

智能科学与非线性科学丛书

西安电子科技大学出版社

# 实用小波分析

秦前清 杨宗凯 编著

B.412  
457

2657/30

国家自然科学基金 资助项目  
国防“八五”预研基金

# 实用小波分析

秦前清 杨宗凯 编著

DG1 7/23

西安电子科技大学出版社

1995

1015854

(陕)新登字 010 号

## 内 容 简 介

小波分析是近几年国际上掀起热潮的一个国际前沿领域,它被认为是傅里叶分析方法的突破性进展。本书详细地论述了小波分析的基本方法及其在信号/图像处理、分形、奇异性检测等领域的应用与求解方法。结合应用,面向应用,介绍基本方法是本书的基本立足点。在附录中还详细给出了各种算法的程序。

本书既可作为信号/信息处理、通信与电子系统、图像处理、地震信号处理、电路与系统、物理学、应用数学、机械工程、力学、光学等专业大学生、研究生的教材,同时对上述领域科技工作者有重要的使用价值。

### 实用小波分析

秦前清 杨宗凯 编著

责任编辑 殷咸安

---

西安电子科技大学出版社出版发行

西安电子科技大学印刷厂印刷

新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张 11 10/16 字数 264 千字

1994 年 1 月第 1 版 1995 年 10 月第 3 次印刷 印数 7 001—12 000

---

ISBN 7-5606-0303-3/O·0020 (课)

定价: 9.70 元

## 前 言

小波分析的历史是科学家、工程师、数学家们共同创造的历史。今天它仍在蓬勃发展中，它的应用范围还无法预料，许多学科的人们都在关心并试图涉足这个新的领域。为此，我们在前段学习研究的基础上编著了这本书，试图提供一个入门的课本。我们希望能做到这一点。

在第一章中，我们以 Fourier 分析入手，简要地介绍并拓广了系统与信号中的有关概念，为全书进行系统分析及应用作了必要的铺垫。

第二章一开头，我们便给出了小波变换的二种等价的定义，它们是为针对不同问题而设立的。尔后，我们专门对二进小波变换、构造及特性作了充分的阐述，并给出了数字信号的有限二进小波变换的分解及用有限离散二进小波变换重构数字这些结果我们就可以得到一些可具体进行数值计算的奇性反演公式。这无疑也是小波变换的优势可以充分得以发挥的领域。

为了提高中程地地导弹和其它未制导导弹的定位精度，必须有高分辨率的数字地形图，然而参考数字地形图都是卫星用立体视角的方法制作的，由于卫星照片处理的分辨率较粗，故所能提供的参考数据也是粗分辨率的。由粗分辨率数据获得高分辨率数据最简单的方法就是进行内插。然而，对于地形数据来说，地形最重要的特征就是它的纹理特征，而有效地刻划地形地貌的统计纹理特征的便是具有分形特性的分数 Brown 函数，用此模型拟合低分辨率数据，然后用小波的分层技术抽取特征参数，并根据这些参数进行分形内插，从而可获得保持纹理特征的高分辨率数据。在第九章中，我们给出了分数 Brown 运动 FBM 在小波变换下的特性分析，证明了在给定尺度下的非平稳的 FBM 的小波变换是平稳过程，并给出了各种尺度下的参数估计问题，为对给定图形数据进行分层、参数选取进而获得具有纹理特性的高分辨率数据提供了理论依据和应用方法。

本书的完成特别要感谢西安电子科技大学焦李成教授的大力帮助，他为本书的写作提出了许多重要的且带有指导性的意见，后来又为本书的初稿进行了补充、调整和完善等具体工作。

我们的研究是在国家自然科学基金和“八五”国防预研基金的资助下完成的。在研究过程中，文志英教授、王建忠教授、彭立中教授、黄铁侠教授、姚天任教授、朱耀庭教授、朱光熹教授给予很大的指导和帮助。华中理工大学并行计算研究所的程先娥为本书打字排版付出了辛勤劳动。对此，我们表示衷心的感谢。感谢西安电子科技大学出版社领导和责任编辑殷咸安先生的大力支持和辛勤劳动。

由于时间仓促，本书一定存在不少缺点和不足，切望同仁批评指正。

编 著 者

1993.9

1015854

# 代 序

## (一)

我们正处于新世纪的前夜. 在本世纪之初的 1900 年 8 月 8 日, 德国数学家 D. Hilbert 在巴黎国际数学家大会上作了题为《数学问题》的演讲. 这是一篇划时代的数学宣言, 它拉开了 20 世纪数学发展的序幕.

