BIANFENFA YOUXIANYUANFA
HE WAITUIFA

变分法 有限元法和外推法

刘诗俊 编著

中国铁道出版社

变分法 有限元法和外推法

刘诗俊　编著

中国铁道出版社

1986年·北京

变分法有限元法和外推法

刘诗俊　编著

责任编辑　王能远　封面设计　翟　达

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：850×1168毫米 $\frac{1}{32}$　印张：4.75　字数：123 千

1 9 8 6 年 4 月　第 1 版　第 1 次印刷

印数：0001—7,000 册　定价：1.30元

内 容 简 介

本书介绍三种数学工具，即变分法、有限元法和外推法。系统地叙述了古典变分法的基本内容，介绍有限元法及其以变分法为基础的数学思想。外推法是一种数值逼近计算方法，本书谈到外推法在常微分方程和偏微分方程数值解中的应用，着重介绍我国学者首创的陈传淼-林群公式，附有实例。

读者对象：大学工学院师生，工程技术人员及从事计算方法研究工作的科研人员。

2008/12/19

序

本书向读者介绍三种数学工具，即变分法、有限元法和外推法。它们在自然科学和工程技术中有广泛的应用。

变分法具有理论的完整性和应用的普遍性。它用统一的变分原理解释了无数的自然现象，又用巧妙的计算解决了多种实际问题。无论是在理论力学、弹性力学和塑性力学中，还是在电磁场理论、相对论和量子力学中，只要应用变分原理，就使这些学科显示出内在的和谐。在本书第二章中，系统地叙述了古典变分学的基本内容。读完了这一章，您就可以用变分法来解决工程技术问题了。

有限元法是最近二十多年来最引人注意的计算方法。有趣的是：这个重要方法是分别由数学家、物理学家和工程师独立地创立的。也就是说，它有三个来源。目前在我国各大学的非数学专业中讲的有限元法，几乎都是从梁、板等具体问题引入算法，着重于实例。这样使学生能较快地学会有限元算法。但是，这样做也有一些缺陷，使毕业生很难在有限元理论方面进行研究，对有限元结果的误差估计也很难掌握。对当代正在发展的各种有限元方法（如非协调元、杂交元、边界元……）较难接受。为弥补这一缺陷，在本书第四章中主要是讲有限元法的数学思想，着重指出有限元法是在变分法这棵古树枝头开放的新花！看了这一章，对您今后攻读有限元理论也许是有好处的。

外推法是一种很好的近似计算方法。对于已求得的低精度近似值，只要作几次最简单的四则运算，立即得到高精度的近似值！可以说它是对近似值进行“精加工”的妙法！就是在广泛使用电子计算机的国家中，技术人员对外推法也十分欢迎。因为这种算法可以大大缩短计算时间，程序又简单。早在1910年，

L.F.Richardson就提出了外推法，但多年来它几乎只用来解决一维问题。1965年苏联学者在偏微分方程的外推方面有了突破。1983年，苏联人马尔秋克和谢多洛夫的《差分法及其外推》一书的英文本在西方出版，此书在欧美数学界引起震动。外推法的研究又活跃起来。1980年以来，中国学者林群、陈传淼、吕涛、沈树民等人研究有限元解的外推，取得巨大进展，写下了外推法中的新篇章，引起国内外的重视。但是在国内的教科书中，关于偏微分方程数值解的外推法还是空白区。

在本书第五章中介绍了外推法和它在偏微分方程中的应用，试图填补这一空白。

只要具有工学院本科二年级的数学程度，就可以看懂这本书。如果您只想学外推法，可直接看第五章。如果您关心的是有限元法的数学思想，可只看第一、四章。要是您对变分法的应用感兴趣，可只看第一、二、三章。不过，我还是劝您看看第五章外推法，它对您的业务工作也许很有用。

作　者

1984年12月，

于华东交通大学。

目　录

第一部分　变分法和有限元法

第一章　引　　论

先谈一点变分法的历史。

变分学历史上第一个重要问题是牛顿提出的。他研究了所谓"水桶问题"，大概是这样：一水桶以固定角速度绕对称轴旋转，问桶中水面呈什么形状时所受阻力最小？他把这个问题归结为：求函数$y=f(x)$，使积分

$$Q[f(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)[f'(x)]^3}{1+[f'(x)]^2}dx$$

