1996年研究生入学考试数学模拟题及题型分析

葛严麟 主编

中国人民大学出版社

1996 年研究生入学考试数学模拟题及题型分析

葛严麟　主编

中国人民大学出版社

(京)新登字156

图书在版编目(CIP)数据

1996年研究生入学考试数学模拟题及题型分析/葛严麟主编
北京:中国人民大学出版社,1995.5

ISBN 7-300-02102-6/G.286

Ⅰ.19…

Ⅱ.葛…

Ⅲ.数学-研究生-入学考试-自学参考资料

Ⅳ.o13

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第05305号

1996年研究生入学考试

数学模拟题及题型分析

葛严麟　主编

出版发行:中国人民大学出版社

(北京海淀路175号　邮码100872)

经　　销:新华书店

印　　刷:北京市丰台区丰华印刷厂印刷

开本:850×1168　毫米/32　印张:12.5

1995年5月第1版　1995年8月第2次印刷

字数:307　册数:21 001—26 000

定价:13.00元

前　　言

为了帮助广大参加研究生入学数学考试的考生复习应考，我们根据国家教委考试中心制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学大纲的要求，对近年来的考题进行了反复的研究，并结合我们在长期考研辅导、阅卷中的实践经验，针对考生在临场答卷中出现的典型错误，编写了这本复习用书。希望通过本书的训练，能使读者在考试中有一个较大的突破。

本书共分两部分：题型分析和模拟试题。题型分析部分突出大纲所要求的概念和有关方法，精选各类题型，进行详细的分析和解答，从而提高考生对各种题型的审题、解题能力。模拟试题部分采用研考实战形式，精心采编各类题型构成套题，针对性强，实用性强，重在强化考生的应试能力，突出训练重点，测试考生对应试内容的记忆、理解、掌握程度。

本书在去年版本的基础上做了一些修改，力求突出近几年考研试题的发展趋势，即证明题难度趋增，计算题愈益灵活多样，综合题型增多。本书的许多题目取自于清华大学题库，以及历届考研试题，取材具有一定的代表性。另外，在本书的的最后，附上“1995年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及参考答案”，供读者模拟应试用。

参加本书编写工作的同志，全是清华大学应用数学系的有经验的教师。全书由葛严麟副教授组织编写，俞雄飞、何建平、陆继

坦、谷立振等老师分别编写了有关内容。本书已经过多次修改，恐仍有不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

编　者

1995 年 3 月于清华

目　录

题型分析部分

模拟试题及答案部分

题型分析部分

第一章　一元函数微积分

§1　极限、连续和导数

1. 极限

数列$\{x_n\}$的极限与数列的前有限项无关，其定义是：如果对于任意$\varepsilon>0$，存在N(自然数)，当$n>N$时，恒有$|x_n-A|<\varepsilon$成立，则称$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$. 要证明$\{x_n\}$的极限不是$A$，则只需要找到一个$\varepsilon_0>0$，使对于任意的自然数$N$，总存在自然数$n_0>N$，使$|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$.

如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$都存在，则下列运算成立；如果上述极限并非都存在，则下列运算不一定成立：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)(\lim\limits_{n\to\infty}y_n)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$　(分母不为零).

函数的极限$\lim\limits_{n\to x_0}f(x)$与函数$f(x)$在$x_0$处的函数值无关，其定义是：如果对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 由于$x\to x_0$有两种方式，即$x>x_0$，$x\to x_0$及$x<x_0$，$x\to x_0$，故极限有左极限、右极限之

分，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$. 显然，

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 当且仅当 } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都存在，则下列四则运算亦成立：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ （分母不为零）.

证明数列极限存在有两种基本方法：一是单调有界数列必有极限，另一个则是夹逼定理. 由于近年来研究生入学试题中很少出现数列极限，因此我们主要讨论函数极限的计算.

常考题型及例题分析

当 $x\to a$ 时，求未定型极限：$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$（可以转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$），$\infty-\infty$（必须先转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$），1^∞，0^0.

常用算法：对$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$.

(1)使用洛比塔法则，对分子、分母分别求导（可能多次），将未定型转化为定型；

(2)当 $a\neq\infty$时，利用初等函数的泰勒展开公式，带皮亚诺余项（具体展开到第几项，视题目中 x 的最高次数决定），尽可能用幂函数代替初等函数（即等价代换），将复杂的式子转化为简单的式子. 一般的情况下 $\sin x$，$\cos x$，$\mathrm{tg}\,x$ 最多展开到第二项；而 $\ln(1\pm x)$，$e^{\pm x}$可能要多展开几项. 特别地，$\sin[u(x)]\sim u(x)$，如果 $u(x)\to 0$.

对于含根号的未定型，可以将根号有理化，将其转化成分子、分母相除形式.

