南京大学教材出版资助金项目

数学物理方法引论

徐效海 编

南京大学出版社

南京大学教材出版资助金项目

数学物理方法引论

徐效海 编

南京大学出版社

数学物理方法引论

徐效海　编

*

南京大学出版社出版

（南京大学校内　邮编 210093）

江苏省新华书店发行　南京京新印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 11.25　字数 281 千

1999 年 3 月第 1 版　　　1999 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—1000

ISBN 7-305-03315-4/O·223

定价　15.00 元

前　言

本教程是为物理系应用物理方向的学生编写的。

长期以来，对物理系学生的课程设置一向存在不同的观点。其中一个重要问题就是：要不要根据学生毕业后不同的发展方向而分流，即少数人将从事基础理论的研究，多数人将从事应用研究和技术开发，从而设置不完全相同的课程。本教程可以说是赞同实施分流教学的产物。对于后者来说，同前者学习同样艰深和全面的基础理论显然不甚适合，何况他们还将增加份量不轻的应用技术类课程。我们的初衷，就是为他们开设一套引论性的基础理论课程。

因为科学知识具有内在的继承性，根基是不能拆的，所以这套课程毫不迟疑地保留原有的基本内容；但是面向经济建设中心的教育，许多过去不开设的课程，现在再不教学是行不通的。因此，课时必须有较大幅度的减少，基本内容以外的材料应予大量精简。课程设置及内容的改革是大势所趋，势在必行。在校学习时间有限，重在打基础和培养自学能力，应成为共识。

这套课程，和传统的课程相比，具有如下特点：

第一，所占学时有较大幅度的减少。例如，数学物理方法由原来的 90 学时减为 54 学时。

第二，不同的内容设不同的教学要求：基本概念、基本方法深入介绍、熟练掌握；其它概念、其它方法概括介绍，一般了解，初步掌握。

第三，面向未来，增加科学发展新成果的展望性讲座。

本课程内容的具体选择，按以下几条原则进行：

1. 以最典型的三类数学物理方程：均匀弦的横振动方程、热传导方程、静电势的泊松方程和拉普拉斯方程，为介绍偏微分方程解法的出发点。

2. 数学物理方程解法中要求深入掌握的是分离变量（傅里叶级数展开）法。其它常用方法：包括直接积分法、傅里叶积分变换法、保角变换法、格林函数法、计算方法中的差分法，集中在一章里，作入门性的初步讨论。

3. 特殊函数要求深入掌握的是勒让德多项式、贝塞尔函数。球函数、柱函数仅作为了解的内容。

4. 复变函数论内容作了极大的压缩，保留最基本的概念：微商、积分、幂级数和留数。

5. 假定读者在高等数学中已经学习了傅里叶级数和积分。但照顾到特殊情形，在适当场合仍作了精要介绍。

6. 在已往绝大多数本课程的教材和参考书中，对非线性偏微分方程没有涉及。作为现代教材，必须面对它，所以本教程对此作了最为初步的介绍。

7. 在数学阐述中，以正确理解、熟练应用定理、结论为主，主要定理给出证明，证明的严格性只作适当要求。

本课程教学时间按 54 学时计。

这是一本按上述设想编写的教材和参考书。内容详细的参考书很多，现有的已不下数十

种。对于初学者来说，困难本就在于从厚厚的材料中有选择的学习。我们怎样去把握这些原则，精选基本内容，作到既能涵盖较多的发展方向，又能在少得多的时间内讲授，实非易事。由于编者学识有限，不能高屋建瓴，虽在成书前，作为讲义，已经三届学生试用，做过多次修改，但作得是否得当，实无把握，望专家、读者不吝指教。

本书在编写、修改过程中，南京大学物理系柯善哲教授提出许多有益的建议，编者得益良多，深表谢忱。

本书由南京大学教材出版资助金资助出版。出版过程中蒙南京大学出版社的大力支持，谨此致谢。

徐效海

1998 年 2 月于南京大学

目　　录

第一章　复变函数论

这一章用于介绍复变函数论最基本的概念。复变函数论方法为解决物理问题提供了许多重要工具。我们重点讨论解析函数、函数的幂级数展开、傅里叶级数和积分、幂级数在解二阶常微分方程中的应用等内容。

