集合论导引

晏成书 著

现代逻辑丛书

JIHE
LUN
DAOYIN

（京）新登字030号

责任编辑：李　辑
责任校对：吴　华
封面设计：谭国民
版式设计：王丹丹

集 合 论 导 引

jihelun daoin

出版发行　中国社会科学出版社
（北京鼓楼西大街甲158号）
编码 100720 电话 441531
经　　销　新华书店
印　　刷　　民族印刷厂

850×1168毫米　32开本　5.625印张　2插页　140千字
1994年 1月第1版　1994年 1月第1次印刷
印数 1—1 200　册

ISBN 7-5004-1203-7/B·254　定价：7.60　元

《现代逻辑丛书》出版说明

现代逻辑内容很丰富，特别是符号逻辑或称数理逻辑，包括几个分支，如：逻辑演算，集合论，模型论，递归论，证明论等。在古典逻辑演算以外，近年来模态逻辑有了很大的发展，它又被称作哲理逻辑。

符号逻辑不仅内容丰富，还和许多学科如哲学、数学、计算机科学、语言学及心理学等有联系，影响及于这些学科，有些影响甚至是带根本性的。

我国大学的逻辑专业，计算机专业，数学专业，哲学专业等，都开设和符号逻辑有关的课程。

但是，这方面介绍性的书籍和教材在国内还不多见。本丛书的目的是提供一批叙述简明易懂和不需要较多数学知识的入门性书籍和教材。

《现代逻辑丛书》被列入国家第七个五年计划期间重点研究课题，由北京大学哲学系逻辑教研室王宪钧教授主编，教研室及校外任课教员执笔编写。

符号一览

绪言

ZF

ZFC

VNB

NBG

GB

第一章

$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$

$\leftrightarrow$

$\forall x$

$\exists x$

$=$

$\in$

$(,)$

$\varphi(x)$

$\neq$

$\notin$

$\forall x \in a \varphi(x)$

$\exists x \in a \varphi(x)$

$\emptyset$

$\{,\}$

$\{a, b\}$

$\{a\}$

$\bigcup a$

$a \cup b$

$\{x_1, \cdots, x_n\}$

$\subseteq$

$\subset$

$\supseteq$

$\supset$

$\not\subseteq$

$P(a)$

$\{x \in a : \varphi(x)\}$

$\{x : \varphi(x)\}$

$\bigcap a$

$a \cap b$

$a - b$

$-a$

第二章

$\langle x, y\rangle$

$\langle x\rangle$

$\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$

$a \times b$

$a_1 \times \cdots \times a_n$

a^n

xry

$\mathrm{Dom}(r)$

$\mathrm{Rng}(r)$

$\mathrm{Fld}(r)$

$\{\tau(x_1, \cdots, x_n) : \varphi(x_1, \cdots, x_n)\}$

r^{-1}

$r \circ s$

$r \upharpoonright a$

$[x]_r$

a / r

$f(x)$

$f : a \rightarrow b$

$f : a \xrightarrow[\text{onto}]{} b$

${}^a b$

$f : a \xrightarrow{1-1} b$

$f: a \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} b$

I_a

$f(x, y)$

$f(x_1, \cdots, x_n)$

$r[c]$

$r^{-1}[d]$

$<$

$\leq$

$>$

$\geq$

$\not<$

$\not\leq$

$<_a$

$<_L$

第三章

$x+1$

1

2

3

ω

Am

$m+n$

Mm

$m \cdot n$

m^n

$|a|$

$m<n$

$m \leq n$

第四章

$\{f(i)\}$

f_i

$\bigcup_{i \in I} f(i)$

$\bigcap_{i \in I} f(i)$

$\bigcup_i f(i)$

$\bigcap_i f(i)$

$\times_{i \in I} f(i)$

第五章

$\langle a, r \rangle$

$\cong$

$\mathbf{Z}$

$\mathbf{R}^+$

$\mathbf{Q}$

$\mathbf{R}$

$<_\omega$

$S_a(z)$

$\subset_b$

$\mathbf{Z}^+$

TC c

$\in_c$

Sup(a)