对于 1^{∞}，0^{0} 这种指数形式的极限，无一例外可取对数，化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$. 特殊地，如 $u(x)\to 0$，则$[1+u(x)]^{\frac{1}{u(x)}}\to e$.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}$.　　$(\frac{0}{0})$

解：　用洛比塔法则，

$$\text{原式}\overset{\text{求导}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\cos x}{x(1-x^{2})^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\cos x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(e^{x}+\sin x)=1,$$

或用带皮氏余项的台劳展式代替，

$$1-\sqrt{1-x^{2}}=\frac{1}{2}x^{2}+o(x^{2}),$$

$$e^{x}-\sin x-1=1+x+\frac{x^{2}}{2}-x-1+o(x^{2})=\frac{x^{2}}{2}+o(x^{2}),$$

因此，原极限为 1.

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.　　$(\frac{0}{0})$

解：　去根号是关键，分母有理化.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^{2}}{1+x\sin x-\cos x}$$
$$\overset{\text{求导}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x\cos x+\sin x+\sin x}$$
$$=\frac{4}{3}.$$

例 3　$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\text{arctg}x)^{x}$.　(1^{∞})

解：　令 $y=(\frac{2}{\pi}\text{arctg}x)^{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}x\ln(\frac{2}{\pi}\text{arctg}x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x)}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{\text{求导}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\mathrm{arctg}x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi},$$

所以，原式$=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

例 4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$. $\quad(\frac{0}{0})$

解： 此题尽管含幂$(1+x)^{\frac{1}{x}}$，但不是 1^{∞}，0^0 型是$\frac{0}{0}$型.

原式$\xlongequal{\text{求导}}\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]'$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2+x^3}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2+x^3}$$

$$\xlongequal{\text{求导}}e\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{x(2+3x)}$$

$$=-\frac{e}{2}.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x2}\cos(t^2)dt}{\sin^{10}x}$. $\quad(\frac{0}{0})$

解： 积分与函数极限联系在一起，也是一类题型.

原式$\xlongequal{\text{求导}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-2x\cos x^4}{10\sin^9 x\cos x}\xlongequal{\sin x\text{ 用 }x\text{ 代}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(1-\cos x^4)}{10x^9\cos x}$

$$\xlongequal{\cos x^4\text{ 展开}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\left\{1-\left[1-\frac{1}{2}(x^4)^2\right]+o(x^8)\right\}}{10x^9\cos x}$$

$$=\frac{1}{10}.$$

下面的例题是已知含参数的极限的数值，需要求出参数的值.

例 6　求正常数 a 和 b，使

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1.$$

解：　由于 $bx-\sin x\to 0$（当 $x\to 0$），故

$$\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt\to 0\quad(x\to 0),$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt\overset{\text{求导}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{b-\cos x}\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}=1.$

由 $\sqrt{a+x^2}\to\sqrt{a}>0$，$x^2\to 0(x\to 0)$，故必有

$$\lim_{x\to 0}(b-\cos x)=0，即 b=1.$$

于是，原式左端 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a}\,(1-\cos x)}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$，

故　$a=4$.

例 7　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\displaystyle\int_{-\infty}^c te^{2t}dt$，求 c.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(1+\dfrac{2c}{x-c})^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$，

$$\int_{-\infty}^c te^{2t}dt=\frac{1}{2}e^{2t}\left(t-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^c$$

$$=\frac{1}{2}e^{2c}(c-\frac{1}{2})-\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2t}(t-\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{2}e^{2c}(c-\frac{1}{2}).$$

因此　$\dfrac{1}{2}e^{2c}(c-\dfrac{1}{2})=e^{2c}$，即 $c=\dfrac{5}{2}$.

例 8　设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{a}{x^2}+b\right)=0$，确定 a,b.

解：　此题可用洛比塔法则及等价代换来解.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3}\xlongequal{求导}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x+a+3bx^2}{3x^2},$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}(3\cos 3x+a)=a+3$ 及上述极限的存在性，则必有 $a=-3$. 于是

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x-3+3bx^2}{3x^2}\xlongequal{求导}\lim_{x\to 0}\frac{-9\sin 3x+6bx}{6x}$$
$$\xlongequal{求导}\lim_{x\to 0}\frac{-27\cos 3x+6b}{6},$$

故 $\qquad -27+6b=0$，即 $b=\dfrac{9}{2}$.

如用 $\sin 3x=3x-\dfrac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)$ 代入原式，则

$$原式=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+a}{x^2}+b-\frac{9}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right),$$

易得 $3+a=0, b=\dfrac{9}{2}$. 此法显然简单明了.

这种题型也常常用来求曲线的渐近线.

例 9　试求曲线 $y=\sqrt{x^2-x+1}$ 的斜渐近线.

解：　要求 $y=ax+b$，使 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right]=0$.

用等价代换来解. 当 $|x|\to+\infty$ 时，

$$\sqrt{x^2-x+1}=|x|\sqrt{1+\frac{1-x}{x^2}}$$
$$=|x|\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

因此，对 $x\to+\infty$，有

$$\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)=x(1-a)+\left(-b-\frac{1}{2}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

故由渐近线性质知：$a=1, b=-\dfrac{1}{2}$；对 $x\to-\infty$，

$$\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)=-(1+a)x+\frac{1}{2}-b+o\left(\frac{1}{x}\right),$$