

51.612654

11

# 微 积 分 学 教 程

(修 訂 本)

第一卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

叶 彦 谦 等 译

人 民 教 育 出 版 社

本书第一卷原根据苏联国立技术理论书籍出版社(Гостехиздат)出版的菲赫金哥尔茨(Г. М. Фихтенгольц)著“微积分学教程”(Курс дифференциального и интегрального исчисления)第一卷1951年第三版译出。现在根据原书1958年第四版修订过,原书在这版中作了局部的修改和补充。

本分册是第一卷的第五至第七三章,紧接前一分册的第一至第四章,本分册的内容主要是讲多元函数、函数行列式及其应用、微分学在几何上的应用,最后有个附录,提到了函数推广的问题。

原书为苏联高等教育部审定的综合大学数学系教学参考书。可以作我国综合大学数学系教学参考用书。

ZNBZ/05

## 微积分学教程

第一卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

叶彦谦等译

北京市书刊出版业营业许可证出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号K13010·154 开本 850×1168 1/32 印张 8 10/16

字数 247,000 印数 40,501—48,300 定价(6) 0.85

1955年1月第1版

1959年9月第2版(修订本) 1964年9月北京第13次印刷

## 第二分册目录

### 第五章 多元函数

§ 1. 基本概念 .....	339
159. 变量之间的函数关系·例題(349) 160. 二元函数及其定义域(340) 161. $n$ 維 算术空間(344) 162. $n$ 維空間内的区域举例(347) 163. 开域及闭域的一般定义 (349) 164. $n$ 元函数(352) 165. 多元函数的極限(354) 166. 变成整序变量的情 形(356) 167. 例題(358) 168. 累次極限(360)	
§ 2. 連續函数 .....	363
169. 多元函数的連續性及間断(363) 170. 連續函数的运算(365) 171. 在城內連續 的函数·波查諾-柯西定理(366) 172. 波查諾-魏施德拉司預备定理(367) 173. 魏 施德拉司定理(370) 174. 均匀連續性(371) 175. 薄萊尔預备定理(373) 176. 基 本定理的新証明(374)	
§ 3. 多元函数的导数及微分 .....	376
177. 偏导数及偏微分(376) 178. 函数的全增量(379) 179. 全微分(382) 180. 二 元函数的几何說明(384) 181. 复合函数的导数(388) 182. 例題(389) 183. 有限 增量公式(392) 184. 沿給定方向的导数(393) 185. (一阶)微分的形式不变性(396) 186. 应用全微分于近似算法(398) 187. 齐次函数(400) 188. 欧拉公式(402)	
§ 4. 高阶导数及高阶微分 .....	403
189. 高阶导数(403) 190. 关于混合导数的定理(406) 191. 推广到一般情形(409) 192. 复合函数的高阶导数(411) 193. 高阶微分(412) 194. 复合函数的微分(416) 195. 戴劳公式(417)	
§ 5. 極值·最大值及最小值 .....	420
196. 多元函数的極值·必要条件(420) 197. 充分条件(二元函数的情形)(422) 198. 充分条件(一般情形)(426) 199. 極值不存在的条件(429) 200. 函数的最大 值及最小值·例題(431) 201. 应用問題(435)	

### 第六章 函数行列式及其应用

§ 1. 函数行列式的性質 .....	444
202. 函数行列式(雅谷比式)的定义(444) 203. 雅谷比式的乘法(445) 204. 函数矩 陣(雅谷比矩陣)的乘法(447)	
§ 2. 隱函数 .....	450

205. 一元隐函数的概念(450)	206. 隐函数的存在(452)	207. 隐函数的可微性(455)	208. 多元的隐函数(457)	209. 隐函数导数的求法(464)	210. 例题(467)
§ 3. 隐函数理论的一些应用	472				
211. 相对极值(472)	212. 拉格朗奇不定乘法(475)	213. 相对极值的充分条件(476)	214. 例题及应用题(477)	215. 函数的独立性的概念(482)	216. 雅谷比矩陣的秩(484)
§ 4. 换元法	488				
217. 一元函数(488)	218. 例题(490)	219. 多元函数·自变量的变换(493)	220. 微分的求法(494)	221. 换元的一般情形(495)	222. 例题(497)

