数学模型

杨启帆 边馥萍 编

浙江大学出版社

数 学 模 型

杨启帆　边馥萍　编

浙江大学出版社

内 容 简 介

建立数学模型是利用数学知识解决各类[illegible]题关键的第一步，是近十年来随着计算机的广泛应用而发展起来的新学科。

本书共分十一章，内容涉及到物理、生物学、医学、经济管理、军事与体育运动等众多领域。书中所选模型具有代表性，并体现了一般的构模方法。模型的按排由易到难，由简单到复杂，全书较完整地体现了数学方法的基本运用。阅读本书可启迪想象力，增长数学推理和解决实际问题的能力。

本书可作为应用数学系“数学模型”课教材，非数学专业研究生、本科生选修课教材，同时也可供高等院校师生及各类科技工作者参考。

数 学 模 型

杨启帆　边馥萍　编

责任编辑　贾吉柱

* * *

浙江大学出版社出版

上虞科技外文印刷厂排版

萧山东湘印刷厂印刷

浙江新华书店发行

* * *

787×1092　32开本　11印张　275.9千字

1990年5月第1版　1991年6月第2次印刷

印数 3001－5000

ISBN 7-308-00522-4

O·077　定价：4.40元

前　言

要解决各类实际问题，建立数学模型是十分关键的第一步，同时也是较为困难的一步。建立数学模型的过程，是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程。要做到这一点，既需要丰富的想象力，也需要寻找较为合适的数学工具，可以这样讲，它是能力与知识的综合运用。某些应用数学工作者、科技人员，特别是高等院校的在校学生，他们虽然具有良好的数学基础，但面对实际问题却常常感到不知从何着手，无法构造出描述问题特征的模型。本书注重想象能力的培养，从增强因果关系分析能力的基点出发，通过较为丰富而又典型的实例研究，介绍了建立数学模型的一些基本技能，並说明如何分析、评价和改进模型。

本书第一章简要介绍了数学模型的一些基本概念，想象力与建模的关系，建模的主要步骤及模型的分类等问题。其余各章大体可以分为两个部分。第二章至第九章是根据建立模型所运用的数学方法来划分的，每一章都围绕着如何应用某一方面的数学知识而编写的，属于基本方法的训练。第十章和第十一章分别讨论了两个较为典型的问题，以不同的思维方法、应用不同的数学工具，讨论了同一问题的几个不同的数学模型，属于方法的灵活应用。每章后面都附有一定数量的习题，以帮助读者进一步理解内容。书末的附录是为那些不熟悉变分法的读者提供的简要参考材料。对书中某些模型特别有兴趣的读者，可以查阅书后的参考文献目录，以便获得更为详尽的资料。

自1983年清华大学萧树铁教授倡导“数学模型”应作为应用数学系学生必须掌握的基本技能课以来，浙江大学、天津大学两校在应用数学系开设了数学模型课。编者在五年多时间内多次讲授此课，经过反复教学实践、不断修改讲义，积累了较为丰富的教学资料，并参考了国内外大量文献，编写成此书。

数学模型目前还是一门新课，国内外尚缺乏较为定型的教材。加上作者水平有限，书中定有不少错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者　　1989年

目　录

第一章　数学模型概述

随着电子计算机的出现和不断完善，数学的应用已不再局限于物理领域，而逐步深入到经济、生态、人口、社会等更为复杂的非物理问题。现在，许多以定性方法为基础的学科正在逐步走上定量化的道路，众多边缘学科应运而生。这就使数学在经济管理、发展生产以及在各自然科学学科中的重要性为越来越多的人所认识。

利用数学方法解决实际问题时，首先要进行的工作是建立数学模型。而对实际问题的理论分析和科学研究则是在此模型的基础上进行的。如果建立的模型本身与实际问题相差甚远，则在理论分析中无论采用怎样巧妙的数学处理，所得到的结果也未必有用。因此建立一个较好的数学模型乃是解决实际问题的关键之一。

§1　模型与数学模型

模型是我们所研究的客观事物有关属性的模拟，它应当具有事物中使我们感兴趣的主要性质。陈列在展览厅橱窗里的模型飞机应当具有飞机的形态，至于它是否真正会飞也许并不是我们感兴趣的性质。但参加航模比赛的模型飞机则不然，如果它不会飞或飞行性能不佳，即使它再象真正的飞机，也不能算是一个好的模型，必须废弃或加以修改。模拟不一定是对实体的一种仿造，也可以是对某些基本属性的抽象。例如，一张地质图就

