概率统计的理论和习题

〔美〕M·R·施皮格尔 著　　费鹤良 等译

上海科学技术出版社

概率统计的理论和习题

[美] M. R. 施皮格尔 著

费 鹤 良 等译

上 海 科 学 技 术 出 版 社

SCHAUM'S OUTLINE OF

THEORY AND PROBLEMS OF PROBABILITY and STATISTICS

by

MURRAY R. SPIEGEL

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1975

概率统计的理论和习题

[美] M. R. 施皮格尔　著

费 鹤 良　等译

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷

开本787×1092 1/16　印张 23　字数546,000

1988年2月第1版　1988年2月第1次印刷

印数: 1—7,000

ISBN 7-5323-0570-8/O.52

统一书号: 13119·1450　定价: 5.60 元

译　　序

M. R. 施皮格尔著《概率统计的理论和习题》一书的特点是用大量实例说明概率论和数理统计在各个领域中的应用，并选择了各种类型的习题供读者练习．由于该书的起点较低，只要熟悉微积分的读者就可阅读，无疑，这对于初学者和实际工作者来说是一本很有价值的参考书．本书也可作为高等学校的教学参考书．

在翻译过程中，我们对书中的章、节、段加了编号．对原书中的错误之处作了改正，并验算了书中的习题，凡发现有错误的地方均作了注，以便读者参考．本书第一章由张珊囡、夏鉴清译；第二章由夏鉴清译；第三、四章由徐锦龙译；第五章由张晓云译；第六、七章由费鹤良译；第八、九章由丁元译．徐锦龙校了前四章，费鹤良校了后五章．全书由费鹤良副教授作了整理．在翻译过程中，吴炳荣同志仔细地看了第五章的初译稿，提出了宝贵意见，在此表示感谢．

由于我们水平有限，书中不妥之处在所难免，竭诚欢迎广大读者批评指正．

译　者

原　　序

重要而迷人的概率学科起源于十七世纪，经过诸如费尔马和帕斯卡等数学家的努力，回答了有关机会游戏的问题．直到二十世纪，建筑在公理、定义和定理基础上的严格数学理论才建立起来．随着时间的推移，概率论不仅在工程、科学和数学方面有许多应用，而且在保险统计科学、农业和商业直至医学和心理学领域中也有广泛的应用．许多事例说明，应用本身也推动了理论的进一步发展．

统计学科的起源远远早于概率，起初主要是用各种图、表形式来处理数据的收集、整理和表示．随着概率论的出现，在数据分析的基础上，应用统计学可以得到许多有用的结论，并作出合理的决策，诸如抽样理论和预测或预报．

本书是以微积分为背景来介绍近代概率和统计理论及方法的．为方便起见，本书分成两部分，第一部分讲述概率（它本身就能提供有关概率论方面的介绍），第二部分讲述统计．

这本书打算既可作为概率和统计正规课程的教科书，又可作为所有流行的标准教科书的综合性补充．对于研究工作者或在概率统计方面有兴趣的自学读者，它也是一本有价值的参考书．这本书可作为一年的课程或经过适当的选择作为一学期的课程．

我非常感谢已故英国皇家学会会员 R. A. 费歇的文件掌管人和英国皇家学会会员耶茨．伦敦龙门有限公司同意我采用他们出版的《生物、农业和医药研究统计用表》一书（1974，第 6 版）中的表 III，对此表示感谢．我也想借此机会感谢戴维·贝克威士卓越的编辑以及尼科拉·蒙蒂的美术工作．

M. R. 施皮格尔

1975.9

目　　录

第一部分　概　率　论

第二部分 数 理 统 计

第一部分

概率论

第一章 集合和概率

§1.1 基本内容

1. 集合的概念

集合的概念是概率论与数理统计的基础，更一般地说，是数学的基础. 集合可以被认为是一些对象的全体，其中每个对象称为集合的*成员*或集合的*元素*. 一般说来，除非另有规定，我们总用 A, B, C 这样的一类大写字母来表示集合，用 a, b 这样的一类小写字母来表示元素. 集合的同义词是*类*、*集*.

如果元素 a 属于集合 C，我们就记作 $a\in C$. 而如果 a 不属于 C，我们就记作 $a\notin C$. 如果 a, b 都属于 C，我们就记作 $a, b\in C$. 为了使一个集合能合理地被确定，我们总是假定：我们一定能确定一个具体的对象是否属于这个集合.