§1-1　复　变　函　数

我们从复变函数的概念开始。学习复变函数，完全可以而且应该随时同实变函数相对照。许多基本概念的引入，初看起来和实变函数几乎一模一样，而实际上却含有深刻的区别。学习时必须特别注意这种区别。

一、复变数

1. 复变数的表示

一个复变数 z 可有 3 种等价的表示方式：

① 直角坐标表示法

$$z = x + \mathrm{i}y, \tag{1-1-1}$$

其中　x 称为 z 的实部，y 称为 z 的虚部，分别记作

$$\mathrm{Re}z = x,\ \mathrm{Im}z = y。 \tag{1-1-2}$$

② 极坐标表示法

在坐标变换 $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$，$\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$ 后，复变数又可表示成

$$z = \rho\cos\varphi + \mathrm{i}\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \tag{1-1-3}$$

ρ 和 φ 分别称为复变数 z 的**模**和**辐角**，记作

$$|z| = \rho,\ \arg z = \varphi。 \tag{1-1-4}$$

注意，z 的辐角并不是唯一的，只确定到 2π 的整数倍。这是因为，两个模相同而辐角相差 $2n\pi$ 的复数在平面上代表同一点。因此，我们有

$$\varphi = \varphi_p + 2n\pi\quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots),$$

其中　φ_p 满足

$$0 \leqslant \varphi_p < 2\pi,$$

称为复变数 z 的**主辐角**。

③ 指数表示法

利用欧拉公式

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1-1-5}$$

复变数 z 还可表示成指数的形式

$$z = \rho e^{i\varphi}。 \tag{1-1-6}$$

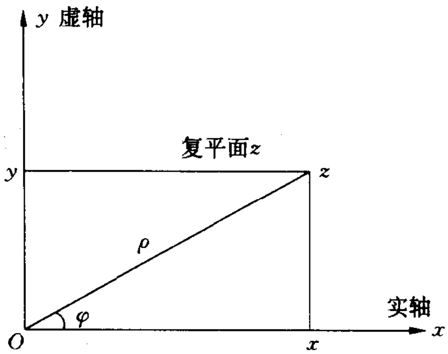


图 1-1-1　复变数的几何表示

复变数 z 可以用复平面上的一个点(图 1-1-1)来表示。在复平面 z 上,x 轴称为实轴,单位为实数 1;y 轴称为虚轴,单位为虚数 i。这样,点 $z=x+iy$,就是复变数 z。复变数 z 也可以用 $O\text{-}xy$ 平面上的矢量 Oz 表示。矢量的长度 ρ 就是复变数的模;矢量的方向角 φ 就是复变数的辐角。

共轭复数　复变数 z 的共轭复数 z^*,定义为

$$z^* = x - iy, \tag{1-1-7}$$

即

$$z^* = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi), \tag{1-1-8}$$

亦即

$$z^* = \rho e^{-i\varphi}。 \tag{1-1-9}$$

无限大复数　在复数领域中,无限大复数 $z=\infty$ 的概念是:它的模为无限大,而其幅角则没有明确的意义。

2. 复变数的代数运算

设有两个复变数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$。如果我们有:$x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$,则这两个复变数称为相等,$z_1 = z_2$。它们之间的代数运算定义如下:

两个复变数之和(差)为

$$z = z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \tag{1-1-10}$$

两个复变数之积为

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \tag{1-1-11}$$

两个复变数之商为

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, \tag{1-1-12}$$

复变数的乘、除运算用指数表示时最为方便:

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \exp\{i(\varphi_1 + \varphi_2)\},$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \exp\{i(\varphi_1 - \varphi_2)\}。$$

由此可见:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2;$$

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,$$

$$\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2。$$

复变数的 n 次幂为

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)。\tag{1-1-13}$$

复变数的 n 次根式为

$$z^{1/n} = \rho^{1/n} e^{i\varphi/n} = \rho^{1/n}[\cos(\varphi/n) + i\sin(\varphi/n)]。\tag{1-1-14}$$

