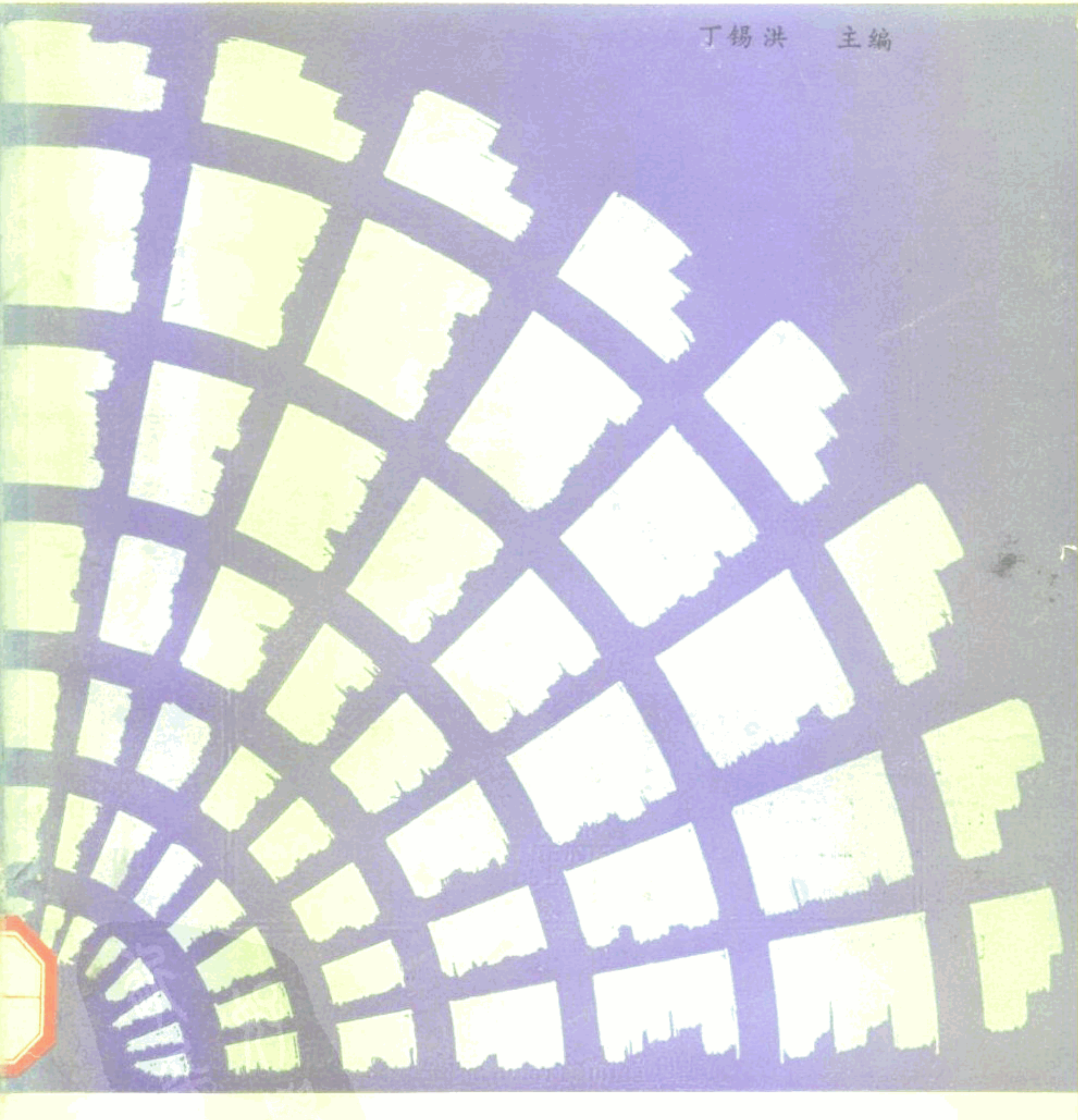
结构力学

丁锡洪　主编



航空工业出版社

前　　言

本书是按照航空高等院校飞行器工程类飞行器设计专业结构力学教学大纲编写的。

全书共十章，由三大部分组成。第一部分（一～三章）是弹性力学，着重介绍弹性力学的基本理论、薄板弯曲理论和能量原理；第二部分（四～八章）是结构力学，详细讨论结构组成的基本规律和结构分析的基本原理和方法；第三部分（九～十章）是有限单元法，重点介绍与计算机相联系的近代结构分析方法。

本书是在《飞机结构力学》（丁锡洪、周建功主编，1983年出版）的基础上编写而成的。对弹性力学部分的内容进行了精选和重新组织，保留了最基础的部分；结构力学是本书的主体，进行了适当充实；对有限单元法部分的内容进行了适当调整，突出基本原理和方法，增加了实际训练。本书在加强基本理论、重视实践能力的培养、注意内容少而精和学生可接受性方面比原来的教材均有所改进。

