于进一步改进分解算法。文[1]中所得结果表明关键位置必定满足最左分解位置条件，从而成为关键位置法的一个依据。

§5 相邻交换原则的改进

如前所述，时间表理论中有不少问题可归纳为下列最优排列问题：

$$\min\ \{f(\sigma)\mid\sigma\in P_{rr}(N)\}$$

其中 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，σ 表示 N 的排列. $P_{rr}(N)$表示排列的全体，$f(\cdot)$为目标函数。

对上述问题，在文[4]中给出了关于拟全序的相邻交换原则，它可用于统一处理 $1\parallel\Sigma\omega_i C_i$ 与 $1\parallel T_{\max}$，但不适合于 $F_2\parallel C_{\max}$。

我们在文[17]中将它推广为关于偏序相邻交换原则：

设 Q 为 N 上偏序，又设成立

$$\forall\ (j,i)\notin P,\ f(\alpha ij\beta)\leq f(\alpha ji\beta)$$

则符合 P 的任何排列皆为 $\min\ \{f(\sigma)\mid\sigma\in P_{rr}(N)\}$ 的最优解。

推广的相邻交换原则还可适用于 $F_2\parallel C_{\max}$。对此问题，以条件

$$\min\ (P_{1,i},P_{2,j})<\min\ (P_{2,i},P_{1,j})$$

建立偏序 P，则符合 P 的任何排列皆为 $F_2\parallel C_{\max}$的最优解。此结论可给出多个最优解，从而也推广了 Johnson 算法的结果。

§6 与等待时间有关的流水作业问题的计算复杂性

在流水作业问题中，每个工件在一个机器上加工完毕之后直至该工件在下一台机器上开始加工的时间被称为等待时间。在所研究的问题中，等待时间使该工件在下一台机器上的加工时间产生线性延伸，而要求找出工件排列使加工全长最小化。在二台机器的情形，当延伸系数允许取二个不同值时，该问题已被证明是 NP 难问题，见 Sriskandarajah/Goyal 的文[9]。在文[9]上还曾指出：当延伸系数只取同一值时，该问题的计算复杂性尚未判定。在文[19]中，我们证明，在上述限制下，该问题也是 NP 难问题。

参 考 文 献

[1] 常时炜、陆清、唐国春、俞文鮆：On Decomposition of the Total Tardiness Problem，待发表，1993.

[2] H. Emmons, One—machine sequencing to minimize certain functions of job tardiness, Operations Research, Vol. 17, 1969. pp. 701—715.

[3] E. L. Lawler, A Pseudopolynomial algorithm for sequencing jobs to minimize total tardiness, Ann. Discrete Math. NO. 1, 1977, pp. 331—342.

[4] E. L. Lawer, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinooy Kan, D. B. Shmoys, Sequencing and Scheduling: Algorithms and Complexity, Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 4: Logistics of Production and Inventory, eds.: S. C. Graves, etc., Amsterdam, 1993. pp. 445—522.

[5] 林诒勋：最小化误时损失的一台设备排序问题，《应用数学学报》，No. 2, 1983, pp. 228—235.