取最小值。这问题已经是典型的变分问题，但牛顿当年用来解决问题的方法还不是变分学中的基本方法。

导致变分法建立的著名问题是瑞士数学家约翰、贝努里在1696年提出的，即"最速降线问题"。此问题发表于当年6月号的《教师学报》上。问题一提出来，立即吸引了当时世界上许多最卓越的数学家的注意。在该杂志1697年5月号上刊登了牛顿、莱布尼兹、洛比达和贝努里兄弟①的解法。他们殊途同归，用各不相同的方法得到同一解答。答案是有趣的，原来"最速降线"居然是摆线！这些解题方法中蕴含着天才的思想，就像铀矿中储藏着铀-235一样。但是只靠这些方法，变分法是创立不起来的。正如只依靠古代的极限思想无法建立微分法一样。那么，谁来清除杂质，炼出真金呢？历史安排了大数学家尤拉！他是创造各种数学方法的大师，他创立的方法几乎总带有明晰性和一般性。他在1734年解决了更广泛的最速降线问题，但他对自己当时用的方法还不满意。他开始寻找解决这类问题的一般方法，这种方法终

① "贝努里兄弟"指James Bernoulli和他的弟弟John Bernoulli。

于被他找到了，变分法也就建立了。尤拉在1736年的论文中指出：要使积分

$$Q[y]=\int_{x_1}^{x_2} F[x,y(x),y'(x)]dx \qquad (1)$$

取极值，函数$y(x)$必须满足

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad (2)$$

方程（2）就是著名的“尤拉方程”。不过，许多重大数学成果的第一个证明往往失之繁琐，尤拉这次也不例外。后来法国大数学家拉格兰日改进了尤拉的证明，使之完全符合数学分析的精神而且十分简洁，他在1755年把这个证明告诉了尤拉。至此，变分学作为一个新的数学分支算是形成了。

刚才谈到的是变分法古典部分的内容，它所研究的主要问题可以归结为：在适当的函数集合内选择函数 $y=f(x)$，使积分（1）取极值。解决这一问题又归结为解尤拉方程（2）。看起来问题似乎并不复杂，办法也很平常，不过解一个微分方程罢了。其实不然，我们依靠这种方法，就能用统一的数学程序来解决自然界和其他方面的千差万别的问题，就能用奇妙的变分原理解释无数的自然现象。

参 考 文 献

〔1〕M·克莱因，《古今数学思想》，上海科技出版社，1980。

第二章 变分法初步

§1 泛 函

在这里不介绍泛函的精确定义，因为那样做需要比较多的现代数学知识，势必兜大圈子。实际上，用几个例子也可以说明“泛函”这一概念的实质。

例1 设函数$y=f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且$f(x)\geqslant 0$，则微分

$$Q[f]=\int_0^1 f(x)dx$$

是曲线$y=f(x)$与直线$y=0$之间的面积①。显然，对任何一个在$[0,1]$上连续且非负的函数$y=f(x)$来说，$Q[f]$有唯一确定的值与它对应。比方说，当

$$f(x)=x$$

则

$$Q[f(x)]=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

当

$$f(x)=\sqrt{x}$$

则

$$Q[f(x)]=\int_0^1\sqrt{x}\ dx=\frac{2}{3}$$

现在我们回忆一下一元函数的定义。对于两个变量x和y，x在某数集D中取值，y在某数集R中取值。如果x任取D中某值，y都有唯一确定的值与它对应，那么我们就称变量x为自变量，变量y为自变量x的函数。我们常说函数y的值由自变量x

---

① 若$f(a)$及$f(b)$均为正，则$Q[f]$是由曲线$y=f(x)$，曲线$y=0$，直线$x=a$及直线$x=b$围成的图形的面积。

的值唯一确定。函数定义是大家熟悉的，其实质是“唯一确定”四个字。再返观例 1，当函数$f(x)$给定了，$Q[f(x)]$的值就“唯一确定”了，这意味着什么？这说明我们可以把变量$Q[f(x)]$看成是“函数$f(x)$的函数”。这$Q[f(x)]$也记为$Q[f]$，在此，f类似自变量，Q是f的函数。