本书可供飞机、直升机、导弹等飞行器设计专业教学使用，亦可供结构强度专业学生和从事结构设计和强度工作的工程技术人员参考。

本书由丁锡洪、游仁长、顾慧芝编写，丁锡洪主编。西北工业大学姜炳光、刘国春审稿。

由于水平所限，缺点错误在所难免，竭诚希望使用本书的教师、学生和工程技术人员批评指正。

编者

1990年10月

目　　录

第一章　弹性力学基础

§1-1　引　言

一、弹性力学研究的内容

弹性力学是固体力学的一个分支学科，它研究弹性体在外力和其它外部因素作用下所产生的变形和内力。

我们知道，材料力学亦是固体力学的一个分支学科，它研究的是杆状弹性体在拉伸、压缩、剪切、弯曲和扭转作用下的变形和内力。弹性力学与材料力学相比，有两个特点：其一是材料力学研究的对象仅限于杆状弹性体，而弹性力学研究的对象则没有形状的限制；其二是在研究方法上弹性力学比材料力学更为严密，弹性力学只采用一些最基本的假设，而材料力学除了采用一些基本假设外，还引进一些关于变形状态或应力分布的补充假设。例如在研究直梁弯曲时就采用了平截面假设，从而得出梁的横截面上正应力沿高度呈直线分布的规律。弹性力学研究这一问题，并不需要引进这样的假设。计算结果表明，只有当梁的高度远小于它的跨度时，以上结论才是正确的，否则，横截面上的正应力就不是按直线分布，而是按曲线分布。也就是说，这时平截面假设就不适用了。再如在研究带孔杆件拉伸时，材料力学中假设拉应力在净面积上均匀分布，而弹性力学所得结果表明，在净面积上拉应力并不均匀分布，在孔边附近出现高度应力集中。由此可见，由于弹性力学的研究方法更为严密，因而所得的结果也比材料力学精确。人们常常用它来检验材料力学对同类问题解答的精度，从而明确材料力学公式的应用范围。

弹性力学和材料力学一样，都是学习结构力学的基础，它的基本原理已广泛应用于航空、航天、造船、机械、土建等各个工程领域，为各种工程结构的强度、刚度、稳定性和可靠性设计及分析提供理论基础。因而，航空工程技术人员掌握一定的弹性力学基础知识，对于从事飞行器设计和进行科学研究都是十分必要的。

二、弹性力学的基本假设

人们从长期的科学实践中概括出弹性体变形的最一般的规律，提出了弹性力学的基本假设：

（1）假设材料是连续的——认为构成物体的材料是密实无间隙的连续介质。因此，物体中的应力、应变、位移等物理量就可以看成是连续的，在数学上可以用连续函数来表示。实际上，任何物质都是由原子或分子微粒组成，都不是连续的。但是微粒的尺寸和它们之间的距离远比物体的尺寸小，从宏观上看，这一假设并不会引起显著的误差。

（2）假设材料是匀质的和各向同性的——匀质指物体内各处材料的力学性质都相同，与各点的空间位置无关。各向同性指在物体内任一点处材料在各个方向的物理性质都相同。

因此，反映这些物理性质的弹性系数不随坐标和方向而改变。显然，有些材料是不符合这一假设的，如木、竹等纤维材料以及现代复合材料，它们是各向异性的。

（3）假设材料是完全弹性的，且服从虎克定律——物体在外力作用下引起变形，在外力除去后，物体能完全恢复原来的形状，没有任何剩余变形。同时应力与应变成正比。

（4）假设物体变形是微小的——物体在外力作用下引起变形而产生的位移，与物体最小特征尺寸相比是很微小的。这样，在研究物体受力后的平衡状态时，可不考虑物体尺寸的变化，而应用变形前的尺寸；在研究物体变形时，变形的二次幂和乘积项都是高阶小量，可略去不计。这样就使得弹性力学的微分方程成为线性的。

基于上述基本假设建立的弹性力学称为线性弹性力学。

三、弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、应变和位移。现把它们的含义分别说明如下：

（1）外力——作用在物体上的外力可分为体力和面力。

体力，是分布在物体整个体积内的力，如重力、惯性力等。物体内某一点处单位体积的体力，用它沿x、y、z轴的投影X、Y、Z来表示。这三个量称为该点的体力分量，并规定沿坐标轴的正向为正，反之为负。体力的因次是〔力〕〔长度〕$^{-3}$。

面力，是作用于物体表面上的力，如流体压力、接触力等。作用在物体表面上任一点处单位面积上的面力，用它沿x、y、z轴的投影$\bar{X}$、$\bar{Y}$、$\bar{Z}$来表示，称作该点的面力分量，并规定沿坐标轴的正向为正，反之为负。面力的因次是〔力〕〔长度〕$^{-2}$。