3. 复变数的极限

设复变数 $z = x + iy$，复常数 $\alpha = a + ib$，当

$$|z - \alpha| = [(x-a)^2 + (y-b)^2]^{1/2} \to 0 \tag{1-1-15}$$

时，就称复变数 z 以 α 为极限，记作 $z \to \alpha$。

复变数的极限可归结为两个实变数的极限：

$$|z - \alpha| \to 0，即\ z \to \alpha,$$

等价于

$$\left.\begin{aligned} &|x-a| \to 0，即\ x \to a; \\ &|y-b| \to 0，即\ y \to b。\end{aligned}\right\} \tag{1-1-16}$$

4. 区域

邻域　由不等式 $|z - z_0| < \delta$ 确定的点的集合，即以 z_0 为圆心，以任意小的正实数 $\delta > 0$ 为半径的圆之内部，称为 z_0 的 δ **邻域**。

区域　由境界线 L 包围的复平面上的一个范围 G，境界线上的点 C 称为**界点**，境界线包围区域中的点 A 称为**内点**，境界线外部的点 B 称为**外点**。所有界点和内点的集合称为**闭区域** G'；所有内点的集合称为**开区域** G，简称**区域**。如图 1-1-2 所示。

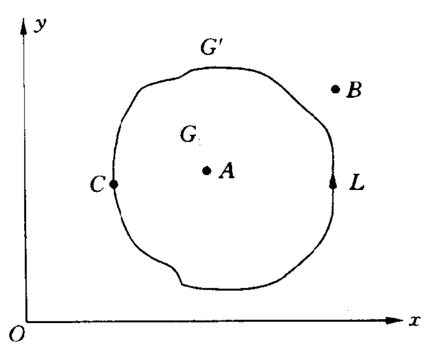


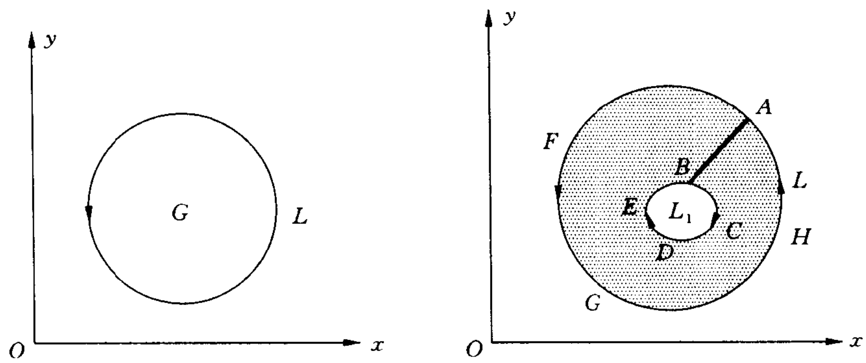
图 1-1-2　区域

境界线的正向　当观察者沿境界线前进时，如果区域在其左侧，则观察者前进的方向就称为境界线的正向。

单连域与复连域　设 G 为区域，如果属于 G 的每一条简单闭曲线所围的全部点都属于 G，则称 G 为单连域(图 1-1-3(a))；否则称为复连域(图 1-1-3(b))。

复连域变为单连域　如果复连域中引入某些割线作为附加的境界线，将内境界线和外境界线连通，则复连域可变成单连域。如图 1-1-3(b)所示，外境界线 L 和内境界线 L_1 之间的区域本为一个复连域。

如果加上一条联接内外境界线的割线 AB，则一条复杂的境界线 $ABCDEBAFGHA$ 所围成的区域就变成一个单连域了，箭头表示其正向。



(a) (b)

图 1-1-3 单连域和复连域

二、复变函数

1. 定义

当复变数 z 在复平面上某个区域 G 中变化时，按某一规律有一个或多个复数 w 和它相对应，则称 w 为 z 的**复变函数**，z 称为函数 w 的**宗量**，记作 $w=f(z)$。区域 G 称为复变函数 w 的**定义域**。