## 第七章 微分学在几何上的应用

§ 1. 曲线及曲面的解析表示法	506	
223. 平面曲线(直角坐标制)(506)	224. 例题(508)	225. 机械性产生的曲线(511)
226. 平面曲线(极坐标制). 例题(515)	227. 空间的曲面和曲线(519)	228. 参变表示式(521)
229. 例题(523)		
§ 2. 切线及切面	526	
230. 用直角坐标制时平面曲线的切线(526)	231. 例题(528)	232. 用极坐标制时的切线(531)
233. 例题(532)	234. 空间曲线的切线, 曲面的切面(533)	235. 例题(538)
236. 平面曲线的奇异点(539)	237. 曲线用参变表示式的情形(544)	
§ 3. 曲线的相切	546	
238. 曲线族的包线(546)	239. 例题(550)	240. 特征点(553)
241. 二曲线相切的级(555)	242. 曲线之一用隐式表示的情形(557)	243. 密切曲线(559)
244. 密切曲线的另一求法(561)		
§ 4. 平面曲线的长	562	
245. 预备定理(562)	246. 曲线的方向(563)	247. 曲线的长, 弧长的可加性(565)
248. 可求长的充分条件, 弧的微分(567)	249. 用弧作为参变量, 切线的正向(570)	
§ 5. 平面曲线的曲率	574	
250. 曲率的概念(574)	251. 曲率圆及曲率半径(577)	252. 例题(579)
253. 曲率中心的坐标(583)	254. 渐屈线及渐伸线的定义; 渐屈线的求法(584)	255. 渐屈线及渐伸线的性质(587)
256. 渐伸线的求法(591)		

## 附录 函数推广的问题

257. 一元函数的情形(593)	258. 关于二维空间的问题(594)	259. 辅助命题(597)
260. 关于推广的基本定理(600)	261. 推广到一般情况(601)	262. 总结(604)
字义索引 人名对照表		

## 第五章 多元函数

### § 1. 基本概念

159. 变量之间的函数关系·例题 到现在为止,我们只研究过两个变量的共同变动,而它们之中的一个依赖于另一个:由自变量的数值已能完全决定因变量或函数的数值。然而在科学上及生活上常会遇见出现有几个自变量的情形,于是要想确定函数的数值,就必须先确定所有这些自变量在同一个时候各自所取的数值。

1) 例如,圆柱体的体积  $V$  是它的底半径  $R$  及高  $H$  的函数; 这些变量之间的关系用公式

$$V = \pi R^2 H$$

来表示,由这公式,若已知自变量  $R$  及  $H$  的数值,就可以决定对应的  $V$  的数值。

圆锥台的体积  $V$  显然是三个自变量——两底的半径  $R$  及  $r$  以及高  $H$  的函数,表示这函数的公式是:

$$V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

2) 按照欧姆定律,电路中的电压  $V$  与线路的电阻  $R$  及电流  $I$  具有关系  $V = RI$ 。若  $V$  及  $R$  当作是已给的,则由此可确定  $I$  为  $V$  及  $R$  的函数:

$$I = \frac{V}{R}.$$

3) 设有放在汽缸的活塞下面的一定质量的气体,其温度不是固定不变的;则这气体的体积  $V$  及压力  $p$  都与它的(绝对)温度  $T$  有关系,其

关系式称为克拉披隆(Клапейрон)公式:

$$pV = RT \quad (R = \text{常量}).$$

由此,例如認為  $V$  及  $T$  是自变量,則它們的函数  $p$  就可写成:

$$p = \frac{RT}{V}.$$

4) 研究任何物体的物理状态时往往需要观察它的各种性质随着点的变化。如:密度、温度、电位等等。所有这些量都是‘点的函数’,换言之,就是点的坐标  $x, y, z$  的函数。若物体的物理状态随时间而变化,則在这些自变量内还要加上时间  $t$ 。在这情形我们就得到四个自变量的函数。