例 2 我们把一切在$[a, b]$上连续的函数（指实函数，以下同此）的集合记为$C[a, b]$。考虑积分

$$M[f]=\int_a^b f(x)dx$$

任取一个在$[a,b]$上连续的函数$f(x)$，M有唯一确定的值与它对应。M可视为f的函数。此例和例 1 比较，f的容许范围广些。

我们看出在M和f之间，有一种函数关系，但这是推广了的函数关系，也就是下文中要讲的“泛函”。原来所谓“泛函”，不过是更广泛意义下的函数关系罢了。

例 3 把$f(x)$在$[a, b]$上的零点个数①记作$N[f]$，则任取一个在$[a, b]$上有定义的实函数$f(x)$，N有确定的值与它对应。如取$[a, b]$为$[0, 2\pi]$，则

$$N[\cos x]=2$$
$$N[\sin x]=3$$
$$N[x^2-1]=1$$

从以上几个例子中，我们可以概括出如下的重要概念：把具备某种性质的函数的集合记作D。对于集合D中的任何函数$f(x)$（即对任何$f\in D$），变量Q都有唯一确定的值与它对应，那么变量Q叫做依赖于函数$f(x)$的泛函，记为

$$Q=Q[f(x)] \quad 或 \quad Q=Q[f]②$$

这是泛函概念的一个粗浅的介绍，对于这本书来说，这种说明已经够用了。

---

① 我们把m重零点算m个零点。如$f(x)=(x-3)^2$在$[1, 4]$上有两个零点。

② $Q[f(x)]$也记作$Q[y(x)]$，在此$y=y(x)=f(x)$。

§2 变　　分

1． 泛函$Q[y(x)]$中，$y(x)$的变分

对于泛函$Q[y(x)]$，$y(x)$是集合D中任何元素。如果$y(x)$由$y_0(x)$变成$y_1(x)$，则$y_1(x)-y_0(x)$叫做$y(x)$在$y_0(x)$上的变分（$y_0(x)$及$y_1(x)$均属于D），记作

$$\delta y=y_1(x)-y_0(x) \tag{3}$$

我们以后常用

$$\delta y=\overline{y}(x)-y(x) \tag{4}$$

这是指在$y(x)$上的变分。

2． 连续泛函

对于泛函$Q[y(x)]$而言，如果当$y(x)$的变分δy充分小时，Q的改变量可以任意小，那么就称泛函$Q[y(x)]$是连续的。例如，对于泛函

$$Q[y(x)]=\int_a^b y(x)dx$$

而言，当$y(x)\in C[a, b]$（参看本章§1的例2），$Q[y(x)]$有定义。对任给的$\varepsilon>0$，只要

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y(x)-y_0(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

（$y(x)$及$y_0(x)$均属于$c[a, b]$）

则

$$|Q[y(x)]-Q[y_0(x)]|=\left|\int_a^b[y(x)-y_0(x)]dx\right|$$

$$\leqslant\int_a^b|y(x)-y_0(x)|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon$$

可见 $Q[y(x)]=\int_a^b y(x)dx$是连续泛函。

3． 线性泛函

如果泛函 $Q[y(x)]$与 $y(x)$的关系是线性的，也就是说，Q

满足以下条件

1） $Q[cy(x)]=CQ[y(x)]$ （c为任意常数）

2） $Q[y_1(x)+y_2(x)]=Q[y_1(x)]+Q[y_2(x)]$①

这时，称$Q[y(x)]$为线性泛函。例如

$$Q[y(x)]=\int_a^b y(x)dx$$

是线性泛函。事实上

$$Q[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)]=\int_a^b[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)]dx$$

$$=c_1\int_a^b y_1(x)dx+c_2\int_a^b y_2(x)dx=c_1Q[y_1(x)]$$

$$+c_2Q[y_2(x)]$$

但是

$$Q[y(x)]=\int_a^b y^2(x)dx$$

不是线性泛函，这一点请读者自己验证。

4． 泛函的变分

在上文中已经说明“泛函”是函数这一概念的推广。现在我们还要指出，所谓“泛函的变分”正是“函数的微分”这一概念的推广。如果明白了这一点，您就懂得了“变分”概念的实质。为了把问题说清楚，我们有必要先复习一下“微分”这一概念。

现在我提一个看来非常简单的问题：什么是函数$y=f(x)$的微分？

如果您马上回答说：函数的微分就是

$$dy=f'(x)dx$$

虽然我不能说您答错了，但是您并没有说清楚“微分”的实质。要是您在谈到微分定义时，只能说出上面这句话来，那么恕我直言，您并没有学好数学分析。

究竟什么是函数的微分呢？我们知道函数关系$y=f(x)$往往

① 此二条件可用一个式子来表达，即
$Q[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)]=c_1Q[y_1(x)]+c_2Q[y_2(x)]$对任何常数$c_1,c_2$成立。