一个集合可以通过如实地列举它的元素来确定，如果这是不可能的话，则可通过描述由集合中所有元素都具有、而集合外的元素都不具有的某种性质来确定. 第一种称为*列举法*，第二种称为*性质法*.

例 1.1 英语字母表中所有元音字母的集合，可由列举法来确定，如 $\{a, e, i, o, u\}$；也可以由性质法来确定，如 $\{x|x$ 是元音字母$\}$，读成"所有元素 x 的集合，这里 x 是元音字母"，竖直线读成"使得"或"已知".

例 1.2 集合$\{x|x$ 是平面上的三角形$\}$是平面上所有三角形的集合. 注意，这里不能使用列举法.

例 1.3 如果我们掷一副普通的骰子，每颗骰子向上的一面所出现的"数"或"点"是集合$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$的元素.

2. 子集合

如果集合 A 的每个元素都属于集合 B，我们称 A 是 B 的*子集合*，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，分别读成"A 包含于 B"或"B 包含 A". 由此可知：对所有的集合 A，有 $A\subset A$. 如果 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$，我们就称 A 和 B *相等*，记作 $A=B$. 在此场合，A 和 B 确实有相同的元素.

如果 A 不等于 B，即如果 A 和 B 有不相同的元素，我们记作 $A\neq B$.

如果 $A\subset B$，但 $A\neq B$，我们称 A 是 B 的*真子集*.

例 1.4 $\{a, i, u\}$是$\{a, e, i, o, u\}$的真子集.

例 1.5 $\{i, o, a, u, e\}$是$\{a, e, i, o, u\}$的子集，而不是真子集，因为两个集合是相等的. 注意，元素仅仅重新排列，不改变集合.

例 1.6 在掷一颗骰子的可能结果中，骰子出现的"偶数"是集合$\{2, 4, 6\}$的元素，而$\{2, 4, 6\}$是所有可能的结果所成之集$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$的(真)子集.

下述定理对于任何集合 A, B, C 都是成立的.

定理 1-1 如果 $A\subset B$，且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.

3. 全集和空集

由于种种需要，我们限于讨论某个特殊集合的子集，称此特殊集合为论域，或简称全域．也称为全集或空间，并用 $\mathscr{U}$ 表示．空间的元素常常称为空间的点．

考虑没有元素的集合是有用处的．称它为空集或零集，并用 $\varnothing$ 表示，它是任一集合的子集．

例 1.7 一个早已熟悉的重要集合是实数集合 $\mathscr{R}$，它可用数轴上的点来表示．如果 a 和 b 是实数，且 $a<b$，那么 $\mathscr{R}$ 的子集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 和 $\{x|a<x<b\}$ 分别称为闭区间和开区间．类似 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 或 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 这样的子集称为半开区间或半闭区间．

例 1.8 所有使 $x^2=-1$ 的实数 x 的集合，记作 $\{x|x^2=-1\}$，因为没有一个实数的平方等于 -1，所以它是零集或空集．可是，如果我们在复数范围内考虑，那么这个集合就不是空集．

例 1.9 如果我们掷一颗骰子，那么所有可能结果的集合是全集 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$．而以 7 点或 11 点为结果的集合是空集．

4. 文氏图

几何上，全集 $\mathscr{U}$ 能表示为一个长方形内部的点所组成的集合．在此种情况下，$\mathscr{U}$ 的子集（如图 1-1 中的阴影部分 A 和 B 所示）由圆内部的点的集合来表示．这样的图称为文氏图，关于集合之间的相互关系，文氏图提供了直观的解释．

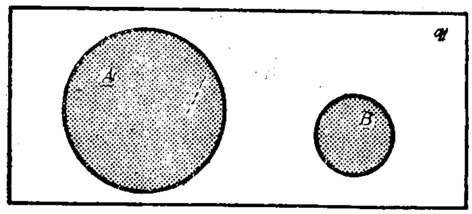

图 1-1

5. 集合运算

(1) 并 属于 A 或属于 B 或同时属于 A 和 B 的所有元素（或点）的集合称为 A 和 B 的并，且用 $A\cup B$ 表示（图 1-2 中的阴影部分）．