类似的例子讀者自己还可以任意举出許多来。

要想对于几个自变量的函数的概念給以准确的定义,我們先从最簡單的情形,当自变量有两个时开始。

**160. 二元函数及其定义域** 凡說及二自变量  $x$  及  $y$  的变动,我們每一次都应当指出,它們可以同时取值的数对  $(x, y)$  是哪一些;这些数对所成的集  $\mathcal{M}$  就是变量  $x, y$  的变动区域。

函数概念的定义与一元函数时所給出的定义有同样的說法:

若对于集  $\mathcal{M}$  中的每一对数值  $(x, y)$ ——依某一法則或規律——有一确定的  $z$  的数值(在  $\mathcal{Z}$  内)与它們对应,則变量  $z$ (其变动区域为  $\mathcal{Z}$ )称为自变量  $x, y$  在集  $\mathcal{M}$  中的函数。

在此处說及的是單值函数;很易推广这一定义使适用于多值函数。

上面說及的集  $\mathcal{M}$  就是函数的定义域。变量  $x, y$ ——对于它們的函数  $z$  而言——称为它的变元。与一元函数时相类似,  $z$  与  $x, y$  之間的函数关系表示为:

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y), \quad z = z(x, y) \text{ 等等}.$$

若  $(x_0, y_0)$  是从  $\mathcal{M}$  中取出的一个数对,則  $f(x_0, y_0)$  就表示当  $x = x_0, y = y_0$  时函数  $f(x, y)$  所取的一个特別(数字)值。

茲舉出幾個解析地(即用公式)給定的函數的例題,並指出它們的定義域。公式:

$$1) z = xy \text{ 及 } 2) z = x^2 + y^2$$

確定對於一切數對 $(x, y)$ 全無例外的函數。公式:

$$3) z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad 4) z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

只被分別滿足不等式  $x^2 + y^2 \leq 1$  或  $x^2 + y^2 < 1$

的那些數對 $(x, y)$ 所適合(若我們只想得到有窮實數 $z$ 的話)。

由公式:

$$5) z = \arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b}$$

所確定的,是其數值分別滿足不等式

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b$$

的 $x$ 及 $y$ 的函數。

在一切這些情形中我們都指出了公式適用的最廣闊的——自然的 $[46, 2^\circ]$ ——範圍。

今再考察這樣的例題。

6) 設三角形的各邊在周長保持為常數 $2p$ 的條件下任意變化着。若用 $x$ 及 $y$ 表示它的二邊,則第三邊就是 $2p-x-y$ ,於是三角形可以由邊 $x$ 及 $y$ 完全確定。問三角形的面積 $z$ 與它們的關係怎樣?

依海倫(Герон)公式,這面積表示為:

$$z = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

至於這函數的定義域 $\mathcal{M}$ ,在這一次,就應受到引入這函數的具體問題的限制。因為三角形的每一邊是一個正數而且小於半周,所以應當滿足不等式

$$0 < x < p, \quad 0 < y < p, \quad x+y > p;$$

它們就表現了區域 $\mathcal{M}$ ①的特征。

這樣,雖然在一元函數的情形,作為變元的標準變動區域的只是(有窮的或無窮的)區間,而在二元函數的情形,我們已碰到變元的各種各樣極其複雜的可能(和自然的)變動區域。

利用這些區域的幾何說明來考察它們,常使事情變成非常簡易。若在平面上取互相垂直的二軸,再用通常的辦法使它們上面的點各自和 $x$ 或 $y$ 的值相對應,那末大家知道,由每一對 $(x, y)$ 可以單值地確定平面上的一點,它以這些數值作為自己的坐標,反之亦然。

於是,要表現出那些使函數有定義的數對 $(x, y)$ ,就只須簡單地指

① 雖然所得出的公式本身在更廣的範圍內,例如對於 $x > p$ 及 $y > p$ ,仍保持有意義。

出它們所对应的点在  $xy$  平面上填滿了怎样的圖形。

如此,就說,函数 1) 及 2) 定义于全平面內, 函数 3) 及 4) 依次定义于閉的(即包括圓周在內)或开的(除去圓周)圓內(圖 89); 函数 5) 定义于矩形內(圖 90); 最后, 我們仅在开的三角形內考察函数 6)。

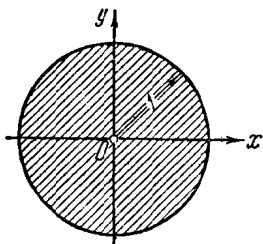


圖 89.