是非常复杂的，因此函数$f(x)$的增量$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$也往往是十分复杂的。例如，当

$$f(x)=\sin x$$

这时函数的增量是

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

当x已知，用此式由Δx的值可得Δy的值，但Δy与Δx之间的函数关系是非线性的。在数学分析中曾经指出：如果函数$y=f(x)$在给定点x处有导数$f'(x)$，这时

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha \quad （当\Delta x\to 0时，\alpha\to 0）$$

所以

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x=dy+\alpha\cdot\Delta x \tag{5}$$

仔细观察此式，我们发现函数的增量由两项相加而得。第一项是$dy=f'(x)\Delta x$，当x固定时$f'(x)$是常数，所以dy是与Δx成比例的。通常说dy是Δx的线性函数。第二项是$\alpha\Delta x$，当$\Delta x\to 0$时$\alpha\to 0$，所以

$$\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}\longrightarrow 0 \quad （当\Delta x\to 0）$$

可见$\alpha\cdot\Delta x$是比Δx高阶的无穷小量，即

$$\alpha\cdot\Delta x=0(\Delta x) \quad （当\Delta x\to 0）$$

所以

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+0(\Delta x) \tag{6}$$

可见 $dy=f'(x)\Delta x$是函数增量的主要部分。也就是说$f'(x)\Delta x$既是Δy的线性部分，又是Δy的主要部分，即所谓“线性主要部分”。我们把函数增量的线性主要部分$f'(x)\Delta x$叫做函数的微分。这样讲，才说明了微分概念的实质。

由此可见，当$|\Delta x|$充分小的时候，我们就可用微分$dy=$

$f'(x)\Delta x$作为增量Δy的近似值了。再来看$y=\sin x$这个函数，就有如下近似式

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x\approx f'(x)\Delta x=\cos x\cdot\Delta x$$

用$\cos x\cdot\Delta x$作为Δy 的近似值，这就方便多了。可以说，用线 性关系来逼近非线性关系，这是微积分学的基本思想!

有了以上的准备，我们就可以讲泛函的变分了。先看一例，对于泛函 $Q[y(x)]=\int_a^b y^2(x)dx$，它的增量可表为

$$\begin{aligned}\Delta Q&=Q[y_1(x)]-Q[y(x)]=Q[y(x)+\delta y]-Q[y(x)]\\&=\int_a^b[y(x)+\delta y]^2dx-\int_a^b y^2(x)dx\\&=\int_a^b[y^2(x)+2y(x)\delta y+(\delta y)^2]dx-\int_a^b y^2(x)dx\\&=\int_a^b 2y(x)\,\delta y dx+\int_a^b(\delta y)^2dx\end{aligned}$$

在此 $\quad\delta y=y_1(x)-y(x)$

可见，此泛函Q的增量ΔQ由两项相加而得。将第一项记为

$$\int_a^b 2y(x)\delta y dx=T[y(x)],\delta y]$$

当函数$y(x)$固定时，$T[y(x),\delta y]$是关于δy的线性 泛 函。这 是因为对任何常数C而言，有

$$\begin{aligned}T[y(x),C\delta y]&=\int_a^b 2y(x)C\delta y dx\\&=C\int_a^b 2y\delta y dx=CT[y(x),\delta y]\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}T[y(x),\delta y_1+\delta y_2]&=\int_a^b 2y(x)(\delta y_1+\delta y_2)dx\\&=\int_a^b 2y(x)\delta y_1dx+\int_a^b 2y(x)\delta y_2dx\\&=T[y(x),\delta y_1]+T[y(x),\delta y_2]\end{aligned}$$

我们再来观察第二项$\int_a^b(\delta y)^2dx$。在此$\delta y=y_1(x)-y(x)$，其中

$y(x)$是已给定的函数，$y_1(x)$是任取的函数，$y(x)$及$y_1(x)$ 均属于$C[a,b]$

$$\text{若} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |y_1(x)-y(x)| = \max|\delta y| \longrightarrow 0$$