（2）应力——物体受到外力作用后，必将在其内部引起应力。要研究物体内某点P的应力状态，就在该点从物体中取出一个微小的正六面体，称作微元体，它的各棱边平行于坐标轴，长度分别为PA = dx，PB = dy，PC = dz，如图1-1所示。将每一个面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力。

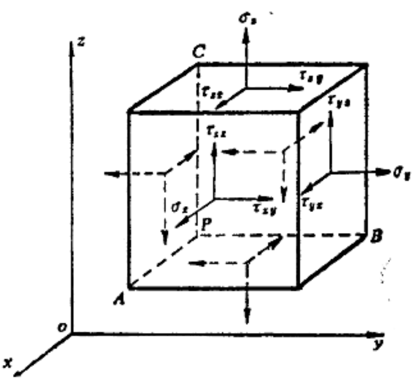


图 1-1

正应力用σ表示。为了表明这正应力的作用面和方向，加上一个脚标。例如σ_x表示正应力的作用面与x轴垂直，其方向沿着x轴。

剪应力用τ表示，并加上两个脚标，前一个表明作用面垂直哪个坐标轴，后一个表明剪应力的方向沿哪个坐标轴。例如τ_{xy}表示剪应力的作用面垂直于x轴，其方向与y轴平行。其余类推。

对应力的正负也做出规定。如果某一截面的外法线与坐标轴的正方向相同，则该面称为正面。正面上的应力沿坐标轴正方向为正，反之为负。如果某一截面的外法线指向坐标轴的负方向，则该面称为负面。负面上的应力沿坐标轴负方向为正，反之为负。图1-1中所示的应力全都是正的。

下一节将会证明，六个剪应力之间存在两两互等的关系，即

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}, \qquad \tau_{yz}=\tau_{zy}, \qquad \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

由此可见，九个应力只有六个是独立的，通常把σ_x、σ_y、σ_z、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy}六个应力称为该点的应力分量。

（3）应变——弹性体受力后，它的形状和尺寸都要改变。这种改变可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了描述弹性体内某点P的应变状态，在该点沿坐标轴x、y、z的正方向分别取三个微小的线段PA、PB、PC。物体变形以后，这三个线段的长度和它们之间的直角都将有改变，各线段每单位长度的伸、缩称为正应变，用ε表示，ε_x表示x方向线段PA的正应变，其余类推。正应变以伸长为正，缩短为负；每两线段之间直角的改变称为剪应变，用γ表示，单位是弧度。γ_{xy}表示x和y方向的线段PA和PB之间的直角改变，其余类推。剪应变以直角变小为正，变大为负。与应力分量相仿，ε_x、ε_y、ε_z、γ_{yz}、γ_{zx}、γ_{xy}称为一点的应变分量。

（4）位移——物体受力后，它内部各点将发生位置的移动。物体内任一点的位移用它在x、y、z三坐标轴上的投影u、v、w来表示，沿坐标轴正方向为正，反之为负。这三个投影称为该点的位移分量。

一般而言，弹性体内任意点的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量都是随点的位置不同而改变的，因而，都是点位置坐标的连续函数。

四、弹性力学的基本方法

在材料力学中，求弹性体中的应力常采用截面法，即假想将物体剖开，取截面一边的部分作为分离体，利用静力平衡条件求得截面上的应力。

弹性力学在研究弹性体的应力、应变和位移时，取体内微小的正六面体（称为微元体）为分离体，如图1-2所示。考虑微元体的平衡，建立一组平衡微分方程。由于未知应力数总是超出微分方程的个数，因此，弹性力学问题总是超静定的，必须同时考虑微元体的变形条件以及应力与应变的关系，在弹性力学中它们相应地被称为几何方程和物理方程。平衡方程、几何方程和物理方程统称为弹性力学的基本方程，综合考虑这三方面的方程，就有了足够数目的微分方程来求解未知的应力、应变和位移，而求解微分方程出现的积分常量，则根据边界条件来确定。