如果 w 和 z 为一一对应的关系，则称 w 为 z 的**单值函数**；否则称为**多值函数**。

w 既然是一个复数，当然也可分为实部 u 和虚部 v

$$w = u + \mathrm{i}v。$$

显然，u 与 v 应为实变数 x，y 的函数

$$u = u(x,\ y),$$

$$v = v(x,\ y)。$$

由此可见，一个复变函数 $w(z)$ 对应着两个实变函数 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$。

2. 初等复变函数

常用的初等复变函数有：

多项式

$$w = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n。\tag{1-1-17}$$

有理函数

$$w = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}。\tag{1-1-18}$$

无理函数

$$w = (a_0 + a_1 z)^{1/2}。\tag{1-1-19}$$

指数函数

$$w = \mathrm{e}^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{1-1-20}$$

三角函数

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}。 \tag{1-1-21}$$

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}。 \tag{1-1-22}$$

双曲函数

$$w = \mathrm{sh} z = (e^{z} - e^{-z})/2。 \tag{1-1-23}$$

$$w = \mathrm{ch} z = (e^{z} + e^{-z})/2。 \tag{1-1-24}$$

对数函数

$$w = \ln z = \ln(\rho e^{i\varphi}) = \ln\rho + i\varphi = \ln|z| + i\arg z 。 \tag{1-1-25}$$

对于这些复初等函数，我们必须指出：虽然这些复初等函数可以看成是相应实初等函数的推广，实初等函数也可看成是相应复初等函数的特例。但是，因为复初等函数的定义域扩大了，所以它的全部性质是不可能和对应的实函数相同的。

例如，就对数函数而言，在实变函数中，只有当自变量 $x > 0$ 时函数才有意义；但在复对数函数情况下，当 $z = -x(x > 0)$ 时，$\ln z$ 仍然有意义。

又如，在实变函数下，$\sin x$ 的绝对值不能大于 1，但在复变函数时，$\sin z$ 的模却完全可以大于 1(即 $|\sin z| > 1$)。

3. 变换和映射

在实变函数论中，我们经常借助函数图来形象地了解函数的性质。对于复变函数而言，函数 $\xi = \xi(z)$，其宗量 z 在 z 平面上函数的定义域 D 中变化，而函数 ξ 则在另一个复平面 ξ 的某个区域 G 中变化。因此，复变函数中的函数图与实变函数图不同，不能在同一平面上画出，只能用两个复平面表示，如图 1-1-4 所示。区域 G 中的点和区域 D 中的点，按函数关系所确定的那样一一对应。

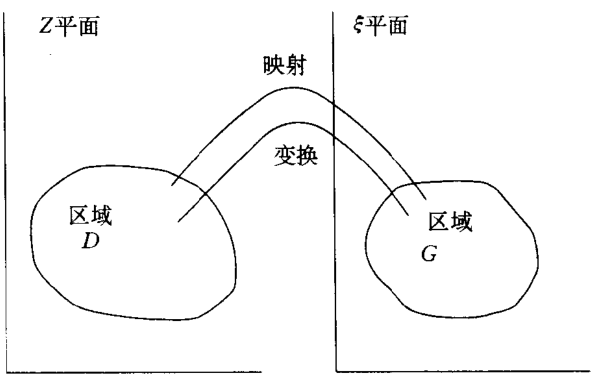


图 1-1-4 复变函数、变换与映射

由此可见，函数关系也可视为一种**变换**，它将 z 平面的区域 D 变换到了 ξ 平面上的区域 G。两区域中的点一一对应；或者将函数关系说成是一种**映射**，它将 z 平面的区域 D，映射到了 ξ 平面的区域 G 上。

§1-2 复变函数的微商和积分

一、复变函数的微商

1. 定义

对于函数 $f(z)$，如果下述极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

存在，则将其定义为函数 $f(z)$ 的微商，记作

$$f'(z)=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}。\tag{1-2-1}$$

并说函数 $f(z)$ 在 z 点**可微**。

2. 柯西-黎曼方程(函数可微的必要条件)