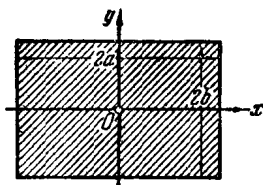


圖 91.

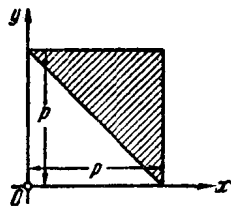


圖 92.

这种几何說明是如此的方便,以致通常就称数对  $(x, y)$  为‘点’而这种‘点’所成的集合也就依照其所对应的圖形的名称来称呼它。例如, 滿足不等式

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

的‘点’集或数对  $(x, y)$  的集是‘矩形’, 其度量等于  $b-a$  及  $d-c$ ; 将用記号  $[a, b; c, d]$  来表示它, 与区間的表示法相类似。滿足不等式

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \leq r^2$$

的‘点’集或数对  $(x, y)$  的集是中心在‘点’  $(\alpha, \beta)$  而半徑为  $r$  的‘圓’, 等等。

恰象函数  $y=f(x)$  可用其圖綫来几何地說明一样 [47], 方程  $z=f(x, y)$  也可以得到几何上的說明。在空間取以  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸組成的直角坐标系; 再在  $xy$  平面上画出变量  $x$  及  $y$  的变动区域  $\mathcal{M}$ , 最后, 在这区域中的每一点  $M(x, y)$  作  $xy$  平面的垂綫, 并在垂綫上按数值  $z=f(x, y)$  来取点。这样所得的点的軌迹就是我們的函数的空間圖形。一般地說来, 这是一个曲面; 同时等式  $z=f(x, y)$  就称为曲面的方程。



为了举例,在圖 92、93 及 94 中画着函数:

$$z = xy, \quad z = x^2 + y^2,$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

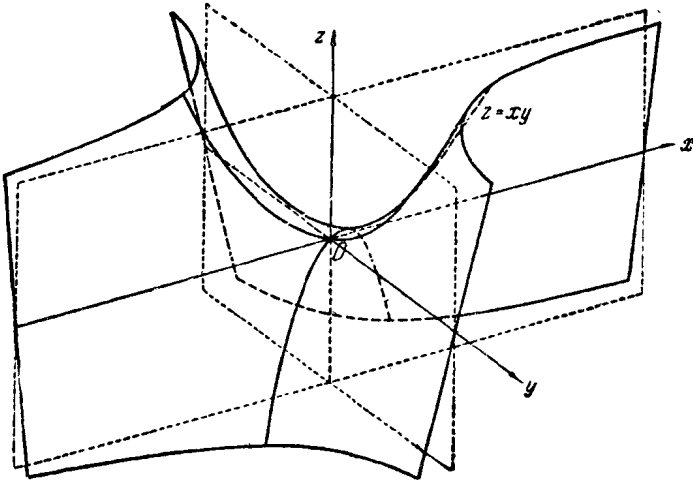


圖 92.

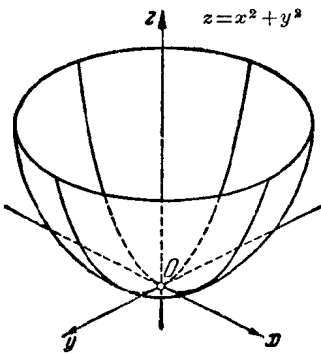


圖 93.

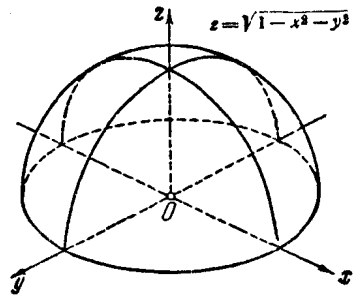


圖 94.

