高等学校试用教材

高等数学讲义

下册

樊映川等编

高等教育出版社

高等学校试用教材

高等数学讲义

下　　册

樊映川　等编

高等教育出版社

本书原系根据高等教育部1954年颁布的高等工业学校高等数学教学大纲编写而成，1964年又根据高等工业学校高等数学课程教材编审委员会审订的《高等数学(基础部分)教学大纲(试行草案)》作了一些修订。

本书分上、下两册。下册内容包括级数，富里哀级数，多元函数的微分学和积分学，微分方程等。

先后参加本书编写与修订的有：樊映川、张国隆、陆振邦、侯希忠、方淑姝、王福楹、王福保、王嘉善、陈雄南、经贞琨等。

(京)112号

高等学校教材

高等数学讲义

下　册

樊映川　等编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

北京印刷[illegible]厂印装

开本 850×1168　1/32　印张　7.25　字数　189 000

1958年4月第1版　1984年10月第2版　1993年[illegible]月第[illegible]次印刷

印数 4 931 753—4 954 750

ISBN 7-04-001807-1/O·620

定价 3.40元

下 册 目 录

第二篇 数学分析(续)

第二篇　数学分析(续)

第十章　级　　数

I. 常数项级数

§10.1　无穷级数概念

设已给数列$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$,则式子

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

或简写为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

叫做无穷级数,或就叫做级数,其中第n项u_n叫做级数的一般项.

作级数的前n项的和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

可得到另一个数列:

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots.$$

根据这个数列有没有极限,我们可以引进无穷级数(1)的收敛或发散的概念.

定义　当n无限增大时,若数列s_n趋近于一个极限(有限的):

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n,$$

就叫无穷级数(1)收敛,这时极限值s叫做级数(1)的和,并写成

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots;$$

若s_n没有极限,就叫无穷级数(1)发散.

当无穷级数收敛时,其前n项的和s_n是级数的和s的近似值,它

们之间的差值

$$r_n=s-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

叫做级数的 n 项后的**余项**. 用近似值 s_n 代替和 s 所产生的误差是这个余项的绝对值, 即误差是 $|r_n|$.

最简单的无穷级数之一是**几何级数**:

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots, \tag{2}$$

其中 r 叫做级数的公比. 现在来考虑它的敛散性.

今若 $|r|\neq 1$, 则

$$s_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

当 $|r|<1$ 时, 由于 $\frac{ar^n}{1-r}\to 0$, 故 $s_n\to\frac{a}{1-r}$, 这时几何级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1-r}$. 当 $|r|>1$ 时, 由于 $\frac{ar^n}{1-r}\to\infty$, 故 $s_n\to\infty$, 因而几何级数发散. 当 $r=1$ 时, $s_n=na\to\infty$, 故级数发散. 当 $r=-1$ 时, 级数成为 $a-a+a-a+\cdots$, 显见 s_n 随 n 为奇数或为偶数而等于 a 或等于零, 故极限不存在, 从而级数发散. 综合上述结果, 我们得到: **若几何级数之公比 r 的绝对值 $|r|<1$ 时, 则此级数收敛, 若 $|r|\geq 1$ 时, 则级数发散.**

§10.2 无穷级数的基本性质 收敛的必要条件

1° 若级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

收敛于和 s, 则每项乘以一个不为零的常数 k 所得的级数

$$ku_1+ku_2+\cdots+ku_n+\cdots$$

收敛于和 ks.

因为级数的前 n 项的和是

$$\sigma_n=ku_1+ku_2+\cdots+ku_n=ks_n,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}ks_n=k\lim_{n\to\infty}s_n=ks.$$

又若 s_n 没有极限，σ_n 也不可能有极限．所以级数的各项乘一不为零的常数后它的敛散性总是不变的．

2° 收敛级数可以逐项相加或逐项相减，就是说，若有两收敛级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=s,$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots=\sigma,$$

则级数
$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$
必收敛于和 $s\pm\sigma$.