Hilbert 在这篇演讲中满怀激情地憧憬着未来数学的发展, 他说: “我们当中有谁不想揭开未来的帷幕, 看一看在今后的世纪里我们这门学科发展的前景和奥秘呢? 我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标? 在广阔而丰富的数学思想领域, 新世纪将会带来什么样的新方法和新成就?”

在 20 世纪即将过去的今天, 回顾数学发展的历程, 我们看到, 本世纪的数学家们所孜孜不倦地追求的是: 数学理论的完美性和数学应用的广泛性.

在这两项目标的追求上, 现代分析学的两个分支, 即本世纪初创立的泛函分析学和近几年才发展起来的小波分析学取得了突出的成就.

由 Hilbert 亲自奠基的泛函分析学, 综合地运用了几何学、代数学和分析学的观点和方法, 统一地处理和论证了许多数学分支的一系列命题. 泛函分析开创了现代分析学的先河.

20 世纪的现代分析学开拓了一个又一个新的领域, 诸如泛函分析、数值分析、傅氏分析、样条分析和小波分析等. 今天, 现代分析学这个数学分支已成长为一株枝繁叶茂、荫荫广阔的大树耸立于学科之林.

小波分析将是这株大树的主干, 它吸取了众多分支的精华并包罗了它们的许多特色. 小波分析为 20 世纪的现代分析学作了完美的总结.

## (二)

小波分析来源于信号分析.

设给定连续信号  $f(t)$ . 考虑到实际物理仪器记录的信号总是仅有有限的分辨率, 可将  $f(t)$  近似地表为下列阶梯函数(图 1)

$$f_0(t) = \sum_n C_n^0 \varphi(t - n)$$

为简化叙述, 这里取整数点  $n$  为样点, 式中  $C_n^0 = f(n)$  为样本值, 而其基函数(图 2)

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

并将其称为尺度函数.

我们将采样间隔加倍, 则其样点数减半, 这时信号表示为

$$f_1(t) = \sum_n C_n^1 \varphi\left(\frac{t}{2} - n\right)$$

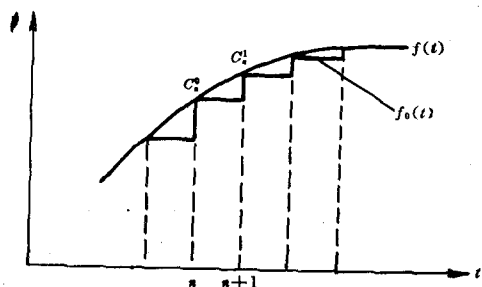


图 1 阶梯函数

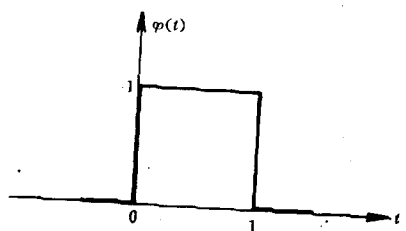


图 2 基函数

不难理解, 这里自然取

$$C_n^1 = \frac{1}{2}(C_{2n}^0 + C_{2n+1}^0)$$

我们看到, 通过上述手续信号的数据量被压缩了一半. 在这种意义下, 我们称上述算法为二分法.

再考察二分前后两个信号的偏差(参看图 3)

$$g_1(t) = f_0(t) - f_1(t)$$

它具有形式

$$g_1(t) = \sum_n d_n^1 \psi(\frac{t}{2} - n)$$

这里

$$d_n^1 = \frac{1}{2}(C_{2n}^0 - C_{2n+1}^0)$$

而其基函数(图 4)

