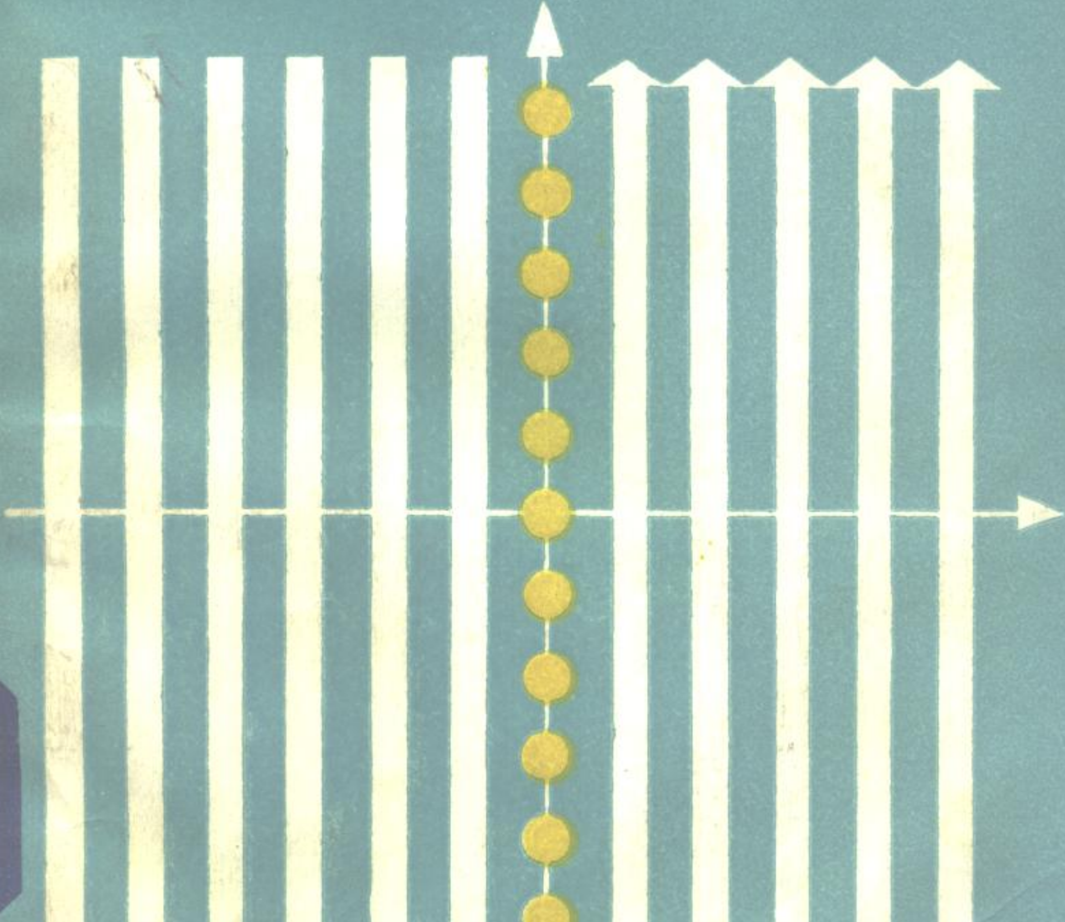
高等学校教材

常微分方程讲义

叶彦谦 编

（第二版）



高等教育出版社

高等学校教材

常微分方程讲义

（第二版）

叶彦谦 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是1979年版的修订本. 全书贯穿理论联系实际，辩证与运动的观点.

主要内容: 初等积分法，常微分方程的一般理论，微分方程组，常系数线性方程组和高阶方程，二阶线性方程，定性理论初步.

本书可供高等学校理科数学专业作教材之用.