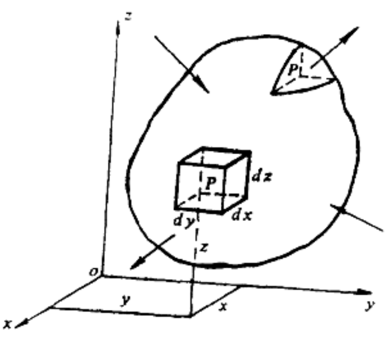


图 1-2

求解这些微分方程通常有两种方法：应力法和位移法。以应力为基本未知函数的叫做应力法，以位移为基本未知函数的叫做位移法。

§1-2 基本方程

本节推导在直角坐标下弹性力学的基本方程。

一、平衡微分方程

首先，研究弹性体的平衡问题，建立应力分量和体力分量之间的关系，即平衡微分方程。

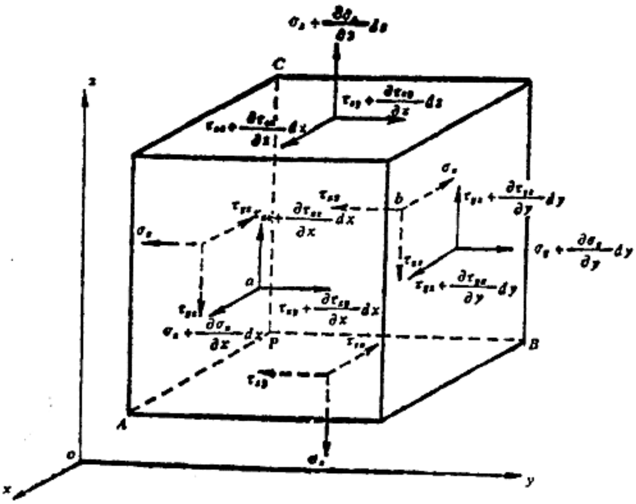


图 1-3

在弹性体内任一点P处，取出一个微小的正六面体，它的六个面分别与x、y、z轴垂直，棱边的长度分别为$PA = dx$，$PB = dy$，$PC = dz$，见图1-3。这个微元体受到它周围部分物体的作用，每个面上受到的作用力分别用三个应力分量(一个正应力、两个剪应力)表示。由于物体内应力是坐标的连续函数，作用在这六面体两对面上的应力分量将有微小变化。例如作用在x负面上的正应力是σ_x，在x正面上，由于坐标增加了dx，其正应力为 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ 其余类推。此外，物体中还有体力。由于所取的微元体是无限小的，作用在微元体内的体力和微元体每个面上的应力可认为是均匀分布的。

若所研究的物体在外力作用下处于平衡，则从中取出的任一微元体也应处于平衡，它应满足六个平衡条件

$$\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_x = 0, \qquad \Sigma M_y = 0, \qquad \Sigma M_z = 0$$

先利用第一个平衡条件$\Sigma F_x = 0$，得

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dxdz$$

$$- \tau_{yx} dxdz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy - \tau_{zx} dxdy + Xdxdydz = 0$$

上式经化简后，得下列方程的第一式。同理，利用平衡条件$\Sigma F_y = 0$和$\Sigma F_z = 0$，得下列方程的第二式和第三式。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+X=0 \\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+Y=0 \\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0
\end{aligned} \tag{1-1}
$$

式（1-1）称为弹性体的平衡微分方程。

再考虑三个力矩平衡条件，先利用$\Sigma M_x=0$，以连接微元体前后两面中心的直线ab作为矩轴，列出力矩平衡方程，则有

$$
\left(\tau_{yz}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}dy\right)dx\ dz\ dy/2+\tau_{yz}\ dx\ dz\ dy/2
$$

$$
-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dx\ dy\ dz/2-\tau_{zy}\ dx\ dy\ dz/2=0
$$

将上式化简，并略去高阶微量，可得下面的第一式。同样，利用另外两个力矩平衡条件可得下面的第二式和第三式

$$
\tau_{yz}=\tau_{zy}, \qquad \tau_{zx}=\tau_{xz}, \qquad \tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{1-2}
$$

这就是剪应力互等定律。

利用了剪应力互等定律，平衡微分方程（1-1）中仍有六个应力分量，未知应力分量的数目仍超过平衡方程的数目，因此，弹性力学问题总是超静定的，要解此类问题必须进一步研究变形条件及物理关系。

二、几何方程和变形协调方程

1. 几何方程

现在从几何学方面来研究应变分量和位移分量之间的关系，导出弹性力学的几何方程。

在外力作用下，弹性体发生变形。弹性体中任一点P_0，变形后移到了点P_1，矢量$\overline{P_0P_1}$就是点P_0的位移，它在三个坐标轴上的投影分别用u、v、w表示，它们都是坐标的函数，见图1-4。

为研究弹性体内点P_0处的变形，从P_0点取出棱边长分别为dx、dy、dz的正六面微元体，它在各坐标面上的投影显然都是矩形，见图1-5。弹性体变形时，微元体的棱边长度和各棱边之间的夹角都要发生变化，它们在各坐标面上的投影也将发生相应变化。通过各坐标面上的投影变化来研究微元体的变形。