由

$$\left|\int_a^b (\delta y)^2 dx\right| \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b} (\delta y)^2 (b-a)$$

可知

$$\frac{\int_a^b (\delta y)^2 dx}{\max|\delta y|} \longrightarrow 0$$

这就是说，当$\max|\delta y| \longrightarrow 0$ 时，$\int_a^b (\delta y)^2 dx$是比$\max|\delta y|$ 高价的无穷小量，不妨记为

$$\int_a^b (\delta y)^2 dx = 0(\delta y)$$

于是

$$\Delta Q = T[y(x),\delta y] + 0(\delta y)$$

这个公式与（6）式何等相似！它指出一个事实，即泛函 $Q[y(x)] = \int_a^b y^2(x)dx$ 的增量可分解为两部分，第一部分是δy的线性泛函，第二部分是比δy 更高阶的无穷小量。这种情形与函数增量的状况多么相似！敏悟的读者立刻会想到："这第一部分$T[y(x),\delta y]$是不是泛函Q 的变分呢？正是这样！现在我们就来叙述"函数的变分"的定义。

定义 对于泛函$Q[y(x)]$，给$y(x)$以增量δy（即$y(x)$的变分，参看本章§2中的第（4）式），则泛函Q有增量 $\Delta Q = Q[y(x)+\delta y] - Q[y(x)]$。如果$\Delta Q$可表为

$$\Delta Q = T[y(x),\delta y] + \beta[y(x),\delta y] \qquad (7)$$

在此，$T[y(x),\delta y]$对δy而言（当$y(x)$给定）是线性泛函而

$$\frac{\beta[y(x),\delta y]}{\max|\delta y|} \to 0 \quad (\text{当}y(x)\text{固定，}\max|\delta y| \longrightarrow 0)$$

那么，$T[y(x),\delta y]$称为泛函的变分，记作δQ。可见泛函 $Q[y$

$(x)]$的变分δQ是Q的增量的“线性主要部分”。初学者应将“泛函的变分”与“函数的微分”这两个定义作仔细的比较，直到您懂得了后者是前者的推广为止。

再举一例。将在[0，1]上有定义的函数的集合记作D。任取$y(x)\in D$，$y^2(0)$的值是唯一确定的，所以$Q[y(x)]=y^2(0)$是定义在D上的一个泛函。当$y(x)$取定，求此泛函Q的变分δQ。显然

$$\begin{aligned}\Delta Q=Q[y(x)+\delta y]-Q[y(x)]&=[y(x)+\delta y]^2_{x=0}\\ -y^2(0)&=y^2(0)+2y(0)\cdot\delta y(0)+[\delta y(0)]^2\\ -y^2(0)&=2y(0)\delta y(0)+[\delta y(0)]^2\end{aligned}$$

在此，$\delta y(0)=\delta y|_{x=0}=[y_1(x)-y(x)]_{x=0}$

观察　$\Delta Q=2y(0)\delta y(0)+(\delta y(0))^2$，可以看出

$2y(0)\delta y(0)=T[y(x),\delta y]$是关于$\delta y$的线性泛函，又当$\max|\delta y|\longrightarrow 0$时，

$$\frac{(\delta y(0))^2}{\max|\delta y|}\leqslant\frac{(\max|\delta y|)^2}{\max|\delta y|}=\max|\delta y|\longrightarrow 0$$

可见$2y(0)\delta y(0)$是ΔQ的线性主要部分，也就是Q的变分。即

$$\delta Q=2y(0)\delta y(0)$$

注意，对于函数$u(x)=y^2(x)$，它的微分是

$$du=2y(x)dx$$

此微分式和上面的变分式是多么相似！这使我们想到泛函的变分与函数的导数也许在计算方面有联系。事情果然如此。现在来介绍一条常用的定理。它的大意是：当泛函$Q[y(x)]$的变分存在，这时我们固定$y(x)$和$\delta y=y_1(x)-y(x)$，考虑

$$Q[y(x)+\alpha\delta y]$$

显然，它是变量α的函数，可记为

$$Q[y(x)+\alpha\delta y]=\varphi(\alpha)$$

不但如此，而且函数$\varphi(\alpha)$在$\alpha=0$处的导数$\varphi'(0)$就等于泛函$Q[y(x)]$的变分。现在来证明此定理。

定理　如果泛函$Q[y(x)]$的变分$\delta Q=T[y(x),\delta y]$存在，