高等学校教材

常微分方程讲义

(第二版)

叶 彦 谦 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11 字数 266,000

1979年5月第1版 1982年10月第2版 1987年7月第5次印刷

印数 31,021—34,031

书号 13010·0810 定价 1.85 元

再 版 序

在作者1981年重新两次讲授本课程，以及陈仲同志1982年上半年又一次试用本教材以后，今对其中大部分章节又作了若干修改和补充，但总的精神未变．作者除了对陈仲同志表示特别的谢意以外，同时也对试用本教材的何崇佑，李昆垣，何启敏，徐宝智，缪正忠，黄正勋等同志所提出的一些宝贵意见表示感谢．

此外，在我们试用这本教材时发现，以每周$3\frac{1}{2}$小时教一学期，即使小字部分全部删去，内容仍嫌太多．因此建议使用本书做教材的同志可进一步考虑删去算子方法，拉氏变换和边值问题．我们相信，即使讲得少些，但只要对其中几个主题讲透，并适当安排少数稍难的习题，效果也许比贪多嚼不细更好．只要学生学得有兴趣，没有讲的留待他们作为课外自学材料，也是一种好的，值得提倡的办法．

叶彦谦

一九八二年七月

序

这本教材是以编者过去多年之中在南京大学数学系讲授二年级微分方程时所写的讲义为蓝本，经过数次修改而成的．编者主观上希望能初步做到理论联系实际和贯穿辩证与运动的观点，同时也兼顾取材的现代化，以期读者学过之后对常微分方程的基本内容能有较深刻的理解；但看来距离这个目标还很远．虽然如此，编者认为教材建设是一个大有可为的园地，它对于我国实现四个现代化和赶超国际先进水平的重要性是决不容忽视的．但是我们过去对这方面的重视很不够，因此今后特别值得编写教材的同志们来共同努力．也正是由于这个原因，编者诚恳地希望能听到各方面的宝贵意见，以便将来作进一步的修改．

本书在送审过程中，已蒙审查同志们提出不少修改意见，谨此致谢．本书初稿的习题编选与题解工作由王现同志承担．最后定稿时改换了一部分习题，题解是由戴正德同志做的，全书绘图工作由田景黄同志协助完成．

叶彦谦

一九七九年一月于南京

目　录

绪　论

所谓**微分方程**，就是一个或几个包含自变量，未知函数以及未知函数的某些微商的方程式①．例如，以下这些都是微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{1}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+hx\frac{dx}{dt}+kx=F(t) \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{3}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+h\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{4}$$

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-4\pi\rho \tag{7}$$

$$\frac{dx}{dt}=x(ax+by+c),\qquad \frac{dy}{dt}=y(ex+fy+g) \tag{8}$$

只含一个自变量的微分方程称为**常微分方程**，自变量多于一个的称为**偏微分方程**．例如，上列(1)—(5)都是常微分方程；(6)，(7)是偏微分方程；(8)是常微分方程组．方程中所含未知函数微商的最高阶数称为这个方程或方程组的阶．例如，(1)和(3)是一阶方程；(2)，(4)，(6)，(7)是二阶方程；(5)是 n 阶方程；(8)是一阶方程组．

① 这是一个习惯性的说法，但有语病，见第一章§4中定理的脚注．

如果方程对于未知函数和它的各阶微商的全体而言是一次的，它就称为**线性微分方程**；否则，称为**非线性微分方程**．例如，(1)，(3)，(6)，(7)都是线性方程；(8)是非线性方程组；(2)和(4)是非线性方程．至于(5)，由于不知道函数F的具体形式，故无法判别它是线性还是非线性．

微分方程中可以不含自变量和未知函数，例如(6)和(7)，但是必须含有未知函数的微商或偏微商；否则，它就不能称为微分方程．

如所熟知，求解n次代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{9}$$

就是要找实的或复的常数x_0，使当$x=x_0$时(9)式成为恒等式$0=0$．根据代数学的基本定理，我们知道这种x_0最多只有n个，它们被称做方程(9)的**根**．仿此，如果对于方程(2)，以及一切实数t，或是某一区间中的一切t①，存在t的二次可微函数$g(t)$，使当$x=g(t)$时(2)式成为关于t的恒等式，就称$x=g(t)$是方程(2)的**解**．类似地可以定义方程(1)，(3)—(7)的解．至于方程(8)的解，则是由两个一次可微函数$x=f_1(t)$，$y=f_2(t)$所构成的函数组，把它们一起代入(8)的两方程中，可以使之变为关于t的恒等式．

