

論連續三角网的精度

К. Л. 普羅沃洛夫 著

測繪出版社

論連續三角网的精度

王 德 著 王德昌校

附 增 冊 第 二 冊

論連續三角網的精度

K. Л. 普罗沃洛夫著

刘振英译

吴天柱校

測繪出版社

К.Л.ПРОВОРОВ
О ТОЧНОСТИ СПЛОШНЫХ
СЕТЕЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Издательство геодезической

литературы

МОСКВА ★ 1956

本書系根据苏联測繪出版社1956年于斯科出版的К.Л.普
罗沃洛夫 (К.Л.ПРОВОРОВ) “所著論連續三角网的精度”
(О ТОЧНОСТИ СПЛОШНЫХ СЕТЕЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ)
一書譯出。

本書研究了連續三角网在精度估計方面之主要問題，叙述
和分析了一部分作業成果，導出了估計連續三角网各元素的精
度的新公式，并对連續三角网的布設作出了一系列的結論。

作者沒有在本書中提出解決連續三角网的所有問題，尤其
是平差問題，單就這一問題而言足可寫成一部較大的著作。

本書系供科学工作人員、高等學校師生以及从事大地測量
工作的工程技術人員之用。

論連續三角网的精度

著者 К.Л.普 罗 沃 洛 夫

譯者 刘 振 英

出版者 測 繪 出 版 社

北京宣武門外永光寺西街3号

北京市書刊出版業營業許可証出字第081號

发行者 新 华 書 店

印刷者 五 三 六 工 厂

印数(京)1—1500册

开本31⁸×43¹/27

字数166,320

定价(10)1.10元

1958年5月北京第1版

1958年5月第1次印刷

印張7³/₉

目 录

原序	5
緒論	7
第一节 連續三角网角度觀測成果之精度	9
第二节 等边三角形連續网中确定边长及坐标 方位角之誤差	62
第三节 任意三角形連續三角网諸元素之精度估計	112
第四节 等边三角形連續三角网內确定对角綫諸 元素之誤差	120
第五节 研究連續三角网各項誤差之实验工作	134
第六节 图形形状对連續网諸元素精度之影响	146
第七节 三、四等三角点之測定精度	160
第八节 起算数据誤差影响之估計	180
結論	191
参考文献	197

論連續三角網的精度

K. Л. 普罗沃洛夫著

刘振英译

吴天柱校

測繪出版社

К.Л.ПРОВОРОВ
О ТОЧНОСТИ СПЛОШНЫХ
СЕТЕЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Издательство геодезической

литературы

МОСКВА ★ 1956

本書系根据苏联測繪出版社1956年于斯科出版的К.Л.普
罗沃洛夫 (К.Л.ПРОВОРОВ) “所著論連續三角网的精度”
(О ТОЧНОСТИ СПЛОШНЫХ СЕТЕЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ)
一書譯出。

本書研究了連續三角网在精度估計方面之主要問題，叙述
和分析了一部分作業成果，導出了估計連續三角网各元素的精
度的新公式，并对連續三角网的布設作出了一系列的結論。

作者沒有在本書中提出解決連續三角网的所有問題，尤其
是平差問題，單就這一問題而言足可寫成一部較大的著作。

本書系供科学工作人員、高等學校師生以及从事大地測量
工作的工程技術人員之用。

論連續三角网的精度

著者 К.Л.普 罗 沃 洛 夫

譯者 刘 振 英

出版者 測 繪 出 版 社

北京宣武門外永光寺西街3号

北京市書刊出版業營業許可証出字第081號

发行者 新 华 書 店

印刷者 五 三 六 工 厂

印数(京)1—1500册

开本31⁸×43¹/27

字数166,320

定价(10)1.10元

1958年5月北京第1版

1958年5月第1次印刷

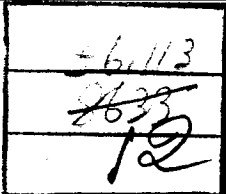
印張7³/₉

獻給導師和朋友

瓦西里·华西里耶維契·波波夫

目 录

原序	5
緒論	7
第一节 連續三角网角度觀測成果之精度	9
第二节 等边三角形連續网中确定边长及坐标 方位角之誤差	62
第三节 任意三角形連續三角网諸元素之精度估計	112
第四节 等边三角形連續三角网內确定对角綫諸 元素之誤差	120
第五节 研究連續三角网各項誤差之实验工作	134
第六节 图形形状对連續网諸元素精度之影响	146
第七节 三、四等三角点之測定精度	160
第八节 起算数据誤差影响之估計	180
結論	191
参考文献	197



