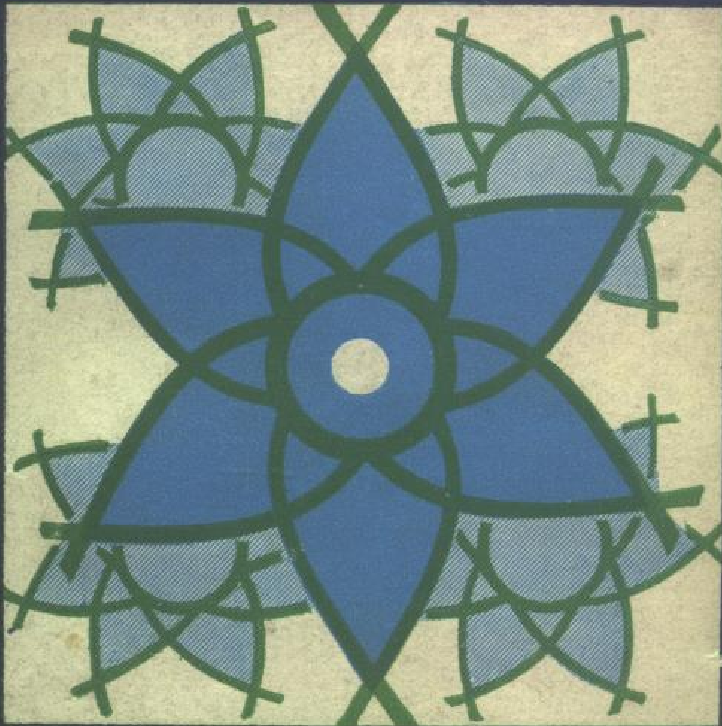
[澳] J. C. 耶格



弹性 断裂和流变

地质出版社

弹性、断裂和流变

〔澳〕J.C.耶格　著

段星北　译

王扣生　胡海涛　校

地质出版社

内 容 提 要

本书系讲述弹性、断裂和流变及其在工程上和地质上的应用的专著。全书共分五章：第一章应力和应变，第二章材料的性质，第三章运动方程和平衡方程，第四章应用，第五章构造地质学上的应用。可供地质、地震、工程技术及有关的科技人员、研究生及大专院校师生阅读。

J. C. Jaeger
Elasticity, Fracture and Flow
With Engineering and Geological Applications
third edition, 1969. Methuen & Co. LTD London

弹性、断裂和流变

〔澳〕J. C.耶格 著
段星北 译
王扣生 胡海涛 校

*

地质部书刊编辑室编辑
责任编辑：李鄂荣
地 质 出 版 社 出 版
（北京西四）
地质出版社印刷厂印刷
（北京海淀区学院路29号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：850×1168 1/32 印张：9 字数：239,400
1982年4月北京第一版·1982年4月北京第一次印刷
印数1—4,106 册·定价1.60元
统一书号：15038·新780

译 者 的 话

本书是一本在国内外非常流行，广泛使用的专著。1956年发行第一版，1962年第二版，1964年修订再版，1969年第三版。国内曾影印过62年第二版及64年修订再版本。其中尤以第三版概括了60至70年代有关弹性力学、断裂力学及流变学在工程和地质方面所取得的成就，内容十分丰富新颖。70年代后期有关岩石力学、断裂力学已另立专著，本书也未再有新版问世。但由于本书具有许多优点，所以国际上流行的书刊上仍大量引用本书作为基本文献。鉴于这些缘故，本书事实上具有手册的作用，我们将它译出来，使它能在四化向科技进军途中发挥其作用。

本书最大的优点为将弹性力学、断裂力学、流变学等重大科目以极其浅出的方式叙述清楚，而且应用已描述的基本原理逐渐引导至该学科中的重大问题，浅显易懂，脉络清楚。很有启发性，确是一本难得的好书。