与代数方程不同，微分方程的解，一般而论，不是常数而是函数；解的个数有无限个之多．例如，根据微积分学的基本定理，我们知道，方程(1)的解是：

$$y=\int f(x)dx=F(x)+C \tag{10}$$

其中$F(x)$是$f(x)$的任一确定的原函数，C是任意常数．由于C的任意性，所以(10)代表方程(1)的无数个解．又因方程(1)的任一

---

① 本课程只限于讨论自变量是实数的情况(且在绝大多数场合之下，规定未知函数也是实的)，虽然其中很多结论对于复变量的微分方程也是成立的．

确定的解必具(10)的形式(但其中的 C 取特定的值)，故(10)称为方程(1)的**通解**①. 而当 C 取确定数值时所得到的解则称为方程(1)的一个**特解**. 又如，容易验证一切形如

$$u=\varphi(x)+\psi(y)$$

(其中 φ 和 ψ 分别是 x 和 y 的任意可微函数)的函数 u 都是方程(6)的解，它们当然也有无限多个.

微分方程是数学理论(特别是微积分学)联系实际的重要渠道之一. 微积分的出现，部分地也是由于研究天体运行规律的推动；这些规律实际上只有用微分方程才能表达出来. 因此，微分方程的理论是和微积分同时成长起来的. 在二十世纪以前，微分方程问题主要来源于几何学，力学和物理学，而现在则几乎在自然科学和工程技术的每一个部门都有或多或少的微分方程问题. 微分方程甚至和生物，农业以至经济学也密切地挂上钩了. 正因为这样，所以在微分方程论中出现的问题种类是极其丰富多采的，也就是说，它有着丰富的生命力. 为了解决这些问题，有必要建立微分方程本身的基础理论；而这又需要用到数学其他分支学科的知识(有时甚至还感到很不够用)，并且还往往推动了这些分支学科的发展. 反过来，这些学科的发展也常常通过微分方程进一步更好地解决生产实际和工程技术中的问题.

本课程的任务就是要介绍常微分方程理论中一些最主要的问题，以及求解常微分方程的一些最基本的方法. 至于偏微分方程，我们只在第三章 §2 和第五章 §3 牵涉到一点，以后还有专门的课程去研究它.

先从研究问题的方法谈起. 为此，不妨回忆一下代数方程求根的问题. 读者都知道，只含一个变元的一次，二次，以至三次，四

---

① 关于通解的较明确的定义，见第一章 §1 末尾.

次的代数方程，它们的根都可以用系数的根式表示出来；至于多元一次联立方程组，那也是有完整的理论可以彻底解决问题的．另一方面，人们很早就知道，五次以上的代数方程一般是无法用根式求解的，虽然代数学的基本定理已从理论上肯定 n 次代数方程必有 n 个根．但是对于研究某些理论或实际问题来说，有时没有必要去找复根，或是实根的准确的表达式；我们往往只要知道所有根的实数部分是否都小于零，或是只要知道有几个实根以及它们的近似值就够了．因此后来进一步的发展，就有像：1）用定性方法判别实根的个数和存在范围（在这里微分学是可以起作用的）；2）探讨求实或复根的近似值的各种方法；3）判别在什么条件下，方程的一切根都具有负的实数部分；等等，这样一些有意义的研究课题．

对于常微分方程，情况也差不多．开始，人们总是希望通过积分法把微分方程所有的解都找出来．在这方面不少数学家的确也尽了很大的努力，有时对个别的方程也想出一些巧妙的积分方法．但是到了十九世纪中叶人们就发现，能够通过初等积分法把所有的解都求出来的微分方程只是极少数．即使像

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x) \tag{11}$$

其中 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$ 是 x 的连续函数．或其特例：

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2 \tag{11'}$$

这样一些简单的一阶方程（称为黎卡提(Riccati)方程），要想通过求积分把方程的解用已知函数表示出来，一般而论，也是办不到的①．另一方面，在这个时候，关于某些非常一般的微分方程，“它