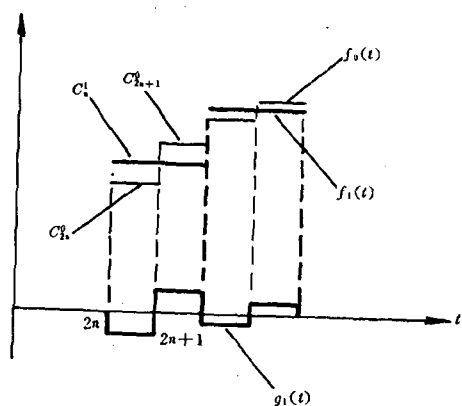


图 3 信号偏差

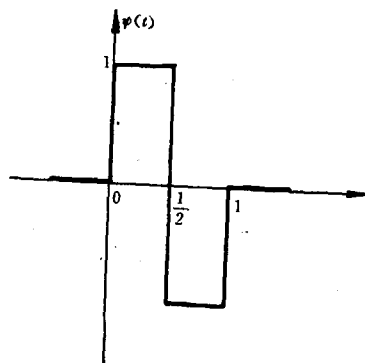


图 4 小波基函数

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < t < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

就是一个小波函数.

顾名思义,“小波”就是小的波形.所谓“小”是指它具有衰减性,譬如局部非零的;而称之为“波”则是指它的波动性,即其振幅呈正负相间的震荡形式.

小波函数  $\psi(t)$  的重要价值在于,它通过平移和伸缩生成  $L^2(R)$  中一组正交基:

$$\{\psi(2^{-k}t - n), k, n \text{ 整数}\}$$

从而可将给定信号  $f(t)$  进行分解:

$$f(t) = \sum_{n,k} d_{n,k} \psi(2^{-k}t - n)$$

### (三)

为进行信号分析,提供  $L^2(R)$  的一组正交基是至关重要的.人们尤感兴趣的是,为更有效地适应实际需要,利用所给的小波函数能否派生出更多、更适用的小波函数?

再考察前述尺度函数  $\varphi(t)$  与小波函数  $\psi(t)$ ,它们可以看作是由函数  $\varphi(2t)$  经过下列两种不同的运算手续生成的:

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1)$$

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1)$$

从图 5 上看,  $\varphi(t)$  和  $\psi(t)$  具有不同的对称性,我们将这两种对称性分别标记为“0”和“1”.