(2) 交 同时属于 A 和 B 的所有元素的集合称为 A 和 B 的交，且用 $A\cap B$ 表示（图 1-3 中的阴影部分）．

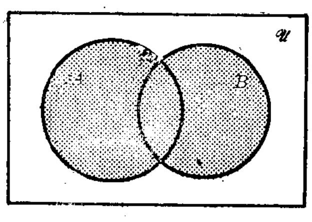

图 1-2

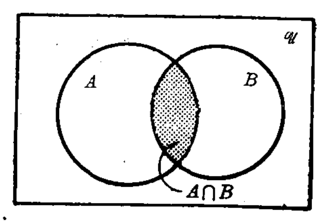

图 1-3

满足 $A\cap B=\varnothing$，即没有公共元素的两个集合 A 和 B，称为不相交集合．图 1-1 中，A 和 B 是不相交的．

(3) 差 由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合称为 A 和 B 的差，并用 $A-B$ 表示（图 1-4 中的阴影部分）．

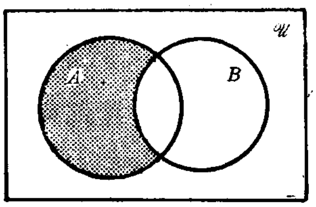

图 1-4

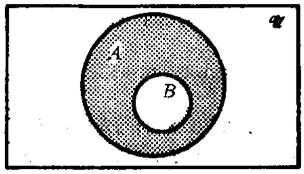

图 1-5

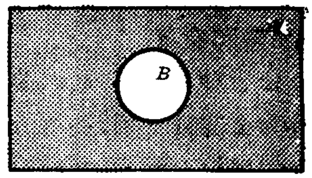

图 1-6

(4) 余 如果 $B\subset A$, 则 $A-B$ 称为 B 关于 A 的余, 并用 B'_A 表示(图 1-5 中的阴影部分). 如果 $A=\mathscr{U}$, 我们把 $\mathscr{U}-B$ 简单地称为 B 的余, 且用 B' 表示 (图 1-6 中的阴影部分). $A\cup B$ 的余集用 $(A\cup B)'$ 表示.

6. 关于集合运算的一些定理

定理 1-2 (并的交换律) $A\cup B=B\cup A$.

定理 1-3 (并的结合律) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$.

定理 1-4 (交的交换律) $A\cap B=B\cap A$.

定理 1-5 (交的结合律) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$.

定理 1-6 (第一分配律) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

定理 1-7 (第二分配律) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

定理 1-8 $A-B=A\cap B'$.

定理 1-9 如果 $A\subset B$, 则 $A'\supset B'$ 或 $B'\subset A'$.

定理 1-10 $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$.

定理 1-11 $A\cup\mathscr{U}=\mathscr{U}$, $A\cap\mathscr{U}=A$.

定理 1-12a (德·摩尔根第一定律) $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

定理 1-12b (德·摩尔根第二定律) $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

定理 1-13 对任何集合 A 和 B, 有 $A=(A\cap B)\cup(A\cap B')$.

定理 1-12a, 1-12b 和 1-13 都能推广(见题 1.69 和 1.74).

7. 对偶原理

在关于集合的式子中, 如果我们以交代替并, 以并代替交, 所有的集合都由它们的余集来代替, 并且颠倒包含符号 $\subset$ 与 $\supset$, 那么式子仍然成立.

8. 随机试验

在科学研究和工程中, 我们都熟知试验的重要性. 在试验中涉及的一个基本原则是: 如果我们在几乎相同的条件下进行重复试验, 我们就能得到基本相同的结果.

可是, 也存在一类试验, 虽然条件可能是几乎相同的, 而试验的结果不是基本相同的. 这样的试验称为随机试验. 下面是一些例子.

例 1.10 如果我们掷一枚硬币, 试验的结果或出现反面, 用符号 T(或 0)表示, 或出现正面, 用符号 H(或 1)表示, 即用集合$\{H, T\}$(或$\{0, 1\}$)中的一个元素来表示.

例 1.11 如果我们掷一颗骰子, 试验的结果将出现集合$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$中的一个数.

例 1.12 如果我们将一枚硬币连掷两次，其所有可能结果表示为 $\{HH, HT, TH, TT\}$，也即两次均为正面，第一次为正面第二次为反面，等等.

例 1.13 若我们有一台制造螺栓的机器，试验结果表明，可能产生次品，于是，生产的一个螺栓将是集合{次品，非次品}的一个元素.

例 1.14 假如试验是测量某公司生产的灯泡的"寿命"，于是试验的结果是时间 t（小时），它落在某个区间中，譬如说 $0\leqslant t\leqslant 4000$，在这里我们假定没有一个灯泡的寿命超过 4000 小时.

9. 样本空间

一个随机试验的一切可能结果所成之集 S 称为*样本空间*，其中的每一个结果称为*样本点*. 能描述试验结果的样本空间往往不止一个，但通常只有一个样本空间会提供最多的信息. 应该注意到 S 对应于全集.