Sup$^+(a)$

$\alpha < \beta$

$\alpha \leq \beta$

$\forall \beta < \alpha \varphi(\beta)$

$\exists \beta < \alpha \varphi(\beta)$

A_α

$\alpha + \beta$

$\tau(\alpha)$

$\mathbf{M}_\alpha$

$\alpha \cdot \beta$

α^β

ε_0

$\mathbf{V}_\alpha$

Rank(a)

第六章

$\approx$

$\not\approx$

$|a|$

$\aleph_0$

Min(a)

Max(a)

$\kappa + \lambda$

$\kappa \cdot \lambda$

κ^λ

$\preccurlyeq$

$\not\preccurlyeq$

$\kappa \leq \lambda$

$\kappa < \lambda$

ω_α

$\aleph_\alpha$

CH

GCH

目　录

绪　言

很长一段时期无穷是哲学中的一个论题，不论是在中国还是在西方，早期的哲学家们在思考宇宙的本原问题时，就有了某种关于有穷和无穷的思想，例如希腊的毕达哥拉斯学派（约582—507B. C.），芝诺（Zeno of Elea约490—430B. C.），中国的惠施（370—318B. C.）和公孙龙（325—250B. C.）。然而，无穷对于人们一直是笼罩在浓雾之中的一个神秘的领域。人们不知道，在无穷集合之间是否还有大小之分（何谓集合的大小，这里暂时只能诉之于直观的概念）。只是到了上个世纪七十年代，德国数学家G. Cantor（1845—1918）才开始揭示其中的奥秘。他在1874年发表的论文中证明了，同是无穷集合，代数数的集合同正整数的集合一般大，而实数的集合不与正整数的集合一般大。在1874—1899近三十年间他系统地建立了关于无穷集合的理论，也就是集合论。

今天，集合论的语言和方法已渗透到数学的各个分支。通常人们所理解的数学对象，如数，可微函数，都可以定义为某种集合，人们所说的数学中的定理，例如微积分的基本定理，都可以通过定义化归为关于集合的语句或命题。一切数学分支都是在集合论或者集合论的某些部分中发展起来的。集合论是数学的基础。集合论与数学哲学的基本问题，如：数学中存在的意义，公理化方法与对于实在的描述二者之间的关系，协调性（或称无矛盾性，一致性）证明的需要以及这种证明中可以容许的手段方法，等等，有密切的联系，集合论的出现使得有关这些问题的讨

论更加深入。

Cantor在建立集合论时所持的是直观的集合概念。所谓直观的集合概念，大致说，就是认为：将具有某种特定性质的一切对象聚合在一起，看成是一个整体，这就是集合。集合论刚一建立，Cantor 本人在1895，1899年接连发现，如果肯定存在某些集合，如像一切集合的集合，会导致矛盾。1897年Burali-Forti悖论的发表，特别是1903年非常简单的罗素悖论的发表——所谓悖论就是自相矛盾的语句——迫使数学家和哲学家对集合概念加以审查，认为不能把集合论建立在直观的集合概念的基础上。为了避免悖论，罗素在1903年提出，我们不能从任意给定的性质无中生有地得出一个集合，而只能把已有的集合中的一些对象按照一定的性质聚合成一个新的集合。这是他为解决悖论危机而提出的类型论（*Theory of Types*）的一个重要思想。另外，Cantor在1899年含蓄地提到，后来罗素在1906年明确地提出了，限制大小的主张（*Doctrine of Limitation of Size*）。这个主张是说，我们不能漫无限制地把一些对象聚合成一个集合，集合的大小要有限制，不能承认太大的集合，如像一切集合的集合。从以上两种观点来选择公理，来从已有的集合得出新的集合，来对集合的大小加以限制，以避免悖论，同时又尽可能地反映直观的集合概念，并给数学提供一个充分的基础，这就是公理化集合论产生的一个重要动机。此外，Dedekind 和 Frege 等对于算术基础的研究，探讨算术究竟需要一些什么基本的原则，以及关于选择公理等的争论也是公理化集合论产生的动力。与公理化集合论相对的，不使用公理化方法的集合论则称朴素集合论。Cantor的集合论就是朴素的集合论。