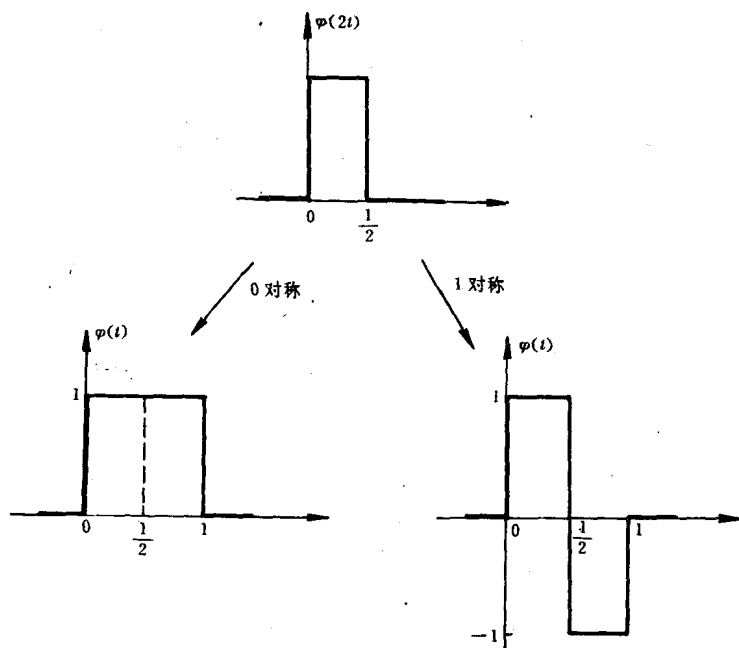


图 5 尺度函数与小波函数

我们对所给小波函数  $\psi(t)$  反复施行“0”和“1”两种对称手续，则可生成一系列小波函数，如图 6 所示。

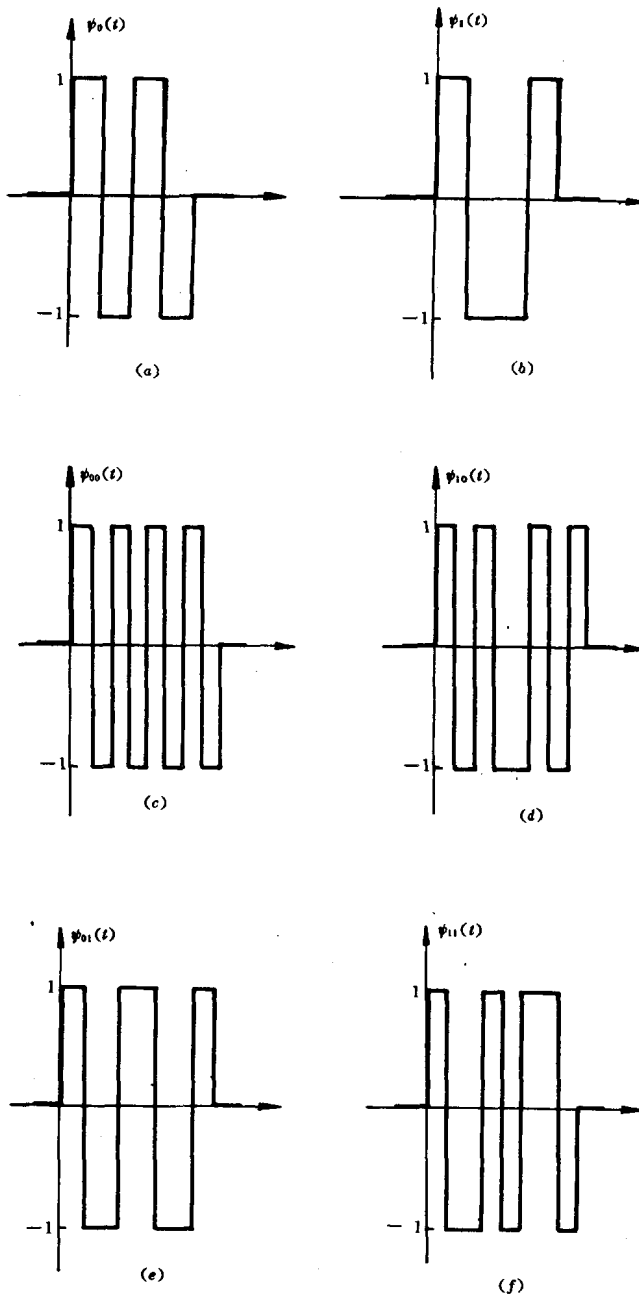


图 6 小波函数生成

这些小波函数组成一个函数库。图 7 自下而上地描述了小波库的生成过程。

|               |               |               |               |               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\psi$<br>000 | $\psi$<br>100 | $\psi$<br>010 | $\psi$<br>110 | $\psi$<br>001 | $\psi$<br>101 | $\psi$<br>011 | $\psi$<br>111 |
| $\psi$<br>00  |               | $\psi$<br>10  |               | $\psi$<br>01  |               | $\psi$<br>11  |               |
| $\psi$<br>0   |               |               |               | $\psi$<br>1   |               |               |               |
| $\psi$        |               |               |               |               |               |               |               |

图 7 小波库的生成

#### (四)

具有重要实用价值的这张小波库生成图，可以用我国古代哲学思想来阐述和概括。

在我国传统文化的广阔天地里，有一片片神秘哲学的原野。神秘的东西中最神秘的莫过于八卦。古老易经八卦与年轻的小波分析会有什么联系呢？

《周易·系辞》中说：“易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦”。下面的这张《伏羲八卦次序图》刻画了八卦的生成：

|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 坤<br>000 | 艮<br>100 | 坎<br>010 | 巽<br>110 | 震<br>001 | 离<br>101 | 兑<br>011 | 乾<br>111 |
| 太阴<br>00 |          | 少阳<br>10 |          | 少阴<br>01 |          | 太阳<br>11 |          |
| 阴<br>0   |          |          |          | 阳<br>1   |          |          |          |
| 太极       |          |          |          |          |          |          |          |