的几何圖形。其中第一个圖形是双曲拋物面,第二个是迴轉拋物面,第三个是半球面。

最后要講到，有时不得不考察变量  $x_{m,n}$ ，它的数值是用二自然数标  $m$  及  $n$  来編号的 ( $m$  与  $n$  各自独立地依自然数列而遞变)。在某种意义上來說，这种变量是整序变量  $x_n$  的推广。

例如，可以令

$$x_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}, \quad x_{m,u} = \frac{1}{m^2+n^2}, \quad x_{m,u} = \frac{(m+1) \cdot n}{m \cdot (n+1)} \text{ 等等。}$$

事实上，标号  $m$  及  $n$  应该看作自变量，而变量  $x_{m,n}$  看成是它們的函数。在当前的情形，自变量的变动区域可用第一象限內的全部方格子点作为其几何說明。

**161.  $n$  維算术空間** 轉移到  $n$  个自变量 ( $n \geq 3$ ) 的函数，我們首先来考虑这些变量的协同数值組。

在  $n=3$  时，讀者都明白，三数  $(x, y, z)$  所成的数值組还可以几何地解釋为空間的点，而这种数值的集則可以解釋为空間的一部分或几何学中的体。但在  $n > 3$  时已不可能再有直接的几何說明，因为我們并没有維数大于三的空間的直觉。

虽然如此，由于仍然希望把(对于二元及三元函数显得是有效的)那些几何方法扩充到更多个变元的函数的理論上去，在分析学內就引入了  $n$  維‘空間’的概念 ( $n$  可以大于 3)。

$n$  个实数所成的組  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ <sup>①</sup> 称为 ( $n$  維的) ‘点’；数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  就是这‘点’  $M$  的坐标。所有可以想象的  $n$  維的‘点’就組成一个  $n$  維‘空間’(它有时称为算术空間)。

引入两个 ( $n$  維) ‘点’

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ 与 } M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

之間的‘距离’  $\overline{MM'}$  的概念是有需要的。仿照大家知道的解析几何学

① 由于所論变量的个数沒有一定，所以不用不同的字母，而只用带有不同序号的同一字母来表示它們，显得更是方便。这样， $x_i$  (与以前的用法相反) 并不表示某一变量的第  $i$  个值，而是表示可以具有許多不同数值的第  $i$  个变量本身。

中的公式, 令

$$\begin{aligned} \overline{MM'} = \overline{M'M} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i)^2} = \\ &= \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \cdots + (x'_n - x_n)^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

在  $n=2$  或  $3$  时这‘距离’与对应的两几何点之间的通常距离相同。

若再取一‘点’

$$M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n),$$

则可以证明, ‘距离’  $\overline{MM'}$ ,  $\overline{M'M''}$  及  $\overline{MM''}$  满足不等式

$$\overline{MM''} \leq \overline{MM'} + \overline{M'M''}, \quad (2)$$

这便是大家知道的几何定理: “三角形的一边不大于其他二边之和”。

实际上, 对于任何两组实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  及  $b_1, b_2, \dots, b_n$  常成立不等式

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad ①$$

若在此处令

$$\begin{aligned} a_i &= x'_i - x_i, \quad b_i = x''_i - x'_i, \quad \text{于是 } a_i + b_i = x''_i - x_i, \\ &(i=1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

① 这个不等式不是别的, 而是我们曾经遇到的闵可夫斯基不等式 [133(7)] 在  $k=2$  时的特殊情形。如果将它两边各自平方并消去相等的项, 则它就变成大家熟知的柯西不等式 [133(5a)]。对柯西不等式 同时, 也对书中的不等式我们举一个十分初等的证明。

二次三项式

$$\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot x^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \cdot x + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

显然不能取负值。在这个情形它不能有两个不同的实根, 因而表达式

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i \right\}^2$$

应当是非负的, 这就相当于柯西不等式。

則得

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'' - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i' - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'' - x_i')^2},$$