集合论的第一个公理系统是Zermelo在1908年提出的。这个公理系统后来经过Mirimanoff, Fraenkel, Skolem 和 von Neumann 的补充和加强，称为 Zermelo-Fraenkel 公理系统，简称ZF。这个系统再加上选择公理简称ZFC。

固然，我们不能接受太大的集合，如一切集合的集合，不能任意将具有某一特定性质的一些对象聚合成一个集合，但是，毕竟这样的聚合（*Collection*）是如此的自然、基本，毕竟我们难以避免提到一切集合的整体，或一切集合的聚合，Cantor在1899年曾经想到，在集合以外还使用类（*Class*）的概念，von Neumann在1925年使这一思想趋于成熟。他承认对象的任意聚合都是类，但是在类中还要再作区分，有的类可以属于其它的类，这就是我们所说的集合，有的类不属于其它的类，这样的类后来称为真类（*proper class*），例如一切集合所成的类。他认为悖论的产生不是由于承认有很大的类，而是由于允许这样的类属于其它的类。如果承认有一切集合的集合会导致矛盾，那么认为一切集合的聚合不再是集合，不再属于其它的类，而是真类，就不致产生矛盾。后来Bernays保留了von Neumann的思想而在形式上采取了Zermelo的处理方法，在1937—1954年间建立了集合论的另一个公理系统。这个公理系统简称为VNB系统。Gödel(1906—1978）在1940年的专著《选择公理、广义连续统假设与集合论公理的协调性》中使用了Bernays的系统而有所改进，如此所得的系统简称NBG或GB。

ZF只有两个初始概念或基本概念，就是集合和属于关系，在需要说到某些集合的聚合，而又要避免提到类时，ZF采取了一种迂迴的办法，用函数代替类。

GB则有三个基本概念：集合、类和属于关系。因此GB中有的定理不是ZF的定理。但是已经证明，一个ZF中的语句在ZF中可证，当且仅当，它在GB中可证。因此，就只涉及集合的定理而言，GB与ZF在本质上是相同的理论，它们的差别只是技术上的。

由于ZF只处理集合，比较简单，成为最常用的系统，我们就介绍这个系统，随着理论的发展，我们还将引入选择公理。

第一章

公理　集合的运算

§1　基本概念　语言和逻辑

1.1 基本概念　我们已经知道，集合论基本概念之一是集合或简称集。太阳系的行星构成一个集合，所有的素数也构成一个集合。一方面，一些集合可以构成一个新的集合，例如，一条直线是点的一个集合，可是平面上所有直线又构成一个新的集合。另一方面，在ZF中凡属于某个集合的也都是集合。在ZF中只有集合，集合的集合，以及由此得到的高度复杂的结构。什么是集合？我们将不给出集合概念的定义，就像初等几何学并不给出点、线、面等概念的定义一样。虽然，在初等几何学中点、线、面等概念没有明显的定义，但是，因为它们满足几何公理，几何公理隐含地对它们作了规定。类似地，我们虽不给出集合概念的定义，集合论的公理是对集合概念的某些性质的严格地、精确地陈述。

集合论的另一个基本概念是属于关系。习惯以符号“$\in$”表示属于关系。集合 x 属于集合 a 记作：$x \in a$。我们也把 x 属于 a 说成是 x 是 a 的一个元素，或，a 含有 x。我们还常常把元素简称为元。