这是因为最后一个级数的前 n 项的和

$$\begin{aligned}(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)\\ &=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)\\ &=s_n\pm\sigma_n\to s\pm\sigma.\end{aligned}$$

3° 在级数前面加上有限项或去掉有限项，不会影响级数的敛散性，不过在收敛情形时，一般说来级数的和要改变的．

为确定起见，我们考虑下面两个级数

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots,\quad u_3+u_4+u_5+u_6+\cdots,$$

第二个是由第一个去掉前两项所得到的．仍用 s_n 表示第一个级数的前 n 项的和，用 σ_n 表示第二个级数的前 n 项的和，显然有

$$\sigma_{n-2}=s_n-(u_1+u_2),\quad s_n=\sigma_{n-2}+(u_1+u_2).$$

由此可见，当 $n\to\infty$ 时，σ_{n-2}、s_n 或同时具有极限 σ、s 或同时没有极限；在有极限时，其间关系为 $\sigma=s-(u_1+u_2)$.

4° 收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和 s.

设级数

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\cdots=s,$$

按照某一规律加括弧后所成的级数为

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots.$$

用 σ_m 表示第二个级数的前 m 项的和，用 s_n 表示相当于 σ_m 的第一个级数的前 n 项的和，这就是说

$$\sigma_1 = s_2, \quad \sigma_2 = s_5, \cdots, \quad \sigma_m = s_n, \cdots.$$

由此可见，当 $m \to \infty$ 时，$n \to \infty$，于是

$$\lim_{m \to \infty} \sigma_m = \lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

于是又得到，若加括弧后所成的级数发散，则原来级数也必发散，因若收敛，那末根据刚才所证，加括弧后的级数就应收敛了。

此外，收敛级数去括弧后所成的级数不一定仍是收敛的。例如级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

显然收敛于零，但级数

$$1-1+1-1+-\cdots.$$

却是发散的。若所论级数是正项级数(即各项 $u_n \geqslant 0$)，则无论加括弧或去括弧都不会影响它的敛散性①。

5° **收敛性的必要条件** **若级数(1)收敛，则当 n 无限增大时，它的一般项 u_n 必趋近于零：**

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

因为
$$u_n = s_n - s_{n-1},$$
所以

$$\begin{aligned}\lim u_n &= \lim (s_n - s_{n-1}) \\ &= \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.\end{aligned}$$

由此可知：**若级数的一般项不趋近于零，则级数发散。** 但一般项趋近于零并不是收敛的充分条件，有些级数纵然一般项趋近于零，仍然是发散的。例如**调和级数**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \tag{2}$$

它的一般项 $u_n = \frac{1}{n} \to 0$，我们不难证明它是发散的。顺序把级数(2)的

---

① 这是因为从单调增加的数列中抽出来的任何子数列必与原来数列同时趋近于无穷大或同时趋近于同一极限的缘故.

一项、两项、四项、八项、…括在一起：

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots,$$

这个加括弧的级数的各项显然大于级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

对应的各项，而后一级数前 n 项的和等于 $n\cdot\frac{1}{2}$，故发散于 $+\infty$，于是加括弧后的级数也发散于 $+\infty$，因而调和级数(2)也必发散于 $+\infty$.

§10.3　正项级数　收敛性的充分判定法

在前两节中所讲的都是任意项级数，即级数中各项可以是正数、负数、或者零. 现在我们只讨论正项级数(各项 $u_n\geqslant 0$). 这个情形特别重要，以后可以看到许多任意项级数收敛性的问题会归结为正项级数收敛性的问题. 在下面我们先讲基本的比较判定法，然后再由此推出在实用上很方便的比值法、根值法和积分法.

