

1996年
研究生
入学考试
数学模拟题
及题型分析

葛严麟 主编

中国
人民大学
出版社

1996 年研究生入学考试 数学模拟題及題型分析

葛严麟 主编



中国人民大学出版社

(京)新登字 158 号

图书在版编目(CIP)数据

1996 年研究生入学考试数学模拟题及题型分析/葛严麟主编
北京:中国人民大学出版社,1995.5

ISBN 7-300-02102-6/G·286

I. 19...

Ⅰ. 葛...

Ⅱ. 数学-研究生-入学考试-自学参考资料

IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 05305 号

**1996 年研究生入学考试
数学模拟题及题型分析**

葛严麟 主编

出版发行:中国人民大学出版社

(北京海淀路 175 号 邮码 100872)

经 销:新华书店

印 刷:北京市丰台区丰华印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米/32 印张:12.5

1995 年 5 月第 1 版 1995 年 8 月第 2 次印刷

字数:307 册数:21 001—26 000

定价:13.00 元

前 言

为了帮助广大参加研究生入学数学考试的考生复习应考,我们根据国家教委考试中心制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学大纲的要求,对近年来的考题进行了反复的研究,并结合我们在长期考研辅导、阅卷中的实践经验,针对考生在临场答卷中出现的典型错误,编写了这本复习用书。希望通过本书的训练,能使读者在考试中有一个较大的突破。

本书共分两部分:题型分析和模拟试题。题型分析部分突出大纲所要求的概念和有关方法,精选各类题型,进行详细的分析和解答,从而提高考生对各种题型的审题、解题能力。模拟试题部分采用研考实战形式,精心采编各类题型构成套题,针对性强,实用性强,重在强化考生的应试能力,突出训练重点,测试考生对应试内容的记忆、理解、掌握程度。

本书在去年版本的基础上做了一些修改,力求突出近几年考研试题的发展趋势,即证明题难度趋增,计算题愈益灵活多样,综合题型增多。本书的许多题目取自于清华大学题库,以及历届考研试题,取材具有一定的代表性。另外,在本书的最后,附上“1995年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及参考答案”,供读者模拟应试用。

参加本书编写工作的同志,全是清华大学应用数学系的有经验的教师。全书由葛严麟副教授组织编写,俞雄飞、何建平、陆继

坦、谷立振等老师分别编写了有关内容。本书已经过多次修改,恐仍有不妥之处,欢迎广大读者批评指正。

编 者

1995 年 3 月于清华

目 录

题型分析部分

第一章 一元函数微积分	3
§ 1 极限、连续和导数	3
§ 2 函数的单调性、极值、证明不等式、作图	22
§ 3 介值定理、中值定理、 ξ 问题、零点问题	32
§ 4 不定积分	40
§ 5 定积分和广义积分	47
§ 6 无穷级数	66
§ 7 傅立叶级数	84
§ 8 常微分方程	89
第二章 多元函数微积分	102
§ 1 空间解析几何	102
§ 2 多元函数的基本概念	109
§ 3 多元函数微分法	111
§ 4 多元函数微分法的应用	117
§ 5 重积分及其应用	120
§ 6 曲面积分及其应用	128
§ 7 曲线积分及其应用	134
第三章 线性代数	141

§ 1	行列式	141
§ 2	矩阵	148
§ 3	n 维向量空间	153
§ 4	线性方程组	162
§ 5	特征值、特征向量、矩阵对角化、 对称矩阵、正交矩阵	169
§ 6	二次型	175
第四章	概率论	186
§ 1	随机事件及其概率	186
§ 2	随机变量及其分布	191
§ 3	多维随机变量	194
§ 4	随机变量的数字特征	203
§ 5	大数定律与中心极根定理	211
第五章	复变函数	214
§ 1	复数与复变函数的基本概念	214
§ 2	解析函数	216
§ 3	保角映射	220
§ 4	级数与孤立奇点	223
§ 5	积分与留数	228
第六章	经济数学	234