从以上两个基本概念出发，可以建立 ZF 的整个理论体系。在陈述这个理论的过程中为了简明、精确，我们将使用一些符号。现在将我们所使用的符号语言和理论推导中的逻辑工具先交

待如下。

1.2 语言和逻辑　在汉语以外，我们使用以下符号：首先，我们以小写拉丁字母，除A、K、L、M、P、S、V以外的大写拉丁字母，作为集合变元，表示任意的集合。为了有足够多的符号供我们使用，这些字母还可带上下标或在右上方加撇“ ′ ”等。

其次，我们要使用数理逻辑中的符号，这些符号是：

（1）联结词：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。

这五个联结词依次表示否定，合取，析取，蕴涵和等值，依次读作：“非”，“且”，“或”，“蕴涵”或“如果…则…”，“等值”或“当且仅当”。

（2）量词：$\forall x$，$\exists x$。

前者是全称量词，读作“对于所有x”。后者是存在量词，读作“存在x”。

（3）等词：$=$。

等词表示相等，或者说等同，读作“等于”。

再次是集合论所特有的二元谓词：$\in$。

这个二元谓词表示属于关系，读作“属于”或“是…的元素”。

最后是辅助符号——左、右括号：（，）。

由以上符号可以构成公式。我们用希腊字母：φ，ψ，η或加下标或在右上方加撇，表示任意公式。

公式的定义如下：

（1）两个变元用等词或谓词$\in$联结起来是公式。这种公式称为原子公式，如：$x = y$，$x \in y$。

（2）如φ，ψ是二公式，则$(\neg\varphi)$，$(\varphi\wedge\psi)$，$(\varphi\vee\psi)$，$(\varphi\rightarrow\psi)$，$(\varphi\leftrightarrow\psi)$是公式。

（3）如φ是一公式，x是一变元，则$(\forall x\varphi)$，$(\exists x\varphi)$是公式。

（4）只有以上这些是公式。

为简单和醒目起见，只要不致引起歧义，我们常将公式中的

一些括号省略，省略依据的是通常的规则，即：一公式的最外面的一对括号可以省略；又，联结词与公式的结合力依下列次序递增：

$$\leftrightarrow, \ \rightarrow, \ \vee, \ \wedge, \ \neg。$$

在$\forall x\varphi$（或$\exists x\varphi$）中，φ称为量词$\forall x$（或$\exists x$）的辖域。如x不在φ中出现，则$\forall x\varphi$（或$\exists x\varphi$）即是φ。变元x在一个公式φ中的某次出现称为约束出现，当且仅当，x的这次出现是在公式φ中的一个量词$\forall x$（或$\exists x$）中，或者是在量词$\forall x$（或$\exists x$）的辖域中。否则，x的这次出现称为自由出现。

在公式$\forall x\exists y(x\in y)$中，$x$的第一，第二次出现和$y$的第一，第二次出现都是约束出现。在公式$\neg\forall y(x\in x)$中，$x$的第一，第二次出现是自由出现，$y$的唯一一次出现是约束出现。

一个变元称为是一个公式中的自由（约束）变元，当且仅当，它在公式中有一次自由（约束）出现。一个变元在同一个公式中可以既自由又约束。例如在公式$x\in y\wedge\forall x(x=x)$中，$x$，$y$的第一次出现都是自由出现，$x$的第二，三，四次出现是约束出现，因此$x$在公式中既自由又约束。

至少有一个自由变元的公式称为开公式。没有自由变元的公式称为闭公式或语句。

我们把公式φ常写作$\varphi(x)$，这不意谓x必然是$\varphi(x)$的一个自由变元，也不意谓除x以外$\varphi(x)$没有其它自由变元，它意谓我们有兴趣的情形是，x确实是$\varphi(x)$中的一个自由变元。在我们提到$\varphi(x)$以后再提到$\varphi(y)$时，$\varphi(y)$是将y代入$\varphi(x)$中的x的所有自由出现的结果。y也可能是$\varphi(x)$中的约束变元，在这种情形下，我们须用其它变元替换y的约束出现，然后将y代入x的自由出现。