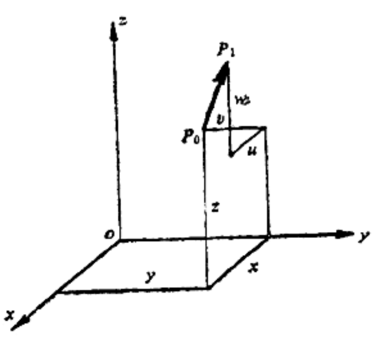


图 1-4

首先研究微元体在xoy面上的投影（图1-6）。变形前，线段PA和PB的长度分别为dx和dy，两线段之间成直角。变形后，P、A、B三点分别移到P′、A′、B′。点P在x和y方向的位移分量分别为u和v。由于点A与点P的坐标相差dx，因而点A在x和y方向的位移分别为 $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$ 和 $v+\frac{\partial v}{\partial x}dx$。同理，点B沿x和y方向的位移分别为 $u+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ 和 $v+\frac{\partial v}{\partial y}dy$。在小变形前提下，由于位移是微小的，沿y方向位移引起线段PA的伸缩以及沿x方向位移引起线段PB的伸缩均属高一阶微量，可以略去不计。因此线段PA和PB的正应变分别为

$$\varepsilon_x=\frac{P'A'-PA}{PA}=\frac{P'A''-PA}{PA}=\frac{u+\frac{\partial u}{\partial x}dx-u}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{a}$$

$$\varepsilon_y=\frac{P'B'-PB}{PB}=\frac{\partial v}{\partial y} \tag{b}$$

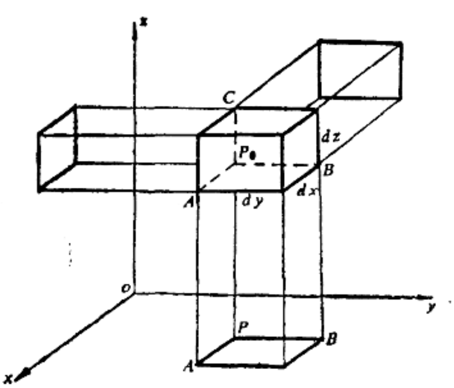


图 1-5

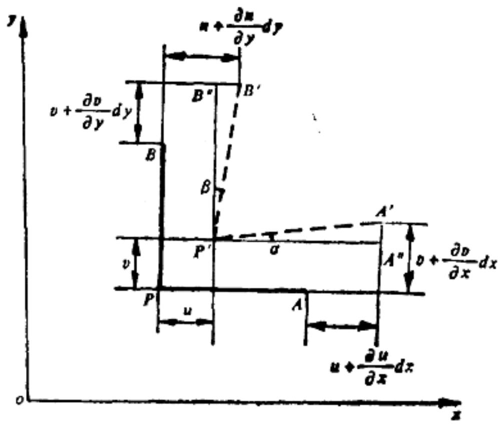


图 1-6

用同样的方法研究微元体在xoz或yoz坐标面上的投影变化，可得

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{c}$$

下面来求线段PA和PB之间直角的改变，也就是点P_0处的剪应变γ_{xy}。这剪应变包括两个部分，一部分是线段PA向y轴方向的转角α，另一部分是线段PB向x轴方向的转角β。在小变形情况下，有

$$\alpha\approx tg\alpha=\frac{A'A''}{P'A''}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1+\frac{\partial u}{\partial x}}$$

上式分母中的$\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_x\ll 1$，可略去。于是上式简化为

$$\alpha=\frac{\partial v}{\partial x}$$

同样可得

$$\beta\approx \mathrm{tg}\beta=\frac{B'B''}{P'B''}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy+\frac{\partial v}{\partial y}dy}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

因此，线段PA与PB之间的直角变化

$$\gamma_{xy}=\alpha+\beta=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{d}$$

以同样的方式研究微元体在坐标面yoz和xoz上的投影变化，可得线段 PB 与PC、PC 与PA 之间的直角变化，为

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\qquad \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x} \tag{e}$$

至此，我们得到了六个应变分量与三个位移分量之间的全部关系式，称为几何方程。把它们汇集写在下面

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\\
&\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\\
&\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1-3}$$

2．刚体位移和位移边界条件

由几何方程（1-3）可见，当物体的位移分量给定时，应变分量就完全确定了。反过来，当应变分量给定时，位移分量却不能完全确定。为了便于说明，仍以xoy投影面内PAB位移为例。令其应变分量为零来求出相应的位移分量。由几何方程得