是某地区地貌情况的一种模拟，图上可以不标明该地区的公路和铁路，但必须较好地反映出该地区的地质结构。然而，如果这是一张交通图，那么遗漏任何一条主要公路或铁路都将是一个不可原谅的严重缺陷，因为使用这样的交通图会使人导出错误的结果。

那么，什么是数学模型呢？按照E.A.Bender的提法，数学模型乃是“关于部分现实世界为一定目的而作的抽象、简化的数学结构”。由于各人的讲法不一，不必过于追求严格的定义。总之，数学模型是一种抽象的模拟，它用数学符号、数学式子、程序、图形等刻划客观事物的本质属性与内在联系，是现实世界的简化而又本质的描述。它或者能解释事物的各种性态、预测它将来的性态，或者能为控制这一事物的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略。

本课程主要讨论数学模型的建立，在不致混淆时，我们将把数学模型简称为模型。

§2 一个实例

众所周知，万有引力定律的发现是牛顿在力学上的重要贡献之一，正是为了建立这一定律，他发明了微积分方法。为了了解建模的一般步骤，让我们来观察一下牛顿是怎样得出万有引力定律的。

十五世纪中叶，哥白尼提出了震惊世界的日心学说，这是科学上的一大革命。当然，由于历史和科学水平的限制，他的学说免不了也包含了一些缺陷。此后，丹麦天文学家第谷化了二十年时间观察当时已发现的五大行星的运动，记录下了十分丰富而又精确的资料。第谷的学生开卜勒在对这些资料进行了九年

时间的分析计算后发现，老师的观察结果与哥白尼学说在运行周期上有$\left(\frac{1}{8}\right)^{\circ}$的误差，这使他对哥白尼的圆形轨道假设产生了怀疑，他以观察结果为依据，提出了天文学上至今仍然十分著名的三条假设（Kepler 三定律），这就是：

（1）行星轨道是一个椭圆，太阳位于此椭圆的一个焦点上。

（2）行星在单位时间内扫过的面积不变。

（3）行星运行周期的平方正比于椭圆长轴的三次方，比例系数不随行星而改变。

牛顿认为，行星运动所以具有上述特征，必定是某条力学规律的反映，他决心找出这条规律来。此外，依据（1）（2）可以看出，行星速度是变化的，这在当时是无法计算的。为了表示这个变化的速度，牛顿研究了微积分。下面我们来看看，根据开卜勒三定律和牛顿第二定律，怎样用微积分方法推导出万有引力定律。

取极坐标系及变动的直角坐标系如图 1-1 所示。由（2），行

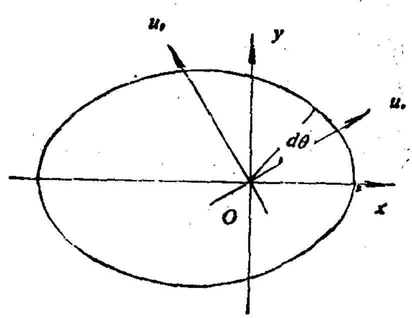

图 1-1

星在单位时间内扫过的面积为：

$$A=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

进而引入单位向量

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_r=\cos\theta\,\boldsymbol{i}+\sin\theta\,\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{u}_\theta=-\sin\theta\,\boldsymbol{i}+\cos\theta\,\boldsymbol{j}\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{r}$ 又可表示为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{u}_r=r\cos\theta\,\boldsymbol{i}+r\sin\theta\,\boldsymbol{j} \tag{1}$$

利用
$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{u}}_r=\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta\\ \dot{\boldsymbol{u}}_\theta=-\dot{\theta}\boldsymbol{u}_r\end{cases}$$

可得出：
$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\boldsymbol{u}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r \tag{2}$$

(2) 中 $\boldsymbol{u}_\theta$ 方向的分量为零，这说明 $\ddot{\boldsymbol{r}}\parallel\dot{\boldsymbol{r}}$。

现将椭圆方程改写成

$$\begin{cases}r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}\\[2ex] p=a(1-e^2),\ b^2=a^2(1-e^2)\end{cases} \tag{3}$$