以上描述的语言可以陈述ZF理论系统中一切公理，定义和定理等。但是完全使用这种语言可能使人不习惯，感觉不便，我

们只使用适量的符号语言，同时还使用日常的汉语。

数理逻辑中带等词的一阶谓词演算支配逻辑联结词、量词和等词的使用，是集合论理论推演的依据，ZF 集合论以带等词的一阶谓词演算为基础，并且仅仅以此为基础。我们假定这个演算，在这个基础上再逐步引入 ZF 的公理。

§ 2　外延性公理和其它几个公理

我们知道，等词所表示的相等关系有可替换性，即，对于任何公式$\varphi(a)$，如$a=b$，又如$\varphi(a)$成立，则$\varphi(b)$成立；同时由于相等关系的对称性，又有：如$a=b$，又如$\varphi(b)$成立，则$\varphi(a)$也成立。因此，

$$a=b\rightarrow(\varphi(a)\leftrightarrow\varphi(b))。$$

现在令$\varphi(a)$为$x\in a$，则有

$$a=b\rightarrow(x\in a\leftrightarrow x\in b)。$$

由此，

$$a=b\rightarrow\forall x(x\in a\leftrightarrow x\in b)。$$

即，如果两个集合相等，则它们有相同的元素。这是逻辑真理。

这个命题的逆命题却不是逻辑真理，而是集合论的一个基本原则，这就是集合论的外延性公理。

2.1 外延性公理　如果集合a与b有相同的元素，则$a=b$。

公理的符号表示是：

$$\forall a\forall b(\forall x(x\in a\leftrightarrow x\in b)\rightarrow a=b)。$$

外延性公理肯定了集合的外延性质，即，一个集合由它的元素唯一决定。

从理论的需要来说，我们需要有一个起点，需要至少有一个集合供我们使用。现在就以不含有任何元素的集合作为起点，因为它不含有任何元素，所以称为空集，我们要肯定空集的存在。

在陈述空集公理以前，我们先引入以下定义。

2.2 定义

（1）$a\neq b\leftrightarrow\neg a=b$。

（2）$a\notin b\leftrightarrow\neg a\in b$。

（3）$\forall x\in a\varphi(x)\leftrightarrow\forall x(x\in a\rightarrow\varphi(x))$。

（4）$\exists x\in a\varphi(x)\leftrightarrow\exists x(x\in a\wedge\varphi(x))$。

2.3 空集公理　存在集合没有任何元素。

这个公理用符号表示是，

$$\exists a\forall x(x\notin a)。$$

2.4 命题　存在一唯一的集合没有任何元素。

证明　存在根据空集公理。现在证唯一性。

设a，a'均无元素，即$\forall x(x\notin a)$且$\forall x(x\notin a')$。由$\forall x(x\notin a)$可得$x\in a\rightarrow x\in a'$，因此，$\forall x\in a(x\in a')$。同理可得$\forall x\in a'(x\in a)$。于是，$\forall x(x\in a\leftrightarrow x\in a')$。按外延性公理，$a=a'$。□①

我们知道，在由定义引进一个新的符号来指称一个对象时，必须符号指称的对象存在，否则，符号无所指；还必须符号指称的不是一个以上的对象，否则，符号所指不明确。命题 2.4 使得我们能够引进一个符号来指称没有任何元素的集合，换句话说，我们可以作出一个如下的定义：

2.5 定义　0是不含有任何元素的集合。

0读作“空集”。

0即是公理肯定其存在的集合，所以，

$$\forall x(x\notin 0)。$$

$a\neq 0$即a不是空集，简称a非空。

到现在我们只有一个集合，这个集合还是空的，而我们需要有够多的集合使得任意一个集合都是某个集合的元素，即，需要有够多的集合以任意一个集合为元素，需要有够多的集合以任意