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{f}$$

将前两式分别对x及y积分，得

$$u=f_1(y),\qquad v=f_2(x) \tag{g}$$

将上式代入式（f）的第三式，得

$$-\frac{df_1(y)}{dy}=\frac{df_2(x)}{dx}$$

上式的左边是y的函数，而右边是x的函数，因此，只可能式两边都等于同一个常数，设此常数为ω_z。于是有

$$-\frac{df_1(y)}{dy}=\omega_z,\quad \frac{df_2(x)}{dx}=\omega_z$$

积分后，得

$$f_1(y)=-\omega_z y+u_0,\quad f_2(x)=\omega_z x+v_0$$

其中u_0和v_0是积分常量。将上式代入式（g），得

$$u=u_0-\omega_z y,\quad v=v_0+\omega_z x \tag{h}$$

这是当弹性体平行xoy面的三个应变分量均为零时，由刚体运动引起的各点位移。可以证明，u_0和v_0分别代表弹性体沿x和y方向的平动，ω_z代表弹性体绕z轴的转动。

对于一般的三维弹性体，如果令其六个应变分量均为零，采用与上述类似的方法，可求出体内各点的位移分量为

$$u=u_0+\omega_y z-\omega_z y$$
$$v=v_0+\omega_z x-\omega_x z$$
$$w=w_0+\omega_x y-\omega_y x$$

式中u_0、v_0、w_0分别为弹性体沿x、y、z三个坐标轴方向的刚体平动，ω_x、ω_y、ω_z分别为弹性体绕x、y、z三个坐标轴的刚体转动。

既然物体在应变为零时可以有任意的刚体位移，可见，当物体发生一定的应变时，由于约束条件的不同，它可能具有不同的位移，也就是说，其位移并不是完全确定的。为了消除物体的刚体位移，必须有足够的约束条件，这就是位移边界条件。

3. 变形协调方程

由几何方程可见，六个应变分量完全由三个位移分量对坐标的偏导数确定。因此，六个应变分量不是互相独立的，它们之间必然存在一定的关系。从物理意义上讲，就是在变形前连续的物体，变形后仍是连续的。下面我们分两组导出这些关系。

第一组

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

将上式内各字母循环替换，得到另外二式，第一组共有三个关系式。

第二组

$$\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

将上式对z求导数，得

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}$$

将上式内各字母循环替换，得到另外二式，第二组也有三个关系式。

现将两组关系式汇集列出如下

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}
\end{aligned}
\tag{1-4}
$$

上列应变分量之间的六个关系式称为变形协调方程。

三、物理方程

上面我们已经导出了平衡微分方程和几何方程，对物体的应力和变形分别进行了分析。这分析适用于任何弹性体，即所得的公式与物体的物理性质无关。但仅有这两组方程还不能求解，还必须考虑物理学方面，建立起应变分量与应力分量之间的关系，这些关系式称为物理方程。

从材料力学的简单轴向拉伸试验已得到，在单向应力状态下，弹性阶段应力与应变呈线性关系，即

$$\sigma=E\varepsilon$$

这是著名的虎克定律，其中E为材料拉伸弹性模量。

在三向应力状态，描述一点处的应力状态需要六个独立的应力分量，与之相应的应变状态也有六个独立的应变分量。在线弹性假设下，应力与应变间呈线性关系。对于各向异性的均匀弹性体，这种关系一般可写成

$$
\begin{aligned}
\sigma_x&=C_{11}\varepsilon_x+C_{12}\varepsilon_y+C_{13}\varepsilon_z+C_{14}\gamma_{yz}+C_{15}\gamma_{zx}+C_{16}\gamma_{xy}\\
\sigma_y&=C_{21}\varepsilon_x+C_{22}\varepsilon_y+C_{23}\varepsilon_z+C_{24}\gamma_{yz}+C_{25}\gamma_{zx}+C_{26}\gamma_{xy}\\
\sigma_z&=C_{31}\varepsilon_x+C_{32}\varepsilon_y+C_{33}\varepsilon_z+C_{34}\gamma_{yz}+C_{35}\gamma_{zx}+C_{36}\gamma_{xy}\\
\tau_{yz}&=C_{41}\varepsilon_x+C_{42}\varepsilon_y+C_{43}\varepsilon_z+C_{44}\gamma_{yz}+C_{45}\gamma_{zx}+C_{46}\gamma_{xy}\\
\tau_{zx}&=C_{51}\varepsilon_x+C_{52}\varepsilon_y+C_{53}\varepsilon_z+C_{54}\gamma_{yz}+C_{55}\gamma_{zx}+C_{56}\gamma_{xy}\\
\tau_{xy}&=C_{61}\varepsilon_x+C_{62}\varepsilon_y+C_{63}\varepsilon_z+C_{64}\gamma_{yz}+C_{65}\gamma_{zx}+C_{66}\gamma_{xy}
\end{aligned}
$$

在上式中共有36个弹性常数，但它们并不都是独立的。根据弹性体在各方向物理性质的不同，独立的弹性常数的个数也不同。对于各向同性弹性体，可以证明，仅有两个独立的弹性常数。其应变分量与应力分量之间的关系如下