段墨北

一九八一年九月

前　言

在这本专著里，我试图将弹性、塑性、粘性和流变的基本数学理论和有关材料性质的讨论，以及理想化材料性质以构成数学理论基础的方式，尽可能都用基本形式来陈述。关于这些问题，已有许多数学教科书，但是，这些教科书主要讲的是特殊问题的求解方法；所以，本书既可以作为这些著作的序论，也是打算供那些对于应力和应变的详细分析，他们所使用的材料的某些性质、流变和断裂的判据等等比较有兴趣的工程师和地质学家等广大读者阅读的；他们对理论的兴趣不在特殊问题的研究上而在所涉及的假定以及假定对解的影响的方式。

第一章，比较全面地讲述了应力和应变的分析，特别是说明了三维的应力和有限均匀应变的莫尔表示法。第二章，描述了材料的性质，弹性（各向同性和简单的各向异性两种物质）、粘性、塑性和某些比较简单的流变模式的应力—应变关系。对断裂判据和屈服判据，其中包括莫尔判据、特雷斯卡判据和冯·米泽斯判据，从某些应用上进行了详细讨论。第三章导出了运动方程和平衡方程，并且解出了若干特殊问题，这些问题的选取，部分出于实践上的重要性，部分是为了说明所讨论的各类材料间性质上的差异。

这本书的第二版已新增加一章，以概括构造地质学和迅速发展的岩石力学上工程问题的数学和实验基础。在这一章里，大大扩充了对各种断裂判据的讨论，并且推广到多孔介质。对地壳中的应力、断层以及有关问题也作了比较全面的论述。而且，由于在岩石学上以及应力测量上的重要性，解出了关于地下巷道四周应力和位移的若干问题，并且简要介绍了处理这类问题的复变数方法。

在这第三版里，根据现代的进展，已在第四章中对岩石力学

的论述进行了扩充。但主要增加的内容编在新加的第五章内。在这一章里讨论了构造地质学的基本问题，但其所应用的数学理论大多已在前几章里讲过了。因此主要讲述有限均匀应变理论、褶皱基本理论以及形变介质中质点的取向等。这一章是与威特沃特斯兰大学N·盖伊博士合作写的；他提供了地质知识，我只是将这些知识编成与本书前几章所讲的理论相一致的内容。

坎培那　　　　　　　　　　　　　　J. C. 耶格

1969.1.

目　录

第五章　构造地质学上的应用

第一章　应力和应变

§1 引　言

弹性、粘性和塑性的数学理论的建立过程都是相同的。首先，阐述应力和应变概念，其次，假定应力和应变间或它们的导数间的应力—应变关系以理想化真实材料的性质；最后，应用应力—应变关系建立运动方程和平衡方程；当物体受到给定的力时，就能计算其应力状态或应变状态。

在本章里将详细讲述应力和应变的分析。应力分析实质上是静力学的一个分科，详细描述了物体的一点上应力变化的方式。对两维问题，这种分析仅用到初等三角学；但两维理论不仅对一般性状给予有用的了解，而且适用于许多重要问题；因此，这将在§3里详细讲述。在§4里讲三维理论，并且逐步引导至§5里的莫尔表示法；这个方法对任一平面上的应力提供一种简单的几何结构。

应变分析实质上是几何学的一个分科，它论述一质点集合体的形变。对于弹性理论的发展来说，只有微应变情况是所需要的，所以在§§10、11里将给出微形变的习惯处理。应变理论形式上和应力理论非常相似；因此，对应变的两维和三维情况也像以往一样单独分述出来。

因为微应变理论中所包含的假定是非常局限的，所以使在应变时所产生的几何变化的许多重要情节不清楚；而且像在地质学上当出现一些大的应变时也需要关于有限应变的知识。为此，在§7中将用解析几何方法讲述两维有限均匀应变理论；并且在§9中用莫尔法表示三维有限均匀应变。