例 1.15 假如我们掷一颗骰子，其一个样本空间或一切可能结果的集合是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，而另一个是{奇数，偶数}. 然而，后者显然不能确定一个结果能否被 3 整除.

用图来表示样本空间往往是很有用的. 在这种场合，只要有可能，我们总是希望用数来表示文字.

例 1.16 假如我们将一枚硬币掷两次，并用 0 表示反面，用 1 表示正面，那么样本空间（见例 1.12）能用图 1-7 中的点来表示，例如 $(0, 1)$ 表示第一次出现反面而第二次出现正面，也就是 TH.

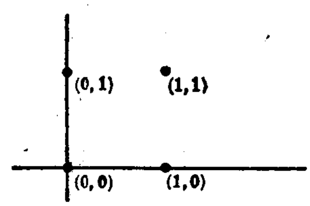

图 1-7

如果一个样本空间有有限个点，如例 1.16，则称它为*有限样本空间*. 如果它有如自然数 1, 2, 3, … 一样多的点，则称它为*可数无限样本空间*. 如果它的点和 x 轴上某区间（如 $0\leqslant x\leqslant 1$）中的点一样多，则称它为*不可数无限样本空间*. 有限或可数无限的样本空间经常称为*离散样本空间*，不可数无限样本空间称为*非离散*或*连续样本空间*.

10. 事件

一个*事件*是样本空间 S 的一个子集 A，也即它是可能结果的一个集合. 如果试验结果是 A 的元素，我们说事件 A *发生*. 由 S 中的单个点构成的事件经常称为*简单事件*或*基本事件*.

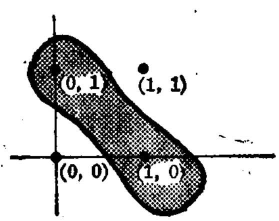

图 1-8

例 1.17 如果我们将一枚硬币连扔两次，仅仅出现一次正面的事件是样本空间的子集，它是由点 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$ 所构成的，如图 1-8 所示.

我们把 S 本身作为一个特殊事件，由于每次试验中必出现 S 的元素，故称它为*必然事件*. 并且把空集 $\varnothing$ 也作为一个特殊事件，因为每次试验中它的元素都不会出现，故称它为*不可能事件*.

由于事件是集合，显然关于事件的陈述能转化为集合论的语言，反之亦然. 特别，事件的代数对应着 §1.1.5 中的集合的代数.

对 S 中的事件使用集合运算，能在 S 中获得另外的事件. 如果 A 和 B 是事件，则

(1) $A\cup B$ 是事件"A 发生或 B 发生或两者同时发生".

(2) $A\cap B$ 是事件“A, B 同时发生”.

(3) A' 是事件“A 不发生”.

(4) $A-B$ 是事件“A 发生而 B 不发生”.

如果对应于事件 A 和 B 的集合是不相交的，即 $A\cap B=\varnothing$，那么我们通常就说这两个事件是**互斥的**，或**互不相容的**．这意味着它们不能同时发生.

例 1.18 对于将一枚硬币连掷两次的试验，令 A 是事件“至少一个正面发生”，B 是事件“第二次掷的结果是反面”．则 $A=\{HT, TH, HH\}$，$B=\{HT, TT\}$．因此我们有 $A\cup B=\{HT, TH, HH, TT\}=S$，$A\cap B=\{HT\}$，$A'=\{TT\}$，$A-B=\{TH, HH\}$.

11．概率的概念

在任一随机试验中，对于一个具体事件来说，它是否会发生，总存在着不确定性．在 0 和 1 之间指定一个数作为该事件发生的**概率**或**可能性**的度量，这是恰当的．如果我们肯定或确信事件将发生，我们说它的概率是 100% 或 1，如果我们肯定事件不会发生，我们就说它的概率是零．例如若概率是 1/4，我们说它发生的可能性是 25%，不发生的可能性是 75%．等价地，我们能说它不发生的可能性与发生的可能性之比是 75% 比 25%，或 3 比 1.

有两个重要的方法可以用来估计事件的概率.

(1) 古典方法或先验方法 如果事件能以 h 种不同情况发生，而可能情况的总数为 n，每种情况的发生是等可能的，则事件的概率是 h/n.

例 1.19 假设将一枚硬币掷一次，试求正面向上的概率．因为硬币呈现“正面”和“反面”是等可能的（假设硬币不滚动或不直立）．且两种情况中正面出现仅仅是其中的一种情况，我们有理由认为所求的概率是 1/2．这里我们假定硬币是均匀的.