① 在一个证明的结束处或在一个不给出证明的命题或定理之后，我们都标以□。

二个，三个，四个…集合为元素。（这里的二，三，四…不是严格的，形式的，而是直观的，日常语言中的，等于说，某个东西，然后另一个东西，…等等。）解决以上的问题，需要有构造集合的原则，下面的对集公理是这样的一个原则。

2.6 对集公理（或称配对公理）　对于任意集合 a 与 b，存在一集合 c 恰以 a，b 为元素。

公理用符号表示是：

$$\forall a\forall b\exists c\forall x(x\in c\leftrightarrow x=a\vee x=b)。$$

2.7 **命题**　对于任意集合 a 与 b，存在一唯一的集合 c 恰以a，b为元素。

证明　存在根据对集公理。设c与c'都是恰以 a，b 为元素的集合，则因

$$x\in c\leftrightarrow x=a\vee x=b$$
$$\leftrightarrow x\in c',$$

于是，

$$\forall x(x\in c\leftrightarrow x\in c')。$$

按外延性公理，

$$c=c'。\square$$

2.8 **定义**

（1）$\{a,b\}$是恰以a，b为元素的集合。

用符号表示是，

$$\forall x(x\in\{a,b\}\leftrightarrow x=a\vee x=b)。$$

（2）$\{a\}=\{a,a\}$。

$\{a,b\}$读作“a 与 b 的对集”。$\{a,b\}$与a，b的次序无关，$\{a,b\}=\{b,a\}$。所以，$\{a,b\}$又称 a 与 b 的无序对。

$\{a\}$读作“a 的单集”。

显然我们有，

$$x\in\{a\}\leftrightarrow x=a。$$

注意，一个单集不等同于它的唯一的元素。一个明显的例子

是，单集$\{0\}$有一个元0，而0是空集，没有任何元。另一个例子，$\{\{a, b\}\}$只有一个元，因而是一个单集，而$\{a, b\}$有两个元，不是一个单集。至于对集$\{a, b\}$不等同于它的元a，也不等同于它的元b，须借助于后面的正则性公理才能证明。

由对集公理，给定集合a，我们可以构造集合$\{a,a\}=\{a\}$，这个集合以a为它的元。因而任一集合都是某个集合的元。又，根据对集公理，任何两个集合可以是同一集合的元。总之，由对集公理，给定集合a，我们可以推论很多集合的存在，例如，我们有$\{a\}$，$\{\{a\}\}$，$\{\{\{a\}\}\}$，…，有$\{a, \{a\}\}$，及由前一序列中任意两个集合构成的对集；还有任意两个对集构成的对集；或者任意一个单集与任意一个对集构成的对集，等等。不过，这样得到的集合只有一个元或者两个元。要得到多于两个元的集合，还需要其它构造集合的原则。下面的并集公理肯定并集运算，并集运算使得我们可以把两个以至更多的集合并成一个集合，这样的集合就可以有两个以上的元。为了避免引进太大的不是集合的聚合，并集运算不能施行于任意一些集合上，这些集合必须限制在一给定的集合中，即，这些集合必须同属于一给定的集合。

2.9 并集公理　对于任意集合a，存在一集合c，它的元恰是属于a的某个集合的元。

公理用符号表示是，

$$\forall a \exists c \forall x(x \in c \leftrightarrow \exists y \in a(x \in y))。$$

2.10 命题　对于任意集合a，存在一唯一的集合c，它的元恰是属于a的某个集合的元。□

2.11 定义　$\bigcup a$是恰由属于a的某个集合的元构成的集合。

这个定义也可以用符号表示，

$$\forall x(x \in \bigcup a \leftrightarrow \exists y \in a(x \in y))。$$

“$\bigcup$”称为并集运算，$\bigcup a$读作“a中的集合的并集”，或简单地，“a的并”。

2.12 命题　对于任意集合a和b，集合$\bigcup\{a, b\}$存在且唯一。