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)], \qquad \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}\\
&\varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)], \qquad \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G}\\
&\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)], \qquad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}
\end{aligned}
\tag{1-5}
$$

该物理方程也称广义虎克定律。式中E为材料拉压弹性模量，μ为泊松比，G为剪切弹性模量，而且三者之间有如下的关系

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

我们已假设所研究的物体是完全弹性的、均匀的和各向同性的，因此，这些弹性常数不随应力的大小而变，不随坐标位置而变，也不随方向而变。

式（1-5）是以应力分量来表示应变分量的，若用应变分量来表示应力分量，其物理方程为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2G\varepsilon_x, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\varepsilon_y, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1\text{-}5a)$$

式中，

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z,\quad \lambda=\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)},\quad G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

四、应力边界条件和圣维南原理

1．应力边界条件

若物体处于平衡，其内部各点的应力分量必须满足平衡微分方程（1-1），而在物体边界上，各点除受相邻部分的作用外，还受外部载荷的作用。下面建立边界上点的应力分量与面力分量的关系，导出应力边界条件。

在导出平衡微分方程时所取的正六面微元体，到了物体边界上，就成了四面体PABC(图1-7)。斜微分面ABC是物体表面的一部分，其外法线N与各坐标轴夹角的方向余弦分别为

$$l=\cos(N,x),\quad m=\cos(N,y),\quad n=\cos(N,z)$$

微元体的其余三个微分面过点P且分别与三个坐标轴垂直。设 ΔABC 的面积为dA，则 ΔPBC、ΔPCA、ΔPAB 的面积分别为 ldA、mdA、ndA。dh 为点 P 到 ΔABC 的垂直距离。四面微元体的体积为 $dV=dA\times dh/3$。

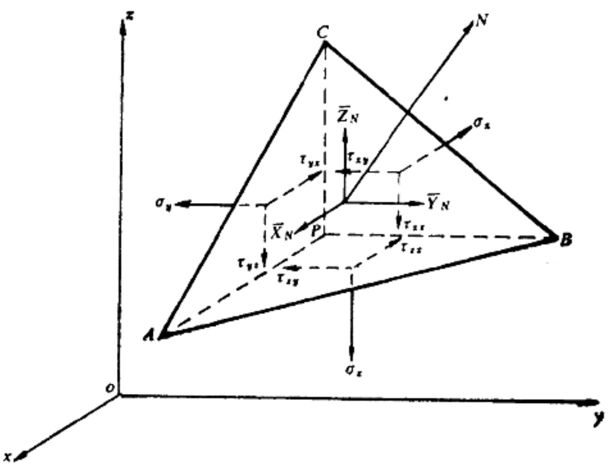


图 1-7

斜微分面ABC上的面力沿三个坐标轴上的投影分别为 $\bar{X}$、$\bar{Y}$、$\bar{Z}$。由于这些微分面很小，其面上作用的应力和面力可看成是均匀分布的。整个物体处于平衡，这

个四面微元体也应处于平衡。根据平衡条件 $\Sigma F_x = 0$，得

$$\overline{X}dA - \sigma_x l dA - \tau_{yx} m dA - \tau_{zx} n dA + X dV = 0$$

将上式除以dA，并注意到当点P无限接近物体表面，即$dh \to 0$为极限时，体力项的系数 $dV/dA = dh/3$趋于零，于是得下列方程的第一式。同理，由平衡条件 $\Sigma F_y = 0$ 和 $\Sigma F_z = 0$ 得到下列方程的第二式和第三式。

$$\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} &= \overline{X} \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} &= \overline{Y} \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z &= \overline{Z} \end{aligned} \qquad (1\text{-}6)$$

如果再考虑平衡条件$\Sigma M_x = 0$、$\Sigma M_y = 0$和$\Sigma M_z = 0$，将再次得到剪应力互等定律。

式（1-1）表示物体内部的平衡条件，而式（1-6）表示物体表面的平衡条件，这就是应力边界条件。若整个物体处于平衡，则平衡微方方程（1-1）和应力边界条件（1-6）必须同时得到满足。

2．圣维南原理

在求解弹性力学问题时，使应力分量、应变分量和位移分量完全满足基本方程并不困难，但是，要使得边界条件也完全满足却往往是很困难的。另外，在很多工程结构上都会遇到这样的情况，在物体的一小部分边界上，仅知道物体所受面力的合力，并不明确这面力的分布方式，因而无法使得在这部分边界上精确满足应力边界条件。圣维南原理有时可提供帮助。圣维南原理指出：如果把作用在物体的一小部分边界上的力系，用一个分布不同但静力等效的力系（主矢量相同，对同一点的主矩也相同）代替，则仅在此边界附近的应力分布有显著的改变，而在距该区域较远的地方几乎没有影响。