这就相当于(2)。这样,距离的这一重要性質在我們的‘空間’中也同樣成立。

在  $n$  維‘空間’內也可以考察連續‘曲綫’。

大家知道[106],方程式

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

(此处的  $\varphi(t)$  及  $\psi(t)$  是參变量  $t$  的函数,在某一区間  $[t', t'']$  是連續的)表示平面上的連續曲綫。类似于此,但用三个連續函数:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (t' \leq t \leq t''),$$

就可表示(通常)空間中的連續曲綫。仿此,今考察  $t$  的  $n$  个連續函数:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t) \quad (t' \leq t \leq t''),$$

則当參变量  $t$  取不同数值时所得的‘点’集

$$(\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \dots, \quad \varphi_n(t)),$$

就組成  $n$  維‘空間’內的連續‘曲綫’。令

$$x_1' = \varphi_1(t'), \quad \dots, \quad x_n' = \varphi_n(t'); \quad x_1'' = \varphi_1(t''), \quad \dots, \quad x_n'' = \varphi_n(t''),$$

就可以說,这‘曲綫’連接着兩‘点’

$$M'(x_1', x_2', \dots, x_n') \quad \text{与} \quad M''(x_1'', x_2'', \dots, x_n'').$$

当所有的  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  都是綫性函数时,‘曲綫’就变成‘直綫’:

$$x_1 = \alpha_1 t + \beta_1, \quad \dots, \quad x_n = \alpha_n t + \beta_n;$$

其中系数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  假定不全等于零,而  $t$  从  $-\infty$  变至  $+\infty$ 。我們將算作这直綫上的‘点’是依着參变量漸增的次序一个跟着一个的;若  $t' < t < t''$ , 則在对应的‘点’  $M', M, M''$  內,‘点’  $M$  就位于其他兩点之間,因为它在  $M'$  之后而又在  $M''$  之前。在这些条件之下,容易証明,它們之間的距离滿足于关系式:

$$\overline{M'M''} = \overline{M'M} + \overline{MM''},$$

这正是通常空間內的直線的特性。

經過二給定‘点’

$$M'(x'_1, \dots, x'_n) \text{ 及 } M''(x''_1, \dots, x''_n)$$

的‘直線’的方程式显然可以写成:

$$x_1 = x'_1 + t(x''_1 - x'_1), \dots, \quad x_n = x'_n + t(x''_n - x'_n) \\ (-\infty < t < +\infty),$$

于此令  $t=0$  及  $1$ , 就得到‘点’ $M'$  及  $M''$ 。又若使  $t$  从  $0$  变至  $1$ , 就得到連接这两‘点’的‘直線段’。

由有穷数的‘直線段’所組成的‘曲綫’称为‘折綫’。

162.  $n$  維空間內的区域举例 今轉而考察一些  $n$  維‘空間’內的‘体’或‘区域’的例子。

1) 坐标各自互相独立地滿足于不等式

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_n \leq x_n \leq b_n$$

的一切‘点’ $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  所成的集, 称为 ( $n$  維) ‘長方体’, 并記成:

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n].$$

在  $n=2$  时, 就由此得出[160]內曾經講及的‘長方形’; 通常空間中的長方体則对应于三維‘長方体’。

若在前面写着的的关系式內去掉等号, 得到

$$a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \quad \dots, \quad a_n < x_n < b_n,$$

就可用它們来定义开的‘長方体’:

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n),$$

因为要与它区别, 前一个就称为閉的‘長方体’<sup>①</sup>。差  $b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n$  称为两种長方体的度量, 而点

<sup>①</sup> 也可以考察无窮‘長方体’, 如果确定它的各区间(或其中的某几个)是无穷区间时。在說及  $n$  維‘長方体’时, 若沒有特別声明, 我們总是指有窮‘長方体’。

$$\left( \frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2} \right)$$

称为它们的中心。

任一中心在  $M^0$  的开的‘长方体’

$$(x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1; x_2^0 - \delta_2, x_2^0 + \delta_2; \dots; x_n^0 - \delta_n, x_n^0 + \delta_n) \quad (3)$$