§ 2 应力·定义和符号

为了说明作用在物体内的一些力现叙述如下：在我们有兴趣的O点上选一确定的方向OP，经过O点取一垂直于OP面积为δA的微平面，图1 (a)。OP叫做δA面的法线，δA面在OP方向的

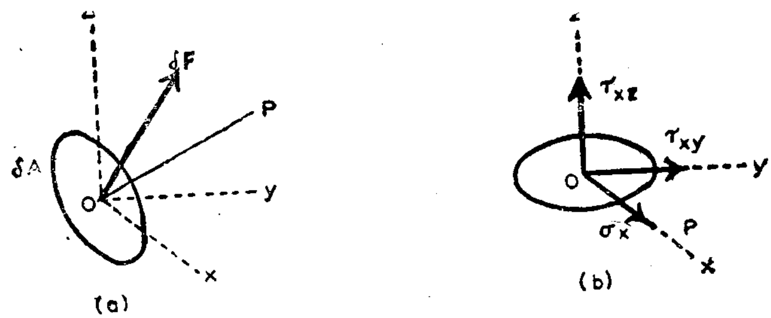


图 1

一侧称为‘正侧’，相反方向的一侧称为‘负侧’。

在δA面的每一点上，一侧上的物质作用一定的力于另一侧的物质上，所以，若通过δA面切开来，并且将这些力各加在切面上，则整个固体内的状态不变。δA面正侧物质作用于负侧物质上所有力的合力为力δF（严格说来，还存在一力偶，但因为面积δA已假定为无穷小，所以此力偶可以忽略）。

当δA趋于零时，此值$\delta F/\delta A$的极限称为在O点法线沿OP方向的平面上的应力。因此，记它为$\boldsymbol{p}_{OP}$：

$$\boldsymbol{p}_{OP}=\lim_{\delta A\to 0}\frac{\delta F}{\delta A} \tag{1}$$

$\boldsymbol{p}_{OP}$为一向量，它的量值的量纲为单位面积的力。所以，情况就成了这样：对于物体内任一O点和通过它的每一方向都有一向量$\boldsymbol{p}_{OP}$，使得若我们通过O点取一面积为δA的微平面，且使它垂直于OP，则面的正侧物质作用一力$\boldsymbol{p}_{OP}\delta A$于负侧物质上；作用力和反作用力大小相等而方向相反，所以负侧物质作用一力一

$\boldsymbol{p}_{OP}\delta A$于正侧物质上。

通常在建立一个问题的数学理论时，总是从选定 坐 标 系开始。所以，我们在O点取相互垂直的右旋轴系Ox，Oy，Oz。现在，假定Op取Ox方向，如图1(b)所示，则面积δA位于yz平面内。向量$\boldsymbol{p}_{Ox}$可以分解为沿Ox、Oy、Oz的三个分量：

$$\sigma_x,\ \tau_{xy},\ \tau_{xz} \tag{2}$$

分量σ_x，沿Ox方向且垂直于面积δA，称为 正应力分量或法应力分量；而分量τ_{xy}•τ_{xz}位于面积为δA的平面内称为 横应力或 剪 切应力。正应力总是用符号σ，剪切应力用τ：后一符 号 的 第一个脚码表示微面积δA的法线方向，第二个脚码表示应力分 量 作用的方向；至于正应力则只用一个脚码，因为此分量的方向与面的法线方向相同。若面上应力的法线分量为正，则称它 为 张 应 力（它趋向于将面的正侧物质从负侧上拉开）；反之，若它为负，则称为压应力。

由同样方法，在O点法线沿Oy方向的平面上的应力将 具 有分量：

$$\tau_{yx},\ \sigma_y,\ \tau_{yz} \tag{3}$$

以及法线沿Oz方向的平面上的应力将具有分量：

$$\tau_{zx},\ \tau_{zy},\ \sigma_z \tag{4}$$

（2）至（4）的9个分量，可以整理成下式：

$$\left.\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{matrix}\right\} \tag{5}$$