下面举例说明圣维南原理的应用。

图 1-8(a) 所示的直杆，在两端截面的形心受到大小相等而方向相反的拉力 P 作用。如果把一端或两端的拉力变换为静力等效的力系，如图 1-8(b)、(c) 所示，结果表明，只在靠近杆两端附近部分，应力分布有显著的改变，而在杆的其余部分应力几乎没有什么差别。

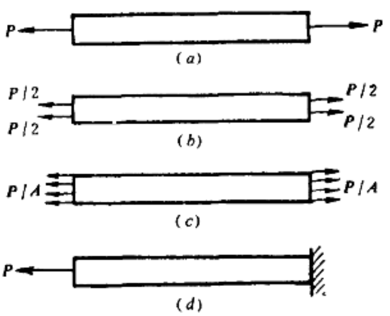


图 1-8

以后可知，图1-8(c)所示的情况，端部受连续均匀分布的面力，这种边界条件最容易求得应力解答。另外两种情况，面力不是连续分布的，甚至只知其合力为P而不知其分布方式，应力是难以求解或无法求解的。根据圣维南原理，将图1-8(c)的应力解答应用到其它两种情况，虽然不能完全满足两端的应力边界条件，但仍能表明离杆端较远处的应力状态。

当物体一小部分边界上的位移边界条件不能精确满足时，也可以应用圣维南原理而得到有用的解答。如图1-8(d)所示的杆件，右端是固定端，位移边界条件是$u = 0$和$v = 0$。把图1-8(c)所示情况的解答应用于这个情况，这个位移边界条件不能满足，靠近杆端处应力有很大差异，但离两端较远处的应力分布并没有明显的误差。可以看出，这种边界条件的简化，

给弹性力学问题的求解带来很大的方便。

圣维南原理虽然至今还没有得到确切的数学表示和严格的理论证明，但是，大量的实际计算和实验结果都证实了该原理是正确的。

§1-3 平面问题

一、平面应力与平面应变问题

任何一个实际的弹性体都占有三度空间，严格说来都属于空间问题。但是，当弹性体的形状有某些特点，且受到特殊分布的外力作用时，某些空间问题亦可以简化为平面问题。平面问题可以分为平面应力问题和平面应变问题两大类。

1. 平面应力问题——设有等厚度薄板（图1-9）。沿z轴方向的厚度t远小于板的长度和宽度，且沿薄板四周边界受有平行于薄板平面并沿厚度均匀分布的面力，体力也平行于板平面且沿板厚不变。

先分析它的应力情况。

薄板中面为xoy面，z轴垂直于中面。因为板的前后表面上没有外力作用，所以有

$$z=\pm t/2\text{处}，\sigma_z=0，\ \tau_{zx}=0，\tau_{zy}=0$$

在板内部可以有上述应力分量，但由于板很薄，这些应力一定是很小的，可以近似地认为它们都等于零。于是，只有平行于xoy面的三个应力分量σ_x、σ_y、τ_{xy}存在。所以，这类问题称为平面应力问题。

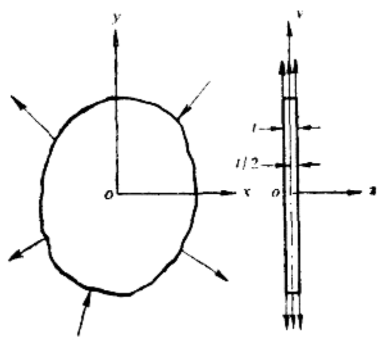


图 1-9

同时，也由于板很薄，可以近似地认为这三个应力分量沿板厚不变化，即只是坐标x、y的函数，而与坐标z无关。

在平面应力问题中，虽认为$\sigma_z=0$，但是由于垂直z轴的两个侧表面是自由的，故沿z轴方向的应变ε_z和位移w并不等于零。

2. 平面应变问题——设有很长的等截面柱形体（图1-10），其纵向（沿z轴方向）尺寸远大于横向尺寸，受有垂直于纵轴且沿长度不变的面力作用，体力也垂直于纵轴且沿长度不变，约束条件也不沿长度变化。

先来分析它的变形情况。

我们设想该柱形体为无限长，任一横截面都可视为对称面。因此，所有各点都不会有z方向的位移，即 $w=0$。从而沿z方向的正应变 $\varepsilon_z=0$。另外，由对称条件可知，γ_{zx}和γ_{yz}也必然为零。这样，六个应变分量只剩下平行于xoy坐标平面的三个应变分量ε_x、ε_y和γ_{xy}。因此，这类问题被称作平面应变问题。

显然，在平面应变问题中，所有横截面上各点的应力、应变和位移都与z坐标无关。这样，只需从构件中沿纵轴截取单位长度的薄片进行分析，就可以代替对整个柱形体的研究。