( $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0$ ) 称为‘点’  $M^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  的邻域，最常遇见的邻域是‘立方体’：

$$(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta; x_2^0 - \delta, x_2^0 + \delta; \dots; x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta)$$

( $\delta > 0$ )，其一切度量都相等 ( $= 2\delta$ )。

2) 考察坐标满足不等式

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq h \quad (h > 0)$$

的一切‘点’  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  所成的集。在  $n=2$  时对应于这集的几何图形是等腰直角三角形，在  $n=3$  时是四面体 (圖 95)。在一般情形称它为最簡体<sup>①</sup> (这里是閉的最簡体，以区别于在上列不等式内去掉等号而得出的开的最簡体)。

3) 最后，若  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  是定‘点’，而  $r$  是正常数，则由不等式

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 \leq r^2 \quad (\text{或} < r^2)$$

所确定的一切‘点’  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  所成的集，称为閉的(或开的)  $n$  維‘球’，其半徑为  $r$ ，而中心在‘点’  $M_0$  处。換句話說，‘球’是所有与某一定‘点’  $M_0$  的‘距离’不超过(或小于)  $r$  的点所成的集。这是很清楚的， $n=2$  时的‘球’就是圓 [參閱 160]， $n=3$  时就是通常的球。

中心在点  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  处而有任意半徑  $r > 0$  的开‘球’也可以看作这点的邻域；要使它区别于我們先前引入的那种‘长方体形’的邻域，就称它为‘球形’的邻域。

<sup>①</sup> 按拉丁文 simplex 的意思是‘簡單的’；实际上，最簡体就是最簡單的多面‘体’，对于所給定空間而言，它具有最少数目的面。

茲證明下一經常要用到的事实:已給一个‘点’ $M_0$ 的上述任一类型的邻域时,一定可以找到 $M_0$ 的一个另一类型的邻域,使得后者包含于前者之中。

設首先給定中心在‘点’ $M_0$ 处的‘长方体’(3)。那末,要取有同一中心的开‘球’,使它包含在所給‘长方体’之内,只要取开‘球’的半徑 $r$ 小于一切 $\delta_i (i=1, 2, \dots, n)$ 就够了。实际上,对于这球内的任一‘点’ $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (对每一 $i=1, 2, \dots, n$ )将有:

$$|x_i - x_i^0| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2} = \overline{MM_0} < r < \delta_i$$

或

$$x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i,$$

于是这点必属于給定的‘长方体’。

反之,若給定中心在 $M_0$ 而半徑为 $r$ 的‘球’,那末‘长方体’(3),例如,在 $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \frac{r}{\sqrt{n}}$ 时就包含在它里面。因为这‘长方体’中任一‘点’ $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 距‘点’ $M_0$ 的‘距离’是

$$\overline{MM_0} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^n \delta_k^2} = r,$$

所以,它也属于給定的‘球’。

163. 开域及閉域的一般定义 若‘点’ $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ 連同它的充分小的邻域都属于( $n$ 維‘空間’内的)集 $\mathcal{M}$ ,則称‘点’ $M'$ 是集 $\mathcal{M}$ 的内‘点’。

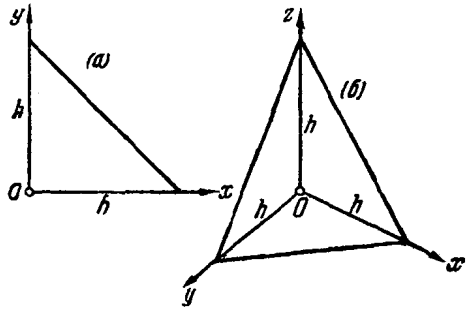


圖 95.