原 序

近十年来在布設大規模連續三角网方面获得了广泛的进展。其所以能以大範圍及高速度进行这项工作，这是与严密的理論基础及高深的科学研究分不开的。傑出的苏联大地測量学者 Ф. Н. 克拉索夫斯基，А. С. 契巴塔廖夫，В. В. 波波夫，Н. А. 烏尔馬耶夫，А. А. 依佐托夫教授及卓越的苏联測量作业工程师 С. Г. 苏达考夫，Д. А. 拉林，И. Ю. 普兰尼斯-普兰涅維契以及其它等人的著作都是些重要的理論基础，即在此基础上，奠定了現代布設大地控制网的方法及其計算方法。

到目前为止，在布設三角网方面已积累了丰富的經驗，并依生产条件制定了技术方案，确定了各个作业过程之技术定額标准。但还有一系列的問題尚需今后进行科学研究及总结作业成果来解决。建立在現代科学水平上的外业及內业各个作业过程的改善、机械化、自动化以及技术研究，平差計算方法以及尽可能地不使連續三角网平差元素受到起算数据誤差影响等問題都是尚待解決的問題，最后，觀測值及平差值之精度估計問題是一个急待解決的問題。

本書主要系研究連續网諸元素的精度問題，为此曾利用各項作业成果，进行了不少的实验工作，并在理論上获得了必要的結論及估算。在推导及改进公式方面，作者力求使这些公式簡單化，使之在实际应用上既十分方便，又能保持必要的精度。因此在本書中刊出了許多使計算簡單化的专用图解及諾謨图。

如果計算公式不能經常用于二等网的設計及勘选（这些通常使用預先規定的几何限差），則在布設三、四等网时，欲使三角点获得必要的測定精度，工程师必須备有簡單方便的計算工具，

为此在本書中載有計算公式及最簡單的計算規則。

估計起算數據的誤差是一個十分困難的問題。本書將提出一個既簡單而又十分精確的方法，該法應用於三、四等三角點精度估計公式中。

作者希望本書中所討論過的一系列問題，有助於連續三角網布設方面的理論工作及實際工作。

作者謹向 А·И· 图里捏夫教授，特別是向白俄羅斯蘇維埃社會主義共和國科學院士 **В·В·波波夫** 教授給予的幫助及在工作上的許多寶貴指示致以謝意，并向科學技術碩士 А·В· 雷托夫、Л·П· 彼列金及 В·Н· 加尼申發表在書報評論上的寶貴建議致以謝意。

К.Л. 普罗沃洛夫教授

一九五六年於新西伯利亞

緒 論

在苏联領域內所完成的地形及大地測量的全部作业中，基本大地測量作业占着显著的地位。构成国家天文大地网的一等三角鎖以及布設在广大幅員上的連續三角网皆作为扩展大比例尺测图控制之大地基础，并对有关地球形状及大小的探討給予必須的科学研究資料。

由于苏联領域內轉入到大比例尺测图，由于国民經济各部門对大地測量作业日益增加的需要，以及由于有要借大地測量觀測資料来解决的一系列的科学問題，引起了应重新审訂布設国家三角系的現行方案及綱要的必要性。大地測量科学干部及作业干部的增长，以及用大量現代化高精度測量仪器装备起来的測量生产机构，保证了提高基本大地測量作业精度的必要条件。由于中央測繪科学研究所完成了許多科学研究工作的結果，并在利用測繪总局各分局布設一等三角鎖丰富的生产經驗这一基础上，于一九五四年出版了“苏联国家大地測量法式”〔1〕。

一等三角系为构成所有各等三角系的基础，它是由許多鎖段构成的三角鎖，这些鎖段并組成周长达 800 公里的閉合鎖环，而每一鎖段的长不超过 200 公里。一等三角鎖段由形状近似等边的三角形組成，或由三角形与完全四边形所組成，其边长由 20—25 公里。所有大地測量应按一定的方法并使用能保证成果获得最高精度的仪器来进行。按三角形閉合差計算的測角中誤差不应超过 $\pm 0''.7$ ，起算边边长相对誤差不应大于 $1:350\,000$ ，而按各个測回与其算术中数之差計算的鎖段兩端的天文測定中誤差，緯度不应超过 $\pm 0''.3$ ，經度不应超过 $\pm 0''.03$ ，而方位角則不应超过 $\pm 0''.5$ 。