设级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

是一个正项级数，显然它的前 n 项的和 s_n 是一个单调增加数列：$s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant\cdots$. 如果数列 s_n 为有界，即 s_n 恒小于某一定数 M，则级数收敛于和 $s\leqslant M$(§2.7 极限存在准则II). 反之，若正项级数(1)收敛于和 s，即 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，则数列为有界(§2.2). 所以，**正项级数(1)为收敛的必要且充分条件是，它的前 n 项的和所构成的数列 s_n 为有界.**

根据这个原理，我们取另一正项级数

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \tag{2}$$

把它与级数(1)作比较.

若级数(2)收敛于和σ，并且$u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，则

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n<\sigma,$$

即s_n恒小于这个定数σ，故可肯定级数(1)收敛.

若级数(2)发散于$+\infty$，并且$u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，则

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\geqslant v_1+v_2+\cdots+v_n=\sigma_n\to+\infty,$$

即级数(1)也发散.

因此，我们证得

比较判定法 **若级数(2)收敛，并且$u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，则级数(1)也收敛；若级数(2)发散，并且$u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，则级数(1)也发散.**

注意到级数各项乘以不为零的常数k、以及去掉级数前面的有限项不会改变级数的敛散性，我们立刻得到

推论 **若级数(2)收敛，并且从某项起(例如第N项起)，$u_n\leqslant kv_n$，则级数(1)也收敛；若级数(2)发散，并且从某项起$u_n\geqslant kv_n(k>0)$，则级数(1)也发散.**

例 作为比较判定法的一个例子，我们来讨论p-级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots,\quad \text{常数 } p>0. \tag{3}$$

现在要分别证明当$p\leqslant1$时级数发散；$p>1$时级数收敛.

设$p\leqslant1$. 这时级数的每一项不小于调和级数的对应项：$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$；但调和级数发散，故当$p\leqslant1$时级数(3)发散.

例如级数 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$发散.

设$p>1$. 顺序把级数(3)的一项、两项、四项、八项、…括在一起

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots, \tag{4}$$

它的各项显然小于级数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots$$

对应的各项；而后一级数是几何级数，其公比$r=\frac{1}{2^{p-1}}<1$，故收敛．于是，当 $p>1$ 时，级数(4)收敛，又因为收敛的正项级数去括弧后仍收敛，所以级数(3)收敛．

例如级数　$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$收敛．

取一几何级数作为级数(2)来与已给级数比较，我们能得到在实用上极方便的两个充分判定法：比值法与根值法．

比值判定法　设正项级数(1)之后项与前项的比值的极限等于ρ：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则当$\rho<1$时级数收敛；$\rho>1\left(\text{或}\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty\right)$时级数发散；$\rho=1$ 时级数可能收敛或可能发散．

我们分别证明如下：

(i) 设 $\rho<1$．选定一个适当小的正数ε使得 $\rho+\varepsilon=r<1$．根据极限定义，当 $n\geqslant m$ 时，我们有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r.$$

因此

$$u_{m+1}<ru_m,\quad u_{m+2}<ru_{m+1}<r^2u_m,\quad u_{m+3}<ru_{m+2}<r^3u_m,\cdots;$$

而级数

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots$$

的各项就小于公比为 $r<1$ 的收敛几何级数

$$ru_m+r^2u_m+r^3u_m+\cdots$$

的对应项，所以它是收敛的．由于已给级数(1)比它只多了前面m项，

因此也是收敛的了（前节基本性质 3°）.

(ii) 设 $\rho>1$. 选定一个适当小的正数 ε 使得 $\rho-\varepsilon>1$. 根据极限定义，当 $n\geqslant m$ 时，就有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon>1,$$

也就是

$$u_{n+1}>u_n.$$

总之，当 $n\geqslant m$ 时，级数的一般项 u_n 是增大着的，当 n 无限增大时它不可能趋近于零，所以级数发散（前节基本性质 5°）. $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\infty\right.$ 时，证法亦同）.