由前一段末所證明的論点很明显地推得，此处所論及的邻域的类型，不論是‘長方体形的’或是‘球形的’，并不影响于內点的定义。

开的‘長方体’

$$(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n) \quad (4)$$

的每一‘点’都是內‘点’。实际上，若

$$a_1 < x'_1 < b_1, \dots, a_n < x'_n < b_n.$$

则容易找出这种  $\delta > 0$ ，使得

$$a_1 < x'_1 - \delta < x'_1 + \delta < b_1, \dots, a_n < x'_n - \delta < x'_n + \delta < b_n.$$

仿此，对于中心在‘点’ $M_0$ 处而半径为  $r$  的开‘球’，属于它的每一‘点’ $M'$ 也都是它的內‘点’。若取  $\rho$  使合于

$$0 < \rho < r - \overline{M'M_0},$$

并以  $M'$  为中心作出半径为  $\rho$  的‘球’，则它必全部包含在原来的‘球’內：因为只要  $\overline{M'M} < \rho$ ，就有 [160, (2)]

$$\overline{M'M_0} \leq \overline{M'M} + \overline{M'M_0} < \rho + \overline{M'M_0} < r,$$

于是‘点’ $M$ 亦属于原来的‘球’。

关于开的最簡体：

$$x_1 > 0, \dots, x_n > 0, x_1 + \dots + x_n < h \quad (h > 0),$$

也可以作出同样的結論。

这种完全由內‘点’所組成的集就称为开‘域’。

这样，开‘長方体’、开‘球’、开的最簡体都是开‘域’的例子。

现在再把聚点的概念 [52] 推广到  $n$  維‘空間’內的集  $\mathcal{M}$  的情形去。若在‘点’ $M_0$  的任一邻域 (不論什么类型) 內总包含着集  $\mathcal{M}$  中的至少一个异于  $M_0$  的‘点’，则‘点’ $M_0$  称为集  $\mathcal{M}$  的‘聚点’。

开‘域’的‘聚点’而不属于这域的称为它的界‘点’。界‘点’的全体組成‘域界’。开‘域’連同着它的‘界’就称为閉‘域’。

不难看出，只有滿足諸式：

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n,$$



并使其中至少一处成立等式的‘点’  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  方才能成为开的‘长方体’(4)的界‘点’。

完全与此相同,只有确实满足  $\overline{MM_0} = r$  的‘点’  $M$  方才成为上面說过的开‘球’的界‘点’。

最后,只有滿足諸关系式:

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq h,$$

并使其中至少一处成立等式的‘点’  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  方才能成开的最簡体(5)的界‘点’。

这样,閉的‘长方体’、閉‘球’、閉的最簡体就給出了閉‘域’的例子。

以后凡說及(开的或閉的)‘域’时,我們总是指着此处所述的有着特殊意义的‘域’。

現在要証明,閉‘域’的一切聚‘点’都屬於这‘域’。

設給定閉‘域’ $\overline{\mathcal{D}}$  及在它外部的‘点’  $M_0$ 。將証明  $M_0$  不是  $\overline{\mathcal{D}}$  的聚‘点’。

閉‘域’ $\overline{\mathcal{D}}$  是由某一开‘域’ $\mathcal{D}$  加上它的‘界’ $\mathcal{G}$  而得到的。显然  $M_0$  不能是  $\mathcal{D}$  的聚‘点’;因此,  $M_0$  可以被这样的开‘球’所圍住,使它里面不包含  $\mathcal{D}$  的‘点’。可是,在它里面也就不能有  $\mathcal{G}$  的‘点’;因为若有  $\mathcal{G}$  的任何‘点’  $M'$  落在它里面,則在它里面將整个地包含着‘点’  $M'$  的某一邻域,而在这邻域內却一个都不能有  $\mathcal{D}$  的点,这是違反‘界’点的定义的。因此前述的开‘球’內确乎沒有  $\overline{\mathcal{D}}$  的‘点’,这就証明了我們的論点。

一般,包含自己的一切聚‘点’的‘点’集  $\mathcal{M}$  称为閉集。这样,閉‘域’是閉集的特別情形。

再引入一系列的術語。若‘点’集  $\mathcal{M}$  全部包含在某一‘长方体’內,它就称为有界‘点’集。

若‘域’的任意兩‘点’常可以用一‘折綫’来連接,該‘折綫’的一切‘点’都位于这‘域’中,这‘域’就称为連通‘域’。圖 96 中是几个平面上