其中 a、b 为椭圆的两个半轴，e 为离心率。

对 (3) 中的 r 关于 t 求导两次：

$$\dot{r}=\frac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\dot{\theta}=\left(\frac{p}{1+e\cos\theta}\right)^2\dot{\theta}\frac{e}{p}\sin\theta$$

$$=\frac{2Ae}{p}\sin\theta$$

$$\ddot{r}=\frac{2Ae}{p}\dot{\theta}\cos\theta=2A\dot{e}\left(\frac{1+e\cos\theta}{b}\right)-\frac{2A\dot{e}}{p}$$

$$= \frac{2A\dot{\theta}}{pr}(p-r)$$

注意到 $\dot{\theta} = \frac{2A}{r^2}$，故

$$\ddot{r} = \frac{(2A)^2(p-r)}{pr^3} \tag{4}$$

根据（4）可计算得：

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{(2A)^2(p-r)}{pr^3} - r\frac{(2A)^2}{r^4} = -\frac{(2A)^2}{pr^2} \tag{5}$$

将（5）代入（2），并根据牛顿第二定律立即可知，作用力与 r^2 成反比。进而可以证明，比例系数 $(2A)^2/p$ 是一个绝对常数，即与哪一颗行星无关。事实上，记行星运行周期为 T，则 $TA = ab\pi$。由（3），$T^2 = Ka^3$，K 为绝对常数，故：

$$\frac{A^2}{p} = \frac{(ab\pi)^2}{T^2 p} = \frac{(ab\pi)^2}{Ka^3 p} = \frac{\pi^2}{K}$$

此即需证。根据以上分析可知，作用于任一行星上的力，方向在太阳与行星的连线上，指向太阳；其大小与两者之间距离的平方成反比，比例系数 $(2A)^2/p$ 是一个绝对常数，这就是万有引力定律。

§3　建模的一般步骤

现实世界中的事物是形形色色的，我们不可能用一个统一的格式来说明怎样建模。现结合§2中的实例，大致归纳一下建立数学模型的一般步骤。

建立数学模型一般要经历以下几步：

（1）了解问题的实际背景，明确建模的目的，掌握必要的数

据资料(建模准备)。为了做好这一步工作，有时要求建模者作一番深入细致的调查研究，有时则可向有关方面的专家能人请教,以便掌握较为可靠的第一手资料。

(2) 在明确建模目的,掌握必要资料的基础上,抓住主要矛盾,对问题作必要的简化,提出几条恰当的假设。

如果没有第谷二十年积累起来的资料，就不可能有开卜勒的假设,而没有科学的假设,人们对现实世界的感性认识就不可能上升到理性的阶段。在提出假设时,如果考虑的因素过多,过于繁复,会使模型过于复杂而无法求解,考虑的因素过少、过于简单，又会使模型过于粗糙得不出多少有用的结果而归于失败。此时,应当修改假设重新建模,一个较理想的模型往往需要经过反复多次地修改才能得到。

(3) 在所作假设的基础上，利用适当的数学工具刻划各变量之间的关系，建立相应的数学结构——即建立数学模型。

在建模时究竟采用什么数学工具要根据问题的特征、建模的目的要求及建模人的数学特长而定。可以这样讲，数学的任一分支在建立各种模型时都可能用到，而同一实际问题也可以用不同的数学方法建立起不同的模型。一般地讲，在能够达到预期目的的前提下,所用的数学工具越简单越好。

(4) 模型的分析和检验。建立数学模型是为了解释自然现象和改造自然，因而建模本身并不是我们的最终目的。还应当考虑对模型求解(包括解方程、图解、逻辑推理、定理证明、稳定性讨论等等),将所得结果与实际情况作比较，以验证模型的正确性。

通常,一个较成功的模型不仅应当能解释已知现象,还应当能预言一些未知的现象,并能被实践所证明。例如牛顿创立的万有引力定律就经受了对哈雷慧星的研究、海王星的发现等大量