(iii) 设 $\rho=1$. 我们注意到当 n 无限增大时，若比值 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 是由大于或等于 1 而趋近于极限 $\rho=1$ 时，显然一般项 u_n 不能趋近于零，故级数发散. 一般而论，在 $\rho=1$ 的情形下，比值判定法不能解决级数的敛散性的问题. 例如 p-级数(3)当 $n\to\infty$ 时均有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\to 1,$$

但我们知道 $p\leqslant 1$ 时级数发散；而 $p>1$ 时级数收敛. 因此只根据 $\rho=1$ 不能断定级数是收敛或是发散.

在上面判定法的证明中，我们看到如果级数自某项起，适合不等式：

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<r<1,$$

则不论 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 是否趋向极限，级数总是收敛的，因为级数从某项起各项均小于收敛几何级数的对应项.

如果上面的不等式自某 n 项起成立，则我们取级数前 n 项的和 s_n 作为 s 的近似值，这时所产生的误差 r_n 可估计如下：

$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots<ru_n+r^2u_n+\cdots=\frac{ru_n}{1-r}.$$

例 1．研究下面级数的收敛性并估计误差：

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}+\cdots.$$

解　第 n 项为

$$u_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)},$$

而
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}:\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}=\frac{1}{n}\to 0.$$

这时 $\rho=0<1$，故级数收敛.

误差 r_n 为

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots$$
$$=\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right)$$
$$<\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=\frac{1}{(n-1)\cdot(n-1)!}.$$

例 2．研究级数

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\cdots.$$

解
$$u_n=\frac{1\cdot 2\cdots n}{10^n}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1\cdot 2\cdots(n+1)}{10^{n+1}}:\frac{1\cdot 2\cdots n}{10^n}=\frac{n+1}{10}\to\infty.$$

这时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$，故级数发散.

例 3．研究级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots.$$

解
$$u_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)(2n+2)}\to 1.$$

这时 $\rho=1$，比值判定法失效. 但显然可见级数的各项小于收敛级数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

的对应项，根据比较法它是收敛的.

根值判定法 设正项级数(1)的一般项 u_n 的 n 次根的极限等于 ρ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho,$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛; $\rho>1$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\infty$)时级数发散; $\rho=1$ 时级数可能收敛或可能发散.

这个判定法的证法基本上与比值判定法的相同.

(i) 设 $\rho<1$. 当 $n\geqslant m$ 时，我们有

$$\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon=r<1.$$

因此 $$u_m<r^m,\quad u_{m+1}<r^{m+1},\quad u_{m+2}<r^{m+2},\ \cdots,$$

而级数 $$u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$$

的各项就小于公比 $r<1$ 的收敛几何级数

$$r^m+r^{m+1}+r^{m+2}+\cdots$$

的对应项. 于是，级数(1)收敛.

(ii) 设 $\rho>1$. 这时 $u_n\geqslant1, u_{n+1}\geqslant1,\cdots$，(1)的一般项不能趋近于零，故必发散.

(iii) 设 $\rho=1$. 仍可取 p-级数为例. $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p\to1$(因为当 $x\to+\infty$ 时未定式 $x^{\frac{1}{x}}\to1$，故 $n^{\frac{1}{n}}\to1$)，这就说明了 $\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

在上面根值判定法的证明中，我们也看到如果级数自某项起，适合不等式:

$$\sqrt[n]{u_n}<r<1,$$

则不论 $\sqrt[n]{u_n}$ 是否趋向极限，级数总是收敛的，因为级数从某项起各项均小于收敛几何级数的对应项. 并且以和 s_n 作为和 s 的近似值时所产生的误差 r_n 可估计为

$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots<r^{n+1}+r^{n+2}+\cdots=\frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

例 4. 研究级数的收敛性并估计误差:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots.$$

解 $$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{u^n}}=\frac{1}{u}\to0,$$

故级数收敛. 误差 r_n 为

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}+\frac{1}{(n+3)^{n+3}}+\cdots$$
$$<\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+1)^{n+2}}+\frac{1}{(n+1)^{n+3}}+\cdots=\frac{1}{n(n+1)^{n}}.$$

积分判定法 设级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

的各项可以看作是区间 $[1,\ \infty)$上正的减函数$f(x)$(连续的)对应于$x=1,2,\cdots,n,\cdots$的各个值:

$$u_1=f(1),\quad u_2=f(2),\cdots,\quad u_n=f(n),\cdots,$$

则广义积分
$$I=\int_1^{\infty}f(x)\,dx$$

收敛或发散时,级数也随之收敛或发散.