称为在O点的分应力或应力分量。

在§§3，4里将证明通过O点的任一平面上的应力可以藉这些应力分量来表达。所以，它们给一点上的应力以完全的说明（事实上，看来还应有$\tau_{yz}=\tau_{zy}$，$\tau_{zx}=\tau_{xz}$，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$；所以，说明一点的应力只需6个量了）。

对于物体内应力的完全说明，则必须要知道物体内每一点上的各分应力。

遗憾的是，在弹性理论上使用了好几种符号。上面一种为欧洲大陆和美洲的作者所共用。英语系统最普遍的符号是用X_x，Y_x，Z_x代替向量OP_{Ox}的分量（2），等等。对于这些量其它普遍采用的符号为p_{xx}、p_{xy}、p_{xz}和$\widehat{xx}$、$\widehat{xy}$、$\widehat{xz}$等等；此处，后一组是由前一组的脚码之上加一特殊记号组成的。

（5）中的应力分量，实际上是所谓张量的矩阵分量；张量分析在理论向高级部分发展上有很多用途。但从现在的观点看来，主要的改变仅为坐标符号x、y、z被代以x_1、x_2、x_3；所以用数字1、2、3就将它们说明了。于是，法线沿Ox方向的平面上的应力分量，可写为p_{11}、p_{12}、p_{13}，这样一来就描述了应力张量，并且分析上使用为p_{rs}，此处的r和s从1至3取值后就给出了各个分量。

§3 两 维 应 力

弹性理论的很多困难是因涉及颇为复杂的立体几何学所引起的。但从研究相应的两维问题，常常能够比较简单地对基本概念得到清楚的理解。按此，我们首先叙述两维应力理论；在图2中，取Ox、Oy位于纸面内，Oz垂直于纸面，并且假定所有的量与z无关，所以这就根本无需考虑了❶。

此外，如图2（a），在O点、在$x=0$平面上由其右侧物质作用于它左侧物质上每单位面积的力应有分量σ_x，τ_{xy}。同样，如图2（b），在O点上，在$y=0$平面上每单位面积上的力应有分量τ_{yx}，σ_y。

其次，我们必须考虑这些分量之间的关系。为此，我们假定固体处于静止中，并且由一点到另一点，所有的量的变化都很缓慢，因而在距O点一小段距离a的一点上的应力分量非常接近于O点上的应力分量（事实上，它们之间相差量级为a的量，但a

❶ 此剖面的理论适合于三维的几处重要位置，这些将在§14中讨论。

已假设很微小）。

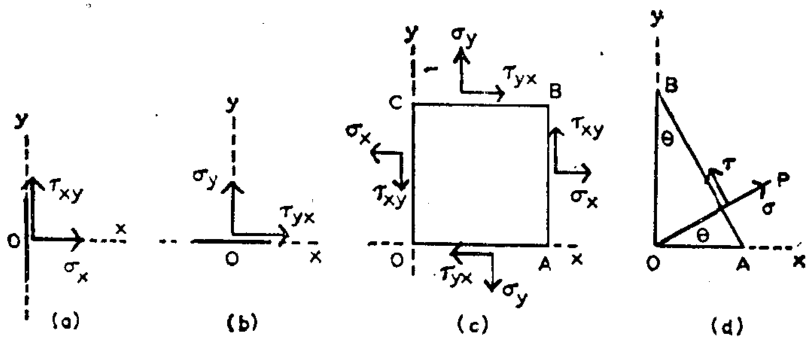


图 2

现在考虑边长为$OA=OC=a$的微小方形材料$OABCO$上的力。如图2（c）所示，面AB（垂直于纸面的单位长度）上的力为$a\sigma x$和$a\tau_{xy}$。面CO上的力，为左侧物质对右侧物质所作用的力，所以为$-a\sigma x$，$-a\tau_{xy}$，等等。考虑整个方块处于平衡状态，似乎力也是平衡的；但是有一使方块向左转动的力偶