(2) 频率的或后验的方法 如果一个试验经过 n 次重复，这里 n 是很大的．如果某一事件发生了 h 次，则此事件的概率是 h/n．这也称为事件的**经验概率**.

例 1.20 如果我们把一个硬币掷 1000 次，且发现它出现 532 次正面，我们估计出现正面的概率为 $532/1000=0.532$.

古典方法和频率方法两者都有严重缺陷，第一是因为“等可能”这句话是不明确的，第二是所谓“次数 n 很大”也是不明确的．为了克服这些缺陷，近年来数学家应用集合论引入了概率的**公理化方法**.

12．概率的公理化定义

假定我们有一个样本空间 S．如果 S 是离散型的，那么所有子集都与事件相对应，反之亦然．但是如果 S 是连续样本空间，那么仅仅是特殊的集合（称为**可测集**）才与事件相对应．对事件类 C 中的每一个事件 A，我们用实数 $P(A)$ 与之联系起来，也即 P 是定义在 C 上的一个实值函数．如果满足下列公理：

公理 1 对于类 C 中的每一个事件 A，有

$$P(A)\geqslant 0. \tag{1-1}$$

公理 2 对于类 C 中的必然事件 S，有

$$P(S)=1. \tag{1-2}$$

公理 3 对于类 C 中的互斥事件 A_1, A_2, $\cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1-3}$$

特别，对于仅为二个互斥事件 A_1, A_2 的情况，有

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2). \tag{1-4}$$

则称 P 为概率函数，称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

13. 关于概率的某些重要定理

根据上面的公理，可证明一系列定理，这些定理对于以后的研究是重要的.

定理 1-14 如果 $A_1\subset A_2$，则 $P(A_1)\leqslant P(A_2)$ 且

$$P(A_2-A_1)=P(A_2)-P(A_1).$$

定理 1-15 对于每个事件 A,

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1, \tag{1-5}$$

即概率在 0 和 1 之间.

定理 1-16 $$P(\varnothing)=0, \tag{1-6}$$

即不可能事件的概率为零.

定理 1-17 如果 A' 是 A 的余，则

$$P(A')=1-P(A). \tag{1-7}$$

定理 1-18 如果 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，其中 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 是互斥事件，则

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1-8}$$

特别，如果 $A=S$，则

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1. \tag{1-9}$$

定理 1-19 如果 A 和 B 是任意两个事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \tag{1-10}$$

更一般地，如果 A_1, A_2, A_3 是任意三个事件，则

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&-P(A_1\cap A_2)-P(A_2\cap A_3)-P(A_3\cap A_1)\\&+P(A_1\cap A_2\cap A_3).\end{aligned} \tag{1-11}$$

也可将它推广到 n 个事件. 见题 1.79.

定理 1-20 对于任何事件 A 和 B,

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B'). \tag{1-12}$$

定理 1-21 如果事件 A 发生必导致互斥事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 之一发生，则

$$P(A)=P(A\cap A_1)+P(A\cap A_2)+\cdots+P(A\cap A_n). \tag{1-13}$$

14. 概率的赋值

如果样本空间 S 仅仅由基本事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 组成，则由定理 1-18 知

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1. \tag{1-14}$$

由此可见，我们能随意选择一些非负数作为这些简单事件的概率，只要(1-14)式满足即可. 特别，若假定所有简单事件是等概率时，则

$$P(A_k)=\frac{1}{n},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{1-15}$$

如果 A 是由 h 个这样的简单事件所组成，则我们有

$$P(A)=\frac{h}{n}. \tag{1-16}$$

这与§1.1.11 中给出的古典方法是等价的．当然我们也能用其他方法来赋于概率，例如§1.1.11 中的频率方法．

概率的赋值提供了一个数学模型，它是否符合实际，必须由试验来检验，这正如在物理或其他科学中的理论必须由试验来检验一样．

例 1.21 掷一颗骰子，求出现 2 或 5 的概率．

样本空间是 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$．如果我们对每个简单事件赋以相同的概率，即如果我们假定骰子是均匀的，则

$$P(\{1\})=P(\{2\})=\cdots=P(\{6\})=\frac{1}{6}.$$

出现 2 或 5 的事件用 $\{2\}\cup\{5\}$ 表示，这样就有

$$P(\{2\}\cup\{5\})=P(\{2\})+P(\{5\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