考察曲线$y=f(x)$与纵线$x=1,x=n$ 及 x 轴所围成的面积:

$$I_n=\int_1^n f(x)\,dx.$$

由图10.1可见这个面积小于$(n-1)$个高出于曲线上面的矩形之和 $u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}=s_n-u_n$,而大于低入于曲线下面的$(n-1)$个矩形之和 $u_2+u_3+\cdots+u_n=s_n-u_1$,故有

$$s_n-u_1<I_n<s_n-u_n.$$

由此,即得不等式

$$s_n<I_n+u_1 \quad 及 \quad s_n>I_n.$$

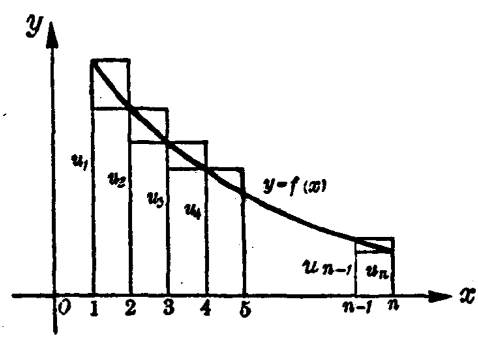

图 10.1

先设 $I=\lim I_n$ 存在. 根据前一不等式,则单调增加数列$s_n<I+u_1$是有界的,因之它必具有极限而级数(1)收敛. 次设 $\lim I_n=\infty$. 根据后一不等式,则有$\lim s_n=\infty$,故极限不存在而级数(1)发散. 证明完毕.

下面举一个例子说明有时用比值法或根值法所不能解决的问题却很容易用积分法来解决.

例 5. 用积分判定法研究 p- 级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \quad (p>0)$$

的敛散性.

解　这时 $u_n=\frac{1}{n^p}$，可取 $f(x)=\frac{1}{x^p}$. 根据 §8.8 例 2，我们知道广义积分

$$I=\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$$

当 $p\leqslant 1$ 积分发散，当 $p>1$ 积分收敛而等于 $\frac{1}{p-1}$. 于是根据积分判定法仍然得到我们在前面用比较法所证出的结果：若 $p\leqslant 1$ 已给级数发散，若 $p>1$ 级数收敛.

§10.4　任意项级数　绝对收敛

现在讲任意项级数，即级数中各项可以有正数、负数、或者零. 首先讲**交错级数**. 所谓交错级数是这样的级数，它的各项是正负相间的，从而可以写成下面的形状：

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots, \tag{1}$$

其中 $u_1, u_2, \cdots$ 是正数. 我们来证明莱布尼兹关于交错级数收敛性的定理：

定理 1. 若交错级数(1)满足条件：

1° $u_n\geqslant u_{n+1}$　($n=1, 2, 3, \cdots$)

2° $\lim u_n=0$,

则级数收敛，其和 $s\leqslant u_1$，其余项 r_n 的绝对值 $|r_n|\leqslant u_{n+1}$.

证　先证明前 $2n$ 项的和的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$ 存在.

把级数的前 $2n$ 项写成两种形式：

$$s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

及

$$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n},$$

由条件 1° 知道所有括弧中的差都不能为负. 首先由第一行可见 s_{2n} 随 n 增大而增大，由第二行可见 s_{2n} 恒小于 u_1. 根据极限存在准则 II (§2.7)知道，当 n 无限增大时，s_{2n} 趋近于一个极限 s，并且 s 不大于