$$a^2\ (\tau_{xy}-\tau_{yx})$$

存在。因为系统处于平衡状态中，则此力偶必为零，所以我们必然有：

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}。\qquad (1)$$

于是，我们开始有的4个应力分量，只有3个是独立的。记住τ_{xy}和τ_{yx}是相等的，它们以不同方式出现时，这就给与选用上的方便。

其次，我们表示，通过O点，法线OP与x轴斜交成θ角的平面上的应力能够藉σ_x，σ_y，τ_{xy}来表达。为此，我们计算通过O点附近的平面AB上的正应力σ和切应力τ；这些应力将与通过O点与AB平面平行的平面上的应力相差很小。如图2(d)中箭头所示，当τ指向OP之左时则计为正。考虑三角形OAB（确切地说是以此为底的单位高棱柱）的平衡条件，将力沿OP方向分解，令AB的长度为a，记住，要求出任一面上的力必须将应力乘以此面的面积，这样，我们就得到：

$$a\sigma = a\sin\theta(\tau_{yx}\cos\theta + \sigma_y\sin\theta) +$$
$$+ a\cos\theta(\sigma_x\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta), \qquad (2)$$

沿AB方向分解后，得：

$$a\tau = a\sin\theta(-\tau_{yx}\sin\theta + \sigma_y\cos\theta) +$$
$$+ a\cos\theta(-\sigma_x\sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta)。 \qquad (3)$$

记住$\tau_{xy} = \tau_{yx}$时，于是（2）和（3）成为：

$$\sigma = \sigma_x\cos^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta + \sigma_y\sin^2\theta, \qquad (4)$$

$$\tau = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)。 \qquad (5)$$

以上计算是对θ为锐角进行的，但用类似的方法，容易证明，在以上提到关于τ指向外法线左侧方向其量度为正的规定下，对一切θ值都是成立的。

（4）和（5）可用以求得关于Ox和Oy轴经过旋转θ角至Ox'和Oy'轴后的应力分量σ_x'，σ_y'，$\tau_{x'y'}$。但$\tau_{x'y'}$仍由（5）式给出。将角θ和$\frac{1}{2}\pi + \theta$分别代入（4）后，得出：

$$\sigma_{x'} = \sigma_x\cos^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta + \sigma_y\sin^2\theta \qquad (6)$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x\sin^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta + \sigma_y\cos^2\theta。 \qquad (7)$$

（6）和（7）两式相加后，得：

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y, \qquad (8)$$

即是，若将轴转动，则量$\sigma_x + \sigma_y$仍然不变，或为一不变量；虽然σ_x和σ_y两者都变了。此种不变量在理论发展上是很重要的。

方程（4）和（5）对一点上应力随方向变化的方式作了完全的描述：现在我们详细讨论这种性质，并且由此得出某些简单的几何表示法。微分（4）得：

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2(\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta + 2\tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad (9)$$

$$= 2\tau, \qquad (10)$$

从（9）式得出，当θ为

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (11)$$

时，正应力为极大或极小[同样从（5）得到切应力为零]。

方程(11)阐明了两个互成直角的方向，使在一点上沿此等方向的正应力为极大和极小，而沿着它们的切应力为零。这些称为主应力轴，沿着它们的应力称为主应力。符号σ_1和σ_2常用来表示主应力，并假定σ_1为最大的主应力（代数上），而且照例将张应力计为正。若一点上应力状态为已知时，(11)式的用途是能够利用它直接求得主轴方向和主应力值。当这些为已知时，取主轴为参考轴可能更简单方便：因此，若我们取它们为新的x轴和y轴，则在（4）和（5）中将有$\sigma_x=\sigma_1$，$\sigma_y=\sigma_2$，$\tau_{xy}=0$，则法线与x轴斜交成θ角的平面上的正应力和切应力将成为：

$$\sigma=\sigma_1\cos^2\theta+\sigma_2\sin^2\theta \tag{12}$$

$$=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)+\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\cos^2\theta, \tag{13}$$

$$\tau=-\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\sin^2\theta。 \tag{14}$$