① 这一事实，由于近代常微分方程理论的抽象化和十分深刻的研究，而显得更清楚了．见[1]，469–480 页．[ ]指本讲义末尾所列的参考书目．

的满足一定条件的解是否存在且唯一"①，这样一种类似于代数学基本定理的，纯理论研究也已经有了重要的结果．因此常微分方程理论的进一步发展就分为**解析方法**，**几何方法**和**数值方法**等三个主要方向．

所谓解析方法，就是把微分方程的解看做是依靠这个方程来定义的自变量的函数(一种新的定义函数的方法)．在关于这方程的很广泛的假定之下，可以证明它的解有级数展开式；并且根据每一方程的特点，能够推导出解的许多性质．在工程，物理，天文等方面具有很大实用价值的许多特殊函数都属于此类．在这里自变量和未知函数一般都是复数．所谓几何方法或"**定性方法**"，就是把微分方程的解看成是充满平面或空间(或其中某一区域)的曲线族．对于已给的方程，要求设法画出曲线族的大致图形，研究它们(局部或是大范围)的几何性质，并从中引出有用的结论．在这里自变量和未知函数一般都是实数．所谓数值方法就是求微分方程的，满足一定初始条件或边界条件的解的近似值的各种方法．对于前面两种方法本课程虽然不能细讲，但是都将作一些初步的介绍；至于数值方法，以后将有专门的课程讲解，我们就从略了．

再谈一谈本课程所要研究的几个主要问题．首先，自然是求通解的各种方法，即所谓初等积分法，这是第一章的主要内容．其次是：对于某些非常一般的方程，研究它的，满足一定初始条件或边界条件的解是否存在和唯一，以及解对于初值或参数的依赖关系，这是第二章和第五章§3的内容．再次，类似于线性函数和线性代数方程组，我们将介绍在实用上最常遇到，而在理论上又发展得比较完善的，一阶线性微分方程，方程组和高阶线性方程的理论和求解方法，以及研究二阶线性方程的某些常用的解析方法和定

① 这里的"条件"是指初始条件或边界条件，其意义见后面的例题．

性方法，这是第三、四两章以及第五章中大部分的内容．最后，在第六章中介绍用定性方法研究非线性方程的最基本的知识，关于这方面近数十年来有很大的发展，数学工作者不能对它一无所知．

学习微分方程课应该注意以下三点：

（一）微分方程是数学理论联系实际的重要渠道之一．由于我们所研究的微分方程很多是由生产实际或由有关的学科推导得来，而不是从自己头脑中凭空想像出来，当我们以这种或那种方法解决了问题以后，还须回到生产实践中去．因此，对于怎样建立方程、建立什么样的方程、如何求解、以及方程的解如何回过头来解释实际现象，读者应该予以十分的重视．事实上，在这整个过程中充满着辩证法，值得读者很好学习．特别值得提出的是：恩格斯论微积分时所强调的“运动的观点”（参见第六章 § 1），毛主席的实践论中所谈到的“实践，认识，再实践，再认识”的观点，以及矛盾论中提出的“找主要矛盾”的观点．当然，对于较复杂的实际问题，要能建立起合适的微分方程是不容易的；必须对问题的本质有深刻了解，并且纯熟地掌握数学和物理学的工具才能够办到．学习本课程只是为此打下一个初步然而是重要的基础．

（二）微分方程除了密切联系实际的一面以外，也有它自己的基础理论．这主要就是前页已提及的存在唯一性定理，解析理论，定性理论和数值分析．这些基础理论的建立，有赖于数学其他分支的帮助．仅在这一入门课程中，读者已可看到微积分，线性代数和物理学中的知识是经常要用到的．特别应当提出的是：线性代数与一阶线性微分方程组之间的密切关系．国外有的教材甚至把二者融为一体了，见[20]．由此可见，微分方程课也是训练掌握微积分，线性代数和普通物理学的一个很好的场所．此外，常微分方程的理论对于它的后行课：偏微分方程，微分几何与泛函分析也是很重要的．因此，对于基础理论部分，读者同样也应予以足够的

重视.