模拟试题及答案部分

数学(一)模拟试题及答案	239
模拟试题(I)	239
参考答案	243
模拟试题(II)	250
参考答案	253
模拟试题(III)	260

参考答案	264
数学(二)模拟试题及答案	271
模拟试题(Ⅰ)	271
参考答案	274
模拟试题(Ⅱ)	279
参考答案	282
模拟试题(Ⅲ)	287
参考答案	290
数学(三)模拟试题及答案	297
模拟试题(Ⅰ)	297
参考答案	299
模拟试题(Ⅱ)	304
参考答案	306
模拟试题(Ⅲ)	311
参考答案	313
数学(四)模拟试题及答案	319
模拟试题(Ⅰ)	319
参考答案	322
模拟试题(Ⅱ)	327
参考答案	331
模拟试题(Ⅲ)	336
参考答案	339
数学(五)模拟试题及答案	344
模拟试题(Ⅰ)	344
参考答案	347
模拟试题(Ⅱ)	352
参考答案	356
模拟试题(Ⅲ)	360

参考答案.....	363
1995 年全国攻读硕士学位研究生入学考试	
数学试题及参考答案	368

题型分析部分

第一章 一元函数微积分

§ 1 极限、连续和导数

1. 极限

数列 $\{x_n\}$ 的极限与数列的前有限项无关, 其定义是: 如果对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 N (自然数), 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - A| < \epsilon$ 成立, 则称 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$. 要证明 $\{x_n\}$ 的极限不是 A , 则只需要找到一个 $\epsilon_0 > 0$, 使对于任意的自然数 N , 总存在自然数 $n_0 > N$, 使 $|x_{n_0} - A| \geq \epsilon_0$.

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 都存在, 则下列运算成立; 如果上述极限并非都存在, 则下列运算不一定成立:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (\text{分母不为零}).$$

函数的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值无关, 其定义是: 如果对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立, 则称 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 由于 $x \rightarrow x_0$ 有两种方式, 即 $x > x_0, x \rightarrow x_0$ 及 $x < x_0, x \rightarrow x_0$, 故极限有左极限、右极限之

分,即 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. 显然,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 当且仅当 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在,则下列四则运算亦成立:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (\text{分母不为零}).$$

证明数列极限存在有两种基本方法:一是单调有界数列必有极限,另一个则是夹逼定理.由于近年来研究生入学试题中很少出现数列极限,因此我们主要讨论函数极限的计算.

常考题型及例题分析

当 $x \rightarrow a$ 时,求未定型极限: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$ (可以转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$), $\infty - \infty$ (必须先转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$), $1^\infty, 0^0$.

常用算法:对 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

(1) 使用洛比塔法则,对分子、分母分别求导(可能多次),将未定型转化为定型;

(2) 当 $a \neq \infty$ 时,利用初等函数的泰勒展开公式,带皮亚诺余项(具体展开到第几项,视题目中 x 的最高次数决定),尽可能用幂函数代替初等函数(即等价代换),将复杂的式子转化为简单的式子.一般的情况下 $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ 最多展开到第二项;而 $\ln(1 \pm x), e^{\pm x}$ 可能要多展开几项.特别地, $\sin[u(x)] \sim u(x)$, 如果 $u(x) \rightarrow 0$.

对于含根号的未定型,可以将根号有理化,将其转化成分子、分母相除形式.

对于 $1^\infty, 0^0$ 这种指数形式的极限, 无一例外可取对数, 化为 $\frac{0}{0}$

或 $\frac{\infty}{\infty}$. 特殊地, 如 $u(x) \rightarrow 0$, 则 $[1+u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} \rightarrow e$.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}}$. $(\frac{0}{0})$

解: 用洛比塔法则,

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x) = 1, \end{aligned}$$

或用带皮氏余项的台劳展式代替,

$$1 - \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$e^x - \sin x - 1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

因此, 原极限为 1.