如果我们用现代的阴阳符号“0”和“1”表示阴爻--和阳爻一，再比较这样画出的八卦生成图和前述小波库生成图，人们会惊奇地发现，两者竟是同一个模式。

然而小波库与八卦图从属于两种不同的思维方式，一是重推理的逻辑思维的硕果，另一则是重直感的形象思维的结晶。

我们深信，在东方哲学思想的沃土上培育小波分析这株数学之花，将会结出更丰硕的智慧之果。

#### (五)

我们今天又处于世纪更迭之际。新的 21 世纪正大步朝我们走来。历史正向未来延伸。数学必将跃上新的台阶。人们又在充满激情地发问：新世纪的数学又会有什么样的风采？

历史在重演。在本世纪末的 1988 年，同样是 8 月 8 日这个吉祥的日子，中国数学家们聚会在北京科学会堂，庆祝“数学机械化研究中心”成立。这次大会上回荡着“复兴中华”的时代最强音。请听一听我国著名数学家吴文俊先生的豪言壮语吧：

“我们即将进入 21 世纪。这一世纪将以脑力劳动机械化为其重要标志。…我国先哲在数学上所建立的算法体系，正是数学劳动机械化的典范。在先哲光辉思想的照耀下，我国数学家理应率先迈步进入这一脑力劳动机械化的新时代”。

我们面向未来。

未来属于我们！

王能超

1992.9.19

# 目 录

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 第一章 小波分析基础               | 1  |
| § 1.1 信号与系统              | 4  |
| § 1.2 滤波器、采样定理           | 8  |
| § 1.3 信号的时频局部化分析         | 10 |
| 第二章 连续小波与小波变换            | 14 |
| § 2.1 连续小波的定义与其变换性质      | 14 |
| § 2.2 二进小波变换及性质          | 17 |
| § 2.3 二进小波的构造            | 23 |
| § 2.4 数字信号的二进小波变换        | 25 |
| 第三章 小波正交基及构造方法           | 29 |
| § 3.1 多尺度分析              | 29 |
| § 3.2 几个特殊的多尺度分析的生成元     | 32 |
| § 3.3 正交小波基的构造           | 34 |
| § 3.4 小波基与抽样定理           | 37 |
| § 3.5 数字信号按正交小波基的展开      | 38 |
| 第四章 正交小波基构造的进一步讨论        | 41 |
| § 4.1 $H(\omega)$ 的性质    | 41 |
| § 4.2 多尺度分析生成元的几种构造法     | 43 |
| § 4.3 紧支集正交小波基的性质及构造     | 45 |
| 第五章 二分法与小波包算法            | 54 |
| § 5.1 小波包的定义             | 54 |
| § 5.2 数字信号按小波包基的展开       | 59 |
| § 5.3 好基准则及选取            | 61 |
| § 5.4 快速逼近因子分析           | 63 |
| 第六章 图像的小波变换处理            | 65 |
| § 6.1 信号奇异点与奇异度的数值测定     | 65 |
| § 6.2 图像的多尺度边缘回复         | 66 |
| § 6.3 实用图像处理             | 68 |
| § 6.4 二进小波变换对边缘析取和回复的影响  | 75 |
| § 6.5 正交变换、小波包与图像数据压缩    | 75 |
| § 6.6 正交小波变换在图像拼接和镶嵌中的应用 | 78 |
| 第七章 小波变换下的信号分析           | 80 |
| § 7.1 奇异信号在小波变换下的特性      | 80 |
| § 7.2 例子分析               | 88 |
| § 7.3 周期信号在小波变换下的特性      | 90 |

|                                              |     |
|----------------------------------------------|-----|
| 第八章 快速小波变换与线性算子的拟对角化 .....                   | 93  |
| § 8.1 引言 .....                               | 93  |
| § 8.2 光滑化函数按其消失矩的小波基的展开 .....                | 93  |
| § 8.3 高维空间的正交小波基的二种表示法 .....                 | 96  |
| § 8.4 线性积分算子按正方块正交小波基的化简 .....               | 97  |
| § 8.5 线性算子按长方块正交小波基的化简 .....                 | 100 |
| 第九章 分形的小波变换预处理 .....                         | 106 |
| § 9.1 引言 .....                               | 106 |
| § 9.2 分形与分维 .....                            | 106 |
| § 9.3 受控齐次信号的标准正交小波表示 .....                  | 108 |
| § 9.4 齐次信号处理的正交小波算法 .....                    | 113 |
| § 9.5 分数 <i>Brown</i> 运动( <i>FBM</i> ) ..... | 113 |
| § 9.6 <i>FBM</i> 的小波变换特性 .....               | 116 |
| 附 注 .....                                    | 122 |
| 附 录 .....                                    | 124 |
| 附录 A 短时傅里叶变换程序 .....                         | 124 |
| 附录 B 连续小波变换程序 .....                          | 129 |
| 附录 C 离散正交小波变换程序 .....                        | 136 |
| 附录 D 二维正交小波变换程序 .....                        | 142 |
| 附录 E 小波包算法程序 .....                           | 148 |
| 参考文献 .....                                   | 166 |