σ和τ随θ的变化形式表现在图3上，当θ为45°或135°时，似乎τ有其最大值$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)$。

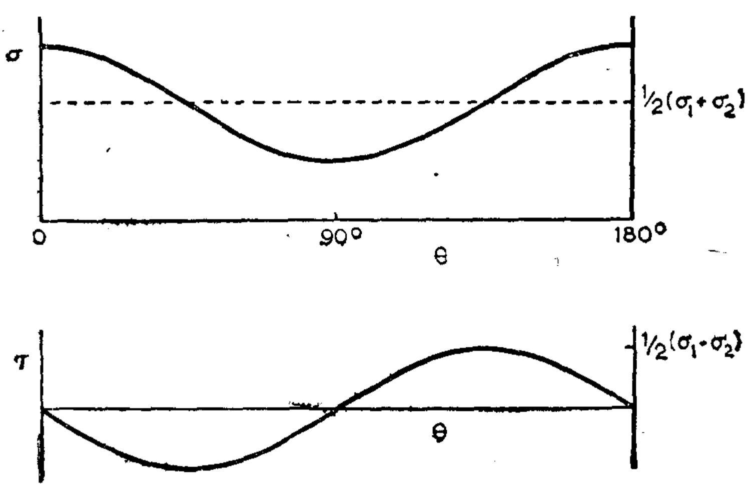


图 3

理论上很重要的另一种表示法为：从原点沿在与法线成θ角

方向的直线上，取一点P，它距原点的距离r为：

$$r = k\sigma^{-\frac{1}{2}}, \qquad \text{所以} \qquad \sigma = k^2/r^2。 \tag{15}$$

式中σ为平面上的正应力，k为一常数。将（15）式代入（12）式中，得出：

$$\sigma_1 r^2 \cos^2\theta + \sigma_2 r^2 \sin^2\theta = k^2,$$

因为$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$为点P的坐标，所以此点在一二次曲线上：

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 = k^2。 \tag{16}$$

此曲线称为应力二次式，若σ_1和σ_2的符号相同，则它为一椭圆；若它们的符号相反，则为一双曲线。若以同样方法讨论(4)式，旋转一由(11)式确定的角度后，则将求得同样的二次曲线，并且能够从它求得主轴和主应力；事实上，这是一种常用的手段，也能在三维问题中使用，参看§4。若σ为负数，则必须在(15)式中以$|\sigma|$来代替以获得实数的表示式。

同样，在（14）中利用$\tau = k^2/r^2$，也能够以双曲线：

$$(\sigma_2 - \sigma_1)xy = k^2 \tag{17}$$

上的点表示切应力。

此外，还有另外的表示法，即莫尔圆图，它是所有表示法中最简单最有用的方法。

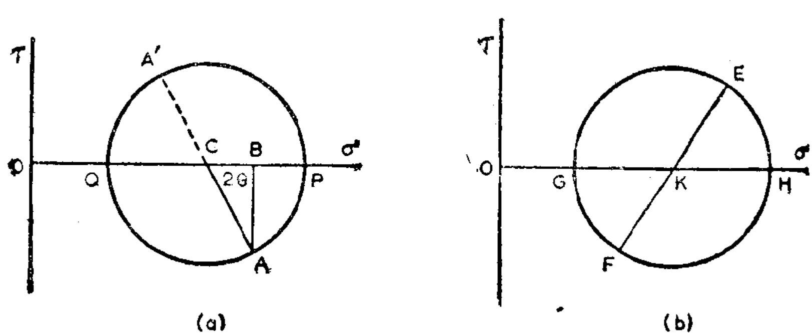


图 4

如图4（a），假定在一直线上截取线段$OP = \sigma_1$，$OQ = \sigma_2$，以PQ为直径，C为圆心画圆。在圆上取一点A，使顺时针量度