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$. $(\frac{0}{0})$

解: 去根号是关键, 分母有理化.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x\sin x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1+x\sin x - \cos x} \\ & \stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x\cos x + \sin x + \sin x} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

例 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2}{\pi} \arctg x)^x$. (1^∞)

解: 令 $y = (\frac{2}{\pi} \arctg x)^x$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\frac{2}{\pi} \arctg x)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x)}{\frac{1}{x}} \\
&\stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi},
\end{aligned}$$

所以, 原式 $= e^{-\frac{2}{\pi}}$.

例 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}. \quad (\frac{0}{0})$

解: 此题尽管含幂 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 但不是 $1^\infty, 0^0$ 型是 $\frac{0}{0}$ 型.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)^{\frac{1}{x}}]' \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2 + x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2 + x^3} \\
&\stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{x(2+3x)} \\
&= -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{\sin^{10} x}. \quad (\frac{0}{0})$

解: 积分与函数极限联系在一起, 也是一类题型.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2x \cos x^4}{10 \sin^9 x \cos x} \stackrel{\sin x \text{ 用 } x \text{ 代}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1 - \cos x^4)}{10x^9 \cos x} \\
&\stackrel{\cos x^4 \text{ 展开}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \left\{ 1 - \left[1 - \frac{1}{2}(x^4)^2 \right] + o(x^8) \right\}}{10x^9 \cos x} \\
&= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

下面的例题是已知含参数的极限的数值, 要求出参数的值.

例 6 求正常数 a 和 b , 使

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 1.$$

解: 由于 $bx - \sin x \rightarrow 0$ (当 $x \rightarrow 0$), 故

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0),$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt \stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{b - \cos x} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}} = 1.$$

由 $\sqrt{a+x^2} \rightarrow \sqrt{a} > 0, x^2 \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$, 故必有

$$\lim_{x \rightarrow 0} (b - \cos x) = 0, \text{ 即 } b = 1.$$

$$\text{于是, 原式左端} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{a}(1 - \cos x)} = \frac{2}{\sqrt{a}} = 1,$$

故 $a = 4$.

例 7 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \int_{-\infty}^c te^{2t} dt$, 求 c .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c}} \right]^{\frac{2cx}{x-c}} = e^{2c},$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^c te^{2t} dt &= \frac{1}{2} e^{2t} \left(t - \frac{1}{2} \right) \Big|_{-\infty}^c \\ &= \frac{1}{2} e^{2c} \left(c - \frac{1}{2} \right) - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^{2t} \left(t - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{2c} \left(c - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \frac{1}{2} e^{2c} \left(c - \frac{1}{2} \right) = e^{2c}, \text{ 即 } c = \frac{5}{2}.$$

例 8 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b \right) = 0$, 确定 a, b .

解: 此题可用洛比塔法则及等价代换来解.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + ax + bx^3}{x^3} \stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos 3x + a + 3bx^2}{3x^2},$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0} (3\cos 3x + a) = a + 3$ 及上述极限的存在性, 则必有 $a = -3$.

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos 3x - 3 + 3bx^2}{3x^2} \stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9\sin 3x + 6bx}{6x} \\ &\stackrel{\text{求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-27\cos 3x + 6b}{6}, \end{aligned}$$

故 $-27 + 6b = 0$, 即 $b = \frac{9}{2}$.

如用 $\sin 3x = 3x - \frac{1}{3!}(3x)^3 + o(x^3)$ 代入原式, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+a}{x^2} + b - \frac{9}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right),$$

易得 $3+a=0, b=\frac{9}{2}$. 此法显然简单明了.

这种题型也常常用来求曲线的渐近线.

例 9 试求曲线 $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ 的斜渐近线.

解: 要求 $y = ax + b$, 使 $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b)] = 0$.

用等价代换来解. 当 $|x| \rightarrow +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x + 1} &= |x| \sqrt{1 + \frac{1-x}{x^2}} \\ &= |x| \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \end{aligned}$$

因此, 对 $x \rightarrow +\infty$, 有

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b) = x(1-a) + \left(-b - \frac{1}{2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

故由渐近线性质知: $a=1, b=-\frac{1}{2}$; 对 $x \rightarrow -\infty$,

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b) = -(1+a)x + \frac{1}{2} - b + o\left(\frac{1}{x}\right),$$