## 第一章

## 小波分析基础

近几年来,一种被称为小波变换的数学理论和方法正在科学技术界引起了一场轩然大波.在数学家们看来,小波分析是一个新的数学分支,它是泛函分析、Fourier 分析、样条分析、调和分析、数值分析的最完美结晶;在应用领域,特别是在信号处理、图像处理、语音分析、模式识别、量子物理及众多非线性科学等领域,它被认为是近年来在工具及方法上的重大突破.

小波分析,无论是作为数学理论的连续小波变换,还是作为技术工具和方法的离散小波变换,仍有许多未被开发的处女地.为了便于读者的理解,我们尽量用通俗的语言来叙述其思想,揭示其实质.但读者同时会发现,它也不失数学上的完美.

## 一、小波分析的思想来源

长期以来,无论是信号处理界,还是数学界,人们力图寻求信号表示方法,综合三角函数系与 Haar 系两者优点的某种函数来分解任意函数.我们知道,这二个函数系在以下意义上占据了二个极端位置.三角函数系中的函数在频率域即在 Fourier 变量域上是完全局部化的,但在空间或时间域上无任何局部性.相反地,Haar 系中的函数在时间域上是完全局部化的,然而它在 Fourier 变量域上局部性却很差,这是因为它缺乏正则性与振荡性所致.

寻求关于时间变量与频率变量都合适的基是 Balian 所提倡的,他指出:“在通讯理论中,人们可以对在给定时间内,把一个振动的信号表示成每一个都同时拥有足够确定的位置与频率的初等小波的叠加这件事感兴趣.事实上,有用的信息常常是同时被发射的频率与信号的短暂结构(如音乐)所传递.然而,当把一个信号表达成时间的函数时,其中的频谱表现并不好,相反地,该信号的 Fourier 分析却标出了信号中每一分量发射的瞬间与持续时间.一个适当的表示应当结合这二种互补描述的优点,用一个离散的刻划来表示以适应通讯理论”.

为了体现 Balian 的这一思想, Gabor 于 1964 年引入了窗口 Fourier 变换,信号  $f(x)$  的窗口 Fourier 变换定义为:

$$Gf(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x - q)} e^{-ipx} dx$$

其中函数  $g$  是给定的,称之为窗函数(例如可选  $g$  为 Gauss 函数).此时,有如下重构公式:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} Gf(p, q) g(x - q) e^{ipx} dp dq$$

值得注意的是,窗口 Fourier 变换是一种窗口大小及形状均固定的时频局部化分析.但因为频率与周期成反比,因此,反映信号高频成分需窄的时间窗,而反映信号低频成分需宽的

时间窗. 这样, 窗口 Fourier 变换不能满足这一要求. 下面要介绍的一种窗口大小固定但形状可改变因而满足上述要求的时频局部化分析便是本书要讲述的小波分析了.

如果函数  $\psi \in L^1 \cap L^2$  满足:

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (0.1)$$

令

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{\frac{1}{2}} \left( \frac{t-b}{a} \right) \quad (0.2)$$

则函数  $f \in L^2$  的小波变换为

$$W_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (0.3)$$

此时, 有如下公式:

$$f(t) = C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} W_f(a,b) \overline{\psi_{a,b}(t)} \frac{da db}{a^2} \quad (0.4)$$

我们将会看到, 上述小波变换是 Balian 思想的一种最本质的体现.

由  $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R})$  知  $\int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| dt < \infty$  即  $\psi(t)$  具有衰减性, 特别地,  $\psi(t)$  是局部非零的紧支函数, 在这个意义下称它是“小”的. 又由 (0.1) 式知  $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$  即  $\psi(t)$  具有波动性. 因此, 我们赋予  $\psi$  一个特定名字: 小波函数. 另由  $|\hat{\psi}(\omega)|_{\omega=0} = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$  知,  $\psi$  还具有带通性.