事实的考验，才被证明是完全正确的。

如果检验结果与事实不符或部分不符，就应当象前面所讲的那样，修改假设，重新建模。综合起来讲，建模的一般过程可以概括为如图 1-2 所示过程。

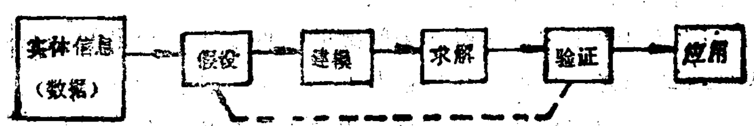

图 1-2

§4 观察力和想象力的培养

应当特别指出的是，要学会建模除了要学会灵活应用数学知识以外，还应当注重培养自己的观察力和想象力。著名科学家爱因斯坦曾说过："想象力比知识更重要，因为知识是有限的，而想象力概括着世界上的一切，推动着进步，并且是知识的源泉"。

为了说明在解决实际问题时充分发挥想象力的重要性，下面给出几个十分简单的例子。这些例子都具有一个共同特点，只要把它们想象成另一个问题，答案就可以随手而得。

例 1 某人平时下班总是乘坐下午 5:30 的火车回去，他的妻子准时在车站接他。有一天此人乘 5:00 的火车回去，提前半小时下车然后步行回家。路上，他遇到了开车来接他的妻子，因此比平时早 10 分钟到家。问此人一共步行了多少时间？

粗粗一看，也许有人会以为问题的条件不够而无法求解，其实不然，只要设想成他妻子继续开往车站然后回家，那么他们就会在和平时一样的时间到家了。这说明提前 10 分钟是未去车

站省下的，故相遇时应为 5:55，此人已步行了 25 分钟。

例 2 一个男孩与一个女孩带着一条狗出去散步。他们同时出发，但速度不同，男孩速度为 3 公里/小时，女孩为 2 公里/小时，狗为 5 公里/小时。狗一直在男孩与女孩之间来回不停地往返奔跑，问一小时后狗在何处？

受习惯的影响，初看起来问题的条件似乎是充足的。然而事实并非如此，狗可能在男孩与女孩之间的任何一处。

考虑下面的逆问题：女孩与男孩分别在离家 2 公里与 3 公里处以原速度散步回家，而狗在两者之间来回奔跑，根据两边夹原则，不论狗的初始位置如何，也不管狗是怎样跑法的，它都将与主人同时到家。

例 3 某人第一天上午 8:00 由 A 处出发，于下午 6:00 到达 B 处。第二天上午 8:00 他又由 B 处出发按原路返回，并于下午 6:00 回到 A 处。证明：途中至少存在一点，此人在两天中同一时间到达该处。

将问题设想成甲乙两人在同一天分别从 A、B 两地相向而行，两人必在途中某处相遇，则结论的正确性就十分显然了（显然，条件还可大大减弱）。上述设想还为严格证明提供了线索，请读者自行完成之。

§5 模型的分类

应当首先指出的是，模型的分类在课程中并不存在什么特殊的意义。仅仅出于教学上的方便，我们才将全书作了相应的分类。

关于模型的分类，基于不同的出发点可以有各种不同的分法。

根据人们对问题的认识程度分类，一般可以分成白箱模型、灰箱模型与黑箱模型。白箱模型通常是指一些机理已较为清楚的问题，对它们的进一步研究往往要用到十分专门化的知识.本课程基本上不接触到这类问题。黑箱模型主要指生态、医学、心理、社会等机理十分不清楚的问题。由于人们在这些领域中的认识十分模糊不清，内在关系又过于复杂，目前几乎还不可能得出多少定量的结果，因此本课程也较少接触到这类问题，我们感兴趣的主要是介于两者之间的所谓灰箱模型。当然，白灰黑并没有明确的界限，况且随着科学技术的不断发展，今天的黑箱模型明天也许成了灰箱模型，而今天的灰箱模型明天又可能成了白箱模型，因此这种分类也不必过于认真。

根据问题中变量的特征分类，模型又可分为确定性模型与随机模型。根据变量取值情况又可分连续型模型与离散型模型。此外，还有线性模型与非线性模型，静态模型与动态模型等等分法。

根据所用的数学方法分类，模型又可分为初等模型、微分方程模型、优化模型、控制论模型……等。根据研究对象所属的实际范畴分类，又可分为人口模型、交通流模型、经济模型、生态模型……等，以便综合使用各种数学工具，从各个不同侧面去揭示某一实质问题的本质属性。