复变函数的可微条件，要比实变函数苛刻得多。那是因为，在定义(1-2-1)式中，$\Delta z\to 0$ 的方式，在复平面上可以有无穷多种，而在这些方式下的极限都要存在，并且相等。因此，函数要可微，$\Delta z\to 0$ 的方式至少沿平行于 x 轴方向进行和沿平行于 y 轴方向进行所得的极限要相等。

当 $\Delta z\to 0$ 是沿平行于实轴方向进行时，$\Delta y=0$，$\Delta z=\Delta x\to 0$。所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}。$$

当 $\Delta z\to 0$ 是沿平行于 y 轴方向进行时，$\Delta x=0$，$\Delta z=\mathrm{i}\Delta y\to 0$，所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\lim_{\mathrm{i}\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\mathrm{i}\Delta y}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}。$$

由以上两个极限相等，我们得到函数可微的必要条件：**柯西-黎曼方程**

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y},\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{\partial u}{\partial y}。\end{aligned}\right\}\tag{1-2-2}$$

利用坐标变换：

$$x=\rho\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\varphi。$$

和复合函数的微商规则，不难证明，柯西-黎曼方程在极坐标中的形式是

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \rho}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}&=-\frac{\partial v}{\partial \rho}。\end{aligned}\right\}\tag{1-2-3}$$

我们不加证明地指出，函数可微的充分必要条件是：4 个偏导数 u_x，u_y，v_x，v_y 都存在且连续，同时还满足柯西-黎曼方程。

3. 微商的基本公式

因为复变函数的微商与实变函数的微商类似，也用函数增量和宗量增量之比值的极限来定义，所以实变函数的基本微商规则对复变函数也适用。例如：

$$\frac{\mathrm{d}(w\pm u)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\pm\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z},\tag{1-2-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}(wu)}{\mathrm{d}z}=w\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+u\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z},\tag{1-2-5}$$

$$\frac{\mathrm{d}(w/u)}{\mathrm{d}z}=\frac{w'u-u'w}{u^2},\tag{1-2-6}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(w(z))}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z},\tag{1-2-7}$$

$$\frac{\mathrm{d}z^n}{\mathrm{d}z}=nz^{n-1},\tag{1-2-8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^z}{\mathrm{d}z}=\mathrm{e}^z,\tag{1-2-9}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin z}{\mathrm{d}z}=\cos z,\tag{1-2-10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\cos z}{\mathrm{d}z}=-\sin z,\tag{1-2-11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{z}。\tag{1-2-12}$$

二、解析函数

1. 定义

若在区域 D 上，函数 $w=f(z)$ 处处可微，则称函数 w 为区域 D 上的**解析函数**。

解析函数的定义是跟区域联系在一起的。可微的概念是对某个点定义的。所以，函数$f(z)$在某一点可微并不等于在某点的邻域中解析。因此，对于函数 $f(z)$在某点 z 解析的陈述，应理解成在 z 的邻域中解析。

解析函数有许多重要性质，是我们在这一章中讨论的主要对象。

2. 共轭调和函数

将柯西-黎曼方程第一式对 x 求微商，第二式对 y 求微商可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}。\end{aligned}\right\}\tag{1-2-13}$$

将以上两式相加，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0。\tag{1-2-14}$$

由此可见，函数 $u(x,y)$满足**拉普拉斯方程**，所以是**调和函数**。仿此，同样可证函数 $v(x,y)$也是调和函数。因为他们构成解析函数的实部和虚部，所以又称为**共轭调和函数**。

3. 复势和等温网

若令解析函数的实部和虚部分别等于常数

$$\left.\begin{aligned}u(x,y)&=c,\\ v(x,y)&=c。\end{aligned}\right\}\tag{1-2-15}$$

则它们各代表一组曲线。

将柯西-黎曼方程(1-2-4)的两式相乘，并移项到等式的同一边，可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\nabla u\cdot\nabla v=0。$$

上式表明，函数 u 的梯度 ∇u 与函数 v 的梯度 ∇v 互相正交，它们各为曲线族 $u(x, y)=c$ 和 $v(x, y)=c$ 的法向矢量。因此，这两族曲线是**互相正交的**。