（三）不少国外常微分方程教材片面地重视数学理论的系统性，有的虽然列举了许多联系实际的例子，其目的主要也是作为验证理论之用．这样做的后果并不太好，解题方法很多，各不相关；理论也不少，但就是读后很容易忘记．这本讲义尝试用另一种办法，即以工程，物理，力学等方面最常遇到的弹簧质量系统的振动，单摆摆动和抛射体的运动等三类问题作为自始至终贯穿本课程的中心问题．方程由简单到复杂，由线性到非线性，或由单一的方程到方程组；在处理方法上则由求通解到只作定性或稳定性的讨论．这样，一方面可以把本课程的大部分内容有机地联系在一起；另一方面也可以藉此给读者显示数学理论联系实际由浅入深的具体过程，以加深理解．我们认为，只有在掌握了系统的微分方程理论，同时又知道这种理论如何应用于实际问题时，所学到的东西才比较巩固、踏实．

下面举四个例题，说明微分方程是如何从物理学，力学和几何学等方面的问题引导出来的．

例 1　镭，铀等放射性元素因不断地放出各种射线而逐渐减少其质量（称为衰变）．根据实验知道衰变速度与剩余物的质量成正比，问这种元素的质量 x 是时间 t 的什么样的函数？

解　由题意可知有

$$\frac{dx}{dt}=-kx \tag{12}$$

这里$\frac{dx}{dt}$表示衰变速度，即 x 关于 t 的变化率．$k>0$ 是比例常数，因元素的不同而异．等式右边的负号表示当 $x>0$ 时$\frac{dx}{dt}<0$，即当 t 增加时镭的质量总是减少的．要从方程(12)找出 x 与 t 的函数关系，只须把它改写为：

$$\frac{dx}{x}=-kdt \tag{13}$$

然后两边积分，即得：

$$\ln|x|=-kt+C \quad 或 \quad x=\pm e^{-kt+C}=C_1e^{-kt} \tag{14}$$

其中 $C_1=\pm e^C$. 由于 C 与 C_1 都是任意常数，因此 x 与 t 的关系并没有完全确定. 此外，与 $C_1<0$ 对应的 x 在本题中没有意义.

方程(12)不能完全确定 x 与 t 的关系是很容易理解的. 如果给你几块质量不同的镭，那末它们的质量与时间的关系式当然是不同的，但却满足同一个微分方程(12). 现在再加一个条件：

$$当 \quad t=t_0 时, \quad x=x_0 \tag{15}$$

既然在某一特定时刻 t_0，镭的质量已知为 x_0，并且 x 随 t 而变化的规律也知道是(12)或(14)，那末 x 与 t 的关系应该可以完全确定了，这由常识是容易理解的. 用数学的话来说，要(14)式中的 x 满足条件(15)，就应有

$$x_0=C_1e^{-kt_0}$$

从而 $C_1=x_0e^{kt_0}$，即 C_1 是一个确定的常数. 把它代入(14)式右边，即得 x 与 t 之间的完全确定的关系式：

$$x=x_0e^{-k(t-t_0)} \tag{16}$$

回忆前面讲过的定义，可知(14)中的 x 是方程(12)的通解，它含有一个任意常数 C_1. 条件(15)称为**初始条件**，(16)中的 x 是满足条件(15)的特解.

对于特定的放射性元素，只要知道 k 的数值，以及在时刻 t_0 的质量 x_0，就可以由(16)式算出它在任何时刻 t 的质量 x. 实际上，k 的数值也是根据实验而间接测定的①. 例如，由实验知道：镭

---

① 对于 k 值很小的放射性元素，如镭，物理学家通常是根据方程(12)，用原子计数器测量单位时间内放射出来的原子数 I 被除于镭的总原子数 N 来测定 k 值的，例如见[28]下册 473 页 § 28.2. 这里所介绍的方法适用于 k 值较大，即半衰期较短的放射性元素，主要目的是为了介绍数学方法. 例如见[29]三卷二分册 32 章 § 369.