在一等閉合环內布設二、三等連續网，而在最大比例尺测图

时則布設四等連續网或四等導綫。

二等三角网全面地布設于一等网鎖环面积上，該网由平均边长約13公里的三角形所构成。观测水平角时，按三角形閉合差計算的中誤差不能超过 $\pm 1''$ 。直接測定的或由基綫网計算的起算边之长，其相对誤差不应大于1:250 000。基綫网（或直接測定的边）应这样布設，以使該基綫网与相邻一等或二等基綫网間的二等三角形不多于14个，而二等基綫网与一等三角鎖最近边之間的二等三角形不多于9个。在每个鎖环中大約位于二等网中心的起算边两端点上測定天文緯度、經度及方位角，其精度与一等三角測量中之精度相同。

在一等及二等网的基础上，插入单个点或不大的点系来确定三等网的点，而四等网的点則以高等点为基础依类似的方法測定之。規定三等网各三角形之边长平均約为8公里，而四等网的平均边长約为1.5—6.0公里。根据三角形閉合差計算的角度中誤差，三等网不应超过 $\pm 1.5''$ ，四等网不应超过 $\pm 2.0''$ 。

各等网內三角形的形状应尽可能近似于等边三角形。二等网內三角形的角度通常不应小于 30° ，而三等及四等网內三角形的角度則不应小于 25° 。

如果連續网由边长为 S 的等边三角形所組成，那末可以将一个点控制的面积 p 視為內切圆半徑为 $\frac{1}{2}S$ 的正六角形的面积，此点即位于該正六角形的中心。設三角网布設的面积为 P ，并令布設在此面积上的二等及三等的点数为 n_1 及 n_2 。那末顧及到各毗連点，將有以下的近似关系：

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{4}{5} S^2; \\ n_1 &= \frac{5}{4} \cdot \frac{P}{S_1^2}; \quad n_2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{P}{S_2^2} - n_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

因之，当三角网的平均边长等于 13 公里时，在 30 000—40 000 平方公里的面积上，必须布设二等三角点 200—300 个，由这些点组成了 450—600 个三角形的网。用三角形平均边长为 8 公里的三等网补充同一锁环时，除二等点外，还应布设 350—500 个三等点，由这些点组成了 750—1000 个三角形的网。

建立如此庞大的三角网确系一复杂问题，这一问题要求有专门的科学理论根据，并应具有顾及整个综合作业而又经过深思远虑的施工程序。

对二等网应提出特别高的要求，其各个部分应尽可能具有同样强度以使该网在平差后能获得同一精度的成果。如果估计到二等网各点是布设在质火的面积上，而且所处的自然地理条件较三角形锁更是各种各样，同时也估计到网的各边在定向上的多样性，那末就可以肯定：测角的总误差，在数值上仍然不小于三角锁的测角总误差，但按其特性来说则接近于偶然量。后一情况非常重要，因为网的平差元素在颇大程度上将不受系统累积的影响，这些元素的中误差便将更严格地表明了它们的精度。

显然，要能获得高精度的成果，就意味着三角测量资料必须进行全面的整理，特别是三角测量的平差，应当以必要的精度和严密而循序地进行。同时，正如任何三角测量一样，连续网的平差元素精度决定于下列条件：构成网的各图形之形状，与起算数据连接的网系形状，起算点与起算边的布设及精度，以及测角精度。后一条件为极精确地获得这应于现代的技术要求的三角网各元素之最重要条件。

第一节 连续三角网角度观测成果之精度

(一)

布设三角系时，为了使测量有可靠的校核，为了提高精度，以及为了估计观测值及平差值的质量，除了观测必要的元素（角

度、基綫及方位角) 之外, 还应观测附加(多余的) 元素。这些附加观测将得出条件方程式中的閉合差, 这些閉合差是由于不可避免的观测誤差及起算数据誤差所致。

由于測角誤差通常是不知道的, 故这些角度的精度的判定可根据各种因素影响的研究或根据观测資料来进行, 更正确一点說, 根据重測时的不符值和条件方程式中的閉合差来进行。測站观测角与其平差值之差以及图形条件方程式的閉合差, 乃是該項研究最适宜的資料, 因为这两种誤差仅由观测角誤差所引起, 而与起算数据的誤差无关。应该指出, 极条件方程式之閉合差也具有这种特性, 但是根据极条件方程式之閉合差来討論角度观测的精度是十分复杂的, 而且由于沒有分門別类的資料, 往往又是不可能的。