我们知道，平面静电场是保守力场，是有势场，其电势满足拉普拉斯方程(在无电荷的区域中)，等势线和电场线是两族相互正交的曲线族。实际上平面静电场和解析函数确有密切的关系：若将解析函数的实部(或虚部)代表电势，则 $u(x, y)=c$(或 $v(x, y)=c$) 便是等势线，$v(x, y)=c$(或 $u(x, y)=c$) 便是电场线。可见，解析函数可用来描述静电场，所以称解析函数 $f(z)$ 为相应静电场的**复势**。

在第四章中，我们还将看到，稳定温度场同样满足拉普拉斯方程。等温线和热流线也是两组正交曲线。因此，解析函数同样可用来描述温度场。其 $u(x, y)=c$ 和 $v(x, y)=c$ 分别代表温度场的等温线和热流线。有鉴于此，我们一般地就把这两族曲线都叫做**等温网**。

由于解析函数 $w=f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$ 的实部 u 和虚部 v，必定满足柯西-黎曼方程。因此，无论是给定了调和函数 u 还是 v，总可根据柯西-黎曼方程求出其共轭调和函数 v 或 u，从而求出解析函数 w。它是某个静电场或稳定温度场的复势。

例题　已知解析函数的实部 $u=x^2-y^2$，

① 求共轭调和函数 $v(x, y)$；

② 求解析函数 $w=f(z)$；

③ 画出等温网图，并说明这个复势描述什么样的静电场？

解答：

① 根据柯西-黎曼方程，我们有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \tag{2}$$

由此可知，二元函数 $v(x, y)$ 的全微分是

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=2y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y=\mathrm{d}(2xy+c),$$

故求出函数

$$v(x, y)=2xy+c。\tag{3}$$

求取函数 $v(x, y)$ 也可用直接积分的方法。先将(1)式对 x 求积分，可得

$$v(x, y)=\int\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x=\int 2y\mathrm{d}x=2xy+f(y)。\tag{4}$$

因为现在的函数 $v(x, y)$ 是二元函数，对 x 求不定积分的结果不是出现一个积分常数，而应是

另一个变量 y 的任意函数 $f(y)$。

为确定任意函数 $f(y)$，将(4)式代入(2)中，可得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=f'(y)+2x=2x,$$

故

$$f'(y)=0,\ f(y)=c。$$

于是，同样求得(3)式的函数 $v(x,\ y)$。

② 要求的解析函数为

$$f(z)=(x^2-y^2)+\mathrm{i}(2xy+c)=(x+\mathrm{i}y)^2+\mathrm{i}c=z^2+\mathrm{i}c。$$

③ 等温网图

曲线族

$$u(x,\ y)=x^2-y^2=c_1,$$

$$v(x,\ y)=2xy=c_2,$$

分别代表两族相互正交的双曲线，如图 1-2-1 所示。

我们若将 $u(x,\ y)=c$ 视为电场线，$v(x,\ y)=c$ 视为等势线，则该复势描述了两块互相垂直的无限大均匀带电板所产生之静电场，两板的截口位于 Ox 轴和 Oy 轴上。

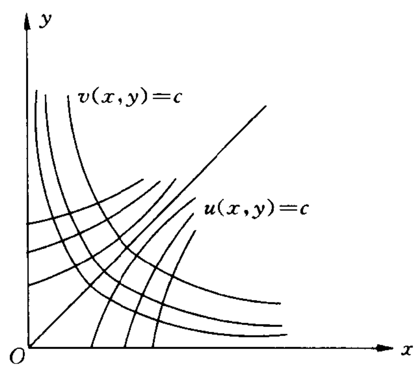


图 1-2-1　等温网

三、多值函数

1. 定义

如果函数 $f(z)$和宗量 z 的关系不是一一对应的，即一个 z 值具有两个以上确定的对应值，则称 $f(z)$为 z 的多值函数。例如函数

$$w=f(z)=z^{1/2}=\rho^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}。$$

我们知道，宗量 z 的幅角 φ 可以相差 2π 的整数倍，即

$$\varphi=\varphi_p+2n\pi\quad(0\leqslant\varphi_p\leqslant 2\pi)。$$

这样，函数 $f(z)$就会出现两个不同的值

$$\begin{aligned}w&=\rho^{1/2}\exp\{\mathrm{i}(\varphi_p+2n\pi)/2\}\\&=\begin{cases}\rho^{1/2}\exp\{\mathrm{i}\varphi_p/2\} & (当\ n=0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2k,\ \cdots),\\-\rho^{1/2}\exp\{\mathrm{i}\varphi_p/2\} & (当\ n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2k+1,\cdots)。\end{cases}\end{aligned}\tag{1-2-16}$$