15．条件概率

令 A 和 B 是两个事件(图 1-9)，且有 $P(A)>0$．用 $P(B|A)$ 表示*已知 A 发生的条件下 B 发生的概率*．因为已知 A 已发生，于是新的样本空间代替了原来样本空间 S．由此我们定义

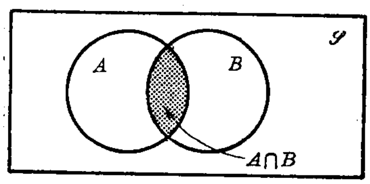

图 1-9

$$P(B|A)\equiv\frac{P(A\cap B)}{P(A)}, \tag{1-17}$$

或

$$P(A\cap B)\equiv P(A)\cdot P(B|A). \tag{1-18}$$

用语言来说，(1-18)式讲的是 A 和 B 同时发生的概率等于 A 发生的概率乘以已知 A 发生的条件下 B 发生的概率．我们称 $P(B|A)$ 为已知 A 发生的条件下 B 发生的*条件概率*，即已知 A 已经发生下 B 将会发生的概率．易证条件概率满足§1.1.12 中的公理．

例 1.22 将一颗骰子掷一次，求出现点数小于 4 的概率，如果(a) 没有给定其他条件，(b)在已知出现奇数的条件下．

(a) 令 B 表示事件{小于 4}．因为 B 是事件出现 1, 2 或 3 的并，由定理 1-18 就有

$$P(B)=P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2},$$

这里要假定对每个简单事件是等概率的．

(b) 令 A 是事件{奇数}，我们看到 $P(A)=3/6=1/2$，同样 $P(A\cap B)=2/6=1/3$，则

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/3}{1/2}=2/3.$$

于是增加了掷得结果为奇数的信息后，使概率从 1/2 升到 2/3．

16．条件概率的定理

定理 1-22 对于任何三个事件 A_1, A_2, A_3，我们有

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2). \tag{1-19}$$

这就是说，A_1, A_2, A_3 同时发生的概率等于 A_1 发生的概率乘以在 A_1 发生的条件下 A_2 发生的概率，再乘以在 A_1 和 A_2 同时发生的条件下 A_3 发生的概率．这个结果容易推广到 n 个事件．

定理 1-23 如果事件 A 发生导致互斥事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之一发生，则

$$P(A)=P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+\cdots+P(A_n)P(A|A_n). \quad (1\text{-}20)$$

17．独立事件

如果 $P(B|A)=P(B)$，即 B 发生的概率不受 A 是否发生的影响，则就说 A 和 B 是*独立事件*．由(1-18)式可知，这相当于

$$P(A\cap B)=P(A)P(B). \quad (1\text{-}21)$$

反之，如果(1-21)式成立，则 A 和 B 是独立的．独立性的一些性质在题 1.91 和 1.92 中给出．

如果 A_1, A_2, A_3 是独立的，则它们必须是两两独立的，即

$$P(A_j\cap A_k)=P(A_j)P(A_k) \quad j\neq k,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3; \quad (1\text{-}22)$$

还必须有

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3). \quad (1\text{-}23)$$

条件(1-22)和(1-23)中的任一个都不是充分的．容易将独立性概念推广到多于三个事件的场合．

18．贝叶斯定理或法则

假定 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互斥事件，它们的并是样本空间 S，也就是说试验必有这些事件中的一个发生．那么如果 A 是任一事件，我们就有下面的重要定理：

定理 1-24（贝叶斯法则）

$$P(A_k|A)=\frac{P(A_k)P(A|A_k)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(A|A_k)}. \quad (1\text{-}24)$$

这使我们能够求得在 A 发生下各个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的概率．根据这个理由，贝叶斯定理经常被称为*原因概率的定理*．

19．组合分析

在许多情况下，样本空间中样本点的个数不是很大的，可直接列出或数出所需样本点，从而求得概率，这样做是不困难的．可是当实际上无法直接计数时，就产生了问题．在这些情况下，就要用*组合分析*，它被称为*计数的高级方法*．

20．计数的基本原理．树图

如果一件事情能用 n_1 种不同的方法来完成，第二件事情能用 n_2 种不同的方法来完成，…，最后第 k 件事情能用 n_k 种不同的方法来完成，则完成全部 k 件事情，依次有 $n_1n_2\cdots n_k$ 种不同的方法．

例 1.23 如果一个人有 2 件衬衫和 4 根领带，则他有 $2\cdot4=8$ 种方法来选择一件衬衫和一根领带．

上述原理可用图来表示(如图 1-10)．由于这种图的形状象树，故称树图．