经过 12 年以后，其质量比原来的减少了千分之五．这一事实与 t_0 和 x_0 的数值都没有关系．据此可知，如果在(16)式右边取 $t=t_0+12$，则该式左边的 x 应等于 $0.995x_0$．因此成立等式：

$$0.995x_0=x_0e^{-12k}$$

从而

$$k=\frac{1}{12}\ln\frac{1}{0.995}\approx 0.00018 \tag{17}$$

本题除了介绍由方程(12)通过积分求得通解(14)的方法以外，又指出如何利用条件(15)确定特解(16)，以及如何根据实验结果推算出 k 的数值(17)，这些都是值得初学者注意的．因为后二者都是用数学方法解决最简单的实际问题的好例子，要掌握它是并不困难的．

有趣的是：人们发现细菌的繁殖，植物的初期生长①，溶液的冲淡、密闭容器的抽真空等问题都会导致与(12)同样形状的方程，但右边有时是正号(参考后面的习题)．

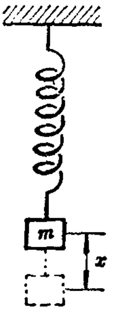


图 0.1

例 2 研究悬挂重物的弹簧的振动．假设弹簧的质量与重物的质量相比是很小，以致可以略去不计②，试建立其微分方程．

解 如图 0.1，当重物(质量为 m)静止不动时，它所受到的两个力，即重力 mg 和弹簧的恢复力，互相平衡．如果把它向下拉(或向上推)一小段距离 x，然后放手．根据常识，知道重物将作上

---

① 这两种情况之下，一般都不发生养料供给不足的问题．如果在试管中用有限的养料来繁殖细菌，则细菌的个数所满足的较为符合实际的方程应是 $\frac{dx}{dt}=ax-bx^2$，$a>0, b>0$，且 b 比 a 小得多．当 x 较小时，略去右边第二项关系不大．参阅[22]，第一章 §5．

② 如果这条件不满足，就只能建立起偏微分方程．建立的过程较困难．

下振动若干次，振幅愈来愈小，最后仍归于静止．今取 x 轴的正方向铅直向下，取重物静止不动时其重心的位置为 $x=0$．在振动过程中，重物受到三个力（向量）的作用：1．重力 mg（方向向下）．2．弹簧的恢复力 $-mg-cx$，其中 $c>0$ 是弹簧的刚度，即把它拉长一个单位长度所需的力．这个力的方向要看 $mg+cx>0$ 还是 <0 而定．在前一情况，弹簧的长度比没有悬挂重物时要长，因此恢复力方向向上；在后一情况则相反，恢复力向下．3．空气阻力 $-\alpha\frac{dx}{dt}$．因为根据实验知道空气阻力的大小与重物运动的速度成正比，而方向与运动方向相反．这样，应用牛顿第二定律，就得到：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-(mg+cx)-\alpha\frac{dx}{dt}=-cx-\alpha\frac{dx}{dt} \tag{18}$$

其中 $\alpha>0$ 称为阻尼系数，等式中间第二，三两项前面的负号已经在上面解释过．(18)是一个二阶线性常系数微分方程，它的求解方法将在第四章§2中给出．

关于弹簧质量系统的振动问题，在工程技术上最常遇到的是一种所谓“强迫振动”，即当重物作振动时还继续不断地受到某种（往往是周期性的）与振动状态无关的外力的作用．例如，用四个或六个螺旋弹簧支撑在基座上的机器（图0.2），当马达开动时，由于旋转部分的质量分布不均匀，或形状不十分对称，以致相反方向的离心力不能互相抵消，因而产生对基座的沿铅直方向的周期性干扰力．当转速很高的时候这种干扰力是相当大的．离心力的方向随旋转体而转动，其大小与转动角速度 ω 的平方成正比．由于机器四周夹紧，故只有离心力在铅直方向的分量才对振动系统发生影响．显见此力的大小是 $F\omega^2\sin\omega t$，其中 ωt 是离心力的方向在

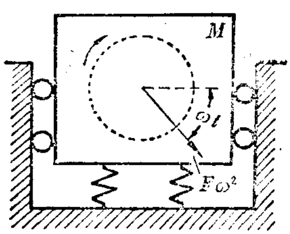


图 0.2