表 1 載出了測站平差角的中誤差(这些誤差是根据測站上之差計算的), 以及按下列公式計算的上述角度(一般将此角度称为观测角) 之中誤差:

$$m'' = \pm \sqrt{\frac{[ww]}{3n}}, \quad (2)$$

式中 w 为三角形閉合差, n 为三角形数。

三角測量角度中誤差

表 1

三角測量的种类及等級	三角形(T), 鎖段(3), 或 三角点(n) 之 数 量	中 誤 差		
		測站上的 $\pm m'$	按三角形 閉 合 差 $\pm m''$	$\pm m_z$
位于卡扎赫斯坦的二等連續网·····	722 T	0.34	0.68	0.59
位于烏拉爾的二等連續网·····	276 T	0.25	0.65	0.60
位于东西北利亚的二等連續网·····	162 T	—	0.64	—
位于烏克蘭的二等連續网·····	796 T	0.30	0.55	0.46
苏联一等天文大地网, [2]·····	295 3	0.30	0.64	0.57
莫斯科一等城市网·····	65 II	0.52	0.77	0.57
列宁格列一等城市网·····	37 II	0.40	0.56	0.39
位于斯維德洛夫斯克的一等城市 网·····	25 II	0.59	0.86	0.62

由表 1 可以看出，根据三角形闭合差所计算的角度中误差比根据测站上不符值所计算的角度中误差平均要大一倍（就城市三角测量的这一类误差而言则大 0.5 倍）。这些误差的差异可以用下述原因来解释，即根据观测角或观测方向与其测站上平差值之差所计算的测站上角度误差，实质上是表示在一定观测条件下之**角度观测精度**。显然，每一角度误差的常数部分为全部因素平均影响之总和值（剩余值），即此常数部分在测站观测结果中不会出现，因而也不会影响到角度中误差值。故在测站上观测的及平差的角度中误差只是反映了每一测站上的观测条件。

诸三角形的闭合差完全反映了各个不同点上全部角度的误差，因而也是表示角度精度较正确的标志。

兹以 m_1'' 表示测站上观测条件变化时三角形角度的中误差，而以 m_2'' 表示仅在比较各个测站观测成果时出现的角度中误差，并将下列各项误差作为确定 m_1'' 值的因素：照准、读数、仪器之偶然误差，外部条件及其他误差。角度误差 m_2'' 则决定于归心元素测定的是否正确，旁折光的影响，仪器系统误差等。故总的测角中误差为

$$m''^2 = m_1''^2 + m_2''^2.$$

根据表 1 各数据所计算的一、二等之 m_2'' 值（载于表 1 最后一栏中），在 0.5—0".6 范围内，城市三角测量之 m_2'' 值在 0.4—0".6 范围内。而 m_1'' 之值则各为：0.2—0".3 及 0.4—0".6。

因而野外三角测量之 m_2'' 值大于 m_1'' 值一倍（不包括城市三角测量在内——校者注），故现今非常注意选择良好的观测条件及准确地测定归心元素等。在城市三角测量中，当边长较短而视线通过条件不佳时，这两种误差的比值是有些不同的，因而在此情况下，必须以同样的程度注意减少各种误差的影响。

但有一种情况会引起角度观测成果精度估计问题的某种不定性。如所周知，某测站点至其他各点方向间的角度（三角形的角度或全组合中的角度）或构成“方向组”的方向（即由该测站的

一个共同起点讀出的角度，起始方向通常为連續三角网方向之一），都可以是三角測量中直接測定的獨立值。图 1、2、3 为觀測元素略图。

直接觀測方向法，即所謂各个方向与輔助測标方向連測的方法（图 3），我們未予采用。所采用的水平閉合的全周方向觀測法，实际上也可得出直接觀測的各个獨立方向^①。

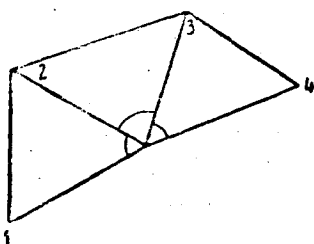


图1 三角形角度觀測略图

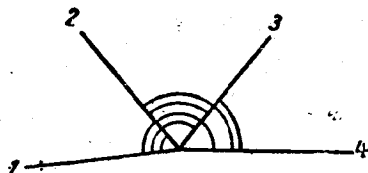


图2 全組合測角略图

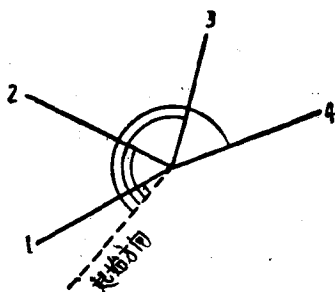


图3 方向觀測略图

連續三角网中之角度觀測应使其在所有各点上得出近似等精度的方向列。为此，可用全周方向觀測法直接觀測方向，或用全組合測角法觀測角度，但应在測站平差結果中求出方向。既然这些方向已进行了測站平差，故按这种方向进行三角測量平差的严密性必須加以确定。

① 关于使用現代角觀測法直接觀測的角度只可以說是假定的，因为角度是用两个讀数之差表示的，而其中每一个讀数即为与起算边所成的角度。