由此可见，对于函数 w 的两个不同值，只需取 $n=0,\ 1$ 即可，

$$\left.\begin{aligned}w_1&=\rho^{1/2}\exp\{\mathrm{i}\varphi_p/2\}\quad(n=0),\\w_2&=-\rho^{1/2}\exp\{\mathrm{i}\varphi_p/2\}\quad(n=1)。\end{aligned}\right\}\tag{1-2-17}$$

类似地，函数 $w=z^{1/n}$，其 n 个不同的值(对应于 $z^{1/n}$ 的 n 个根)为：

$$w=z^{1/n}=\rho^{1/n}\exp\{\mathrm{i}(\varphi_p+2k\pi)/n\},\quad k=0,1,2,\cdots,(n-1)。\qquad (1\text{-}2\text{-}18)$$

2. 多值函数的单值分支及主值

要使 z 和 w 的关系变成完全确定，我们可以在(1-2-17)的两个关系中选定一个值。这样，就可得到两个单值函数 w_1 和 w_2。这些单值函数称为**多值函数 $f(z)$ 的单值分支**。

通常，将第一个单值分支称为多值函数的**主值**。例如，函数(1-2-17)中的 w_1。实际上，一般地说，只要在函数 $f(z)$ 的宗量 z 中，限定其辐角取 $\varphi_p(0\leqslant\varphi_p\leqslant 2\pi)$，则它就是多值函数 $f(z)$ 的主值。

以后，我们在介绍函数的各种性质时，都理解成对单值函数或多值函数的主值而言，并不再一一申明。

四、复变函数的积分

1. 定义

如图 1-2-2 所示，在复平面的逐段光滑曲线 L 上定义连续函数 $f(z)$。从起点 z_0 处开始，以 $z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_n$ 等将曲线 L 分成 n 个小段。设 ξ_k 是曲线段 $z_{k-1}z_k$ 中间一点 z 的值。作和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k,$$

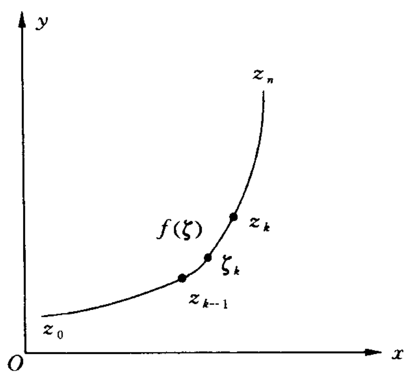


图 1-2-2　复变函数的路积分

当 $n\to\infty$、且 $\max|\Delta z_k|\to 0$ 时，如果和 S_n 的极限存在，则称它为**函数 $f(z)$ 沿曲线 L 的路积分，简称积分**，并记作

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max|\Delta z_k|\to 0}}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k。\qquad (1\text{-}2\text{-}19)$$

如果曲线 L 是一条闭曲线，则沿此曲线的积分称为**函数 $f(z)$ 的闭路积分**，记作

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z,$$

其中　积分路径沿正向(逆时针方向)进行。

求复变函数 $f(z)$ 的路积分，可以化为求两个二元实变函数的线积分。因为 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$\mathrm{d}z=(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)$ 所以

$$\begin{aligned}\int_L f(z)\mathrm{d}z&=\int_L[u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)](\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\\&=\int_L(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\int_L(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)。\qquad (1\text{-}2\text{-}20)\end{aligned}$$

由于复变函数的路积分可归结为两个二元实变函数的线积分，故不难理解它的如下性质：