为说明问题起见, 我们假定  $\psi$  是一个对称双窗函数, 则当  $\psi$  的中心及半径分别为  $t^*$ 、 $\Delta_\psi$  时,  $\psi_{a,b}$  的中心在  $b + at^*$  而半径为  $a\Delta_\psi$  (设  $a > 0$ ), 同时当  $\hat{\psi}$  的中心及半径分别为  $\omega^*$  (由对称性, 我们只考虑正半频率轴, 从而  $\omega^* > 0$ ) 及  $\Delta_\psi$  时, 则  $\hat{\psi}_{a,b}$  的中心在  $\frac{\omega^*}{a}$  而半径为  $\frac{1}{a}\Delta_\psi$ , 亦即其时频窗由

$$\begin{aligned} & [t^* - \Delta_\psi, t^* + \Delta_\psi] \times [\omega^* - \Delta_\psi, \omega^* + \Delta_\psi] \text{ 变为} \\ & [b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi] \times \left[ \frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_\psi, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_\psi \right] \end{aligned}$$

现固定  $b$ , 则当  $a$  逐步减小时, 窗的中心逐步从  $b$  的右边向  $b$  靠近, 而逐步向高频方向移动, 同时窗的宽度减小但窗的高度增加, 尽管窗口面积的大小不变. 从这个意义上讲, 它有极敏感的“变焦”特性.

现在来看条件 (0.1) 式, 我们认为它的引入是极其自然的. 因为在实际信号分析中, 常常需要将正频轴分解成不相交的频率带. 而最自然最有用的方式便是二进制分解了, 因此仅考虑如下二进划分:

$$(0, \infty) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (2^j \Delta_\psi, 2^{j+1} \Delta_\psi] \quad (0.5)$$

这是可以办到的. 因不失一般性, 我们可设  $\omega^* = 3\Delta_\psi$  则:

$$\left[ \frac{\omega^*}{a_j} - \frac{1}{a_j} \Delta_\psi, \frac{\omega^*}{a_j} + \frac{1}{a_j} \Delta_\psi \right] = (2^{j+1} \Delta_\psi, 2^{j+2} \Delta_\psi] \quad (0.6)$$

只须取  $a_j = \frac{1}{2^j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  即可. 亦即  $\psi_{2^j}$  的中心及半径分别取为  $\omega_j = 3 \times 2^j \Delta_\psi$ ,  $\Delta_{\psi_{2^j}} = 2^j \Delta_\psi$ . 由

此看出, 当  $j \rightarrow +\infty$  时,  $\hat{\psi}_j$  的中心向 0 逼近, 而频带向低频方向移动. 因此, 由  $j$  取 0 到  $+\infty$  得到的无限个带通滤波器作用于信号的总效果, 大体上相当于一个低通滤波器. 在数学上, 我们可以把这一事实表达如下, 令  $\varphi$  满足:

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 \quad (0.7)$$

假定

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 = 1 \quad (0.8)$$

现假定  $\hat{\varphi}$  连续, 则  $\hat{\varphi}$  是一个低通滤波器. 此外我们有

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2 - |\hat{\varphi}(2\omega)|^2 = |\hat{\psi}(2\omega)|^2 \quad (0.9)$$

由 (0.8) 式不难得到

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (0.10)$$

由以上分析, 我们知道, 小波变换能将各种交织在一起的不同频率组成的混合信号分解成不相同频率的块信号. 因为我们这儿的时频是广义的, 即对不同的问题时间和频率对有不同的解释, 因而能有效地应用于如信噪分离、编码解码、检测边缘、压缩数据、识别模式以及将非线性问题线性化、非平稳过程平稳化等问题. 正是在这种意义下, 小波变换被誉为数学显微镜.

## 二、小波分析的发展史

从上面我们清楚地看到, 小波分析的思想来源于伸缩与平移方法. 小波分析方法的提出, 可以追溯到 1910 年 Haar 提出的小“波”规范正交基及 1938 年 Littlewood-Paley 对 Fourier 级数建立的  $L$ - $P$  理论, 即按二进制频率成分分组 Fourier 变换的相位变化本质上不影响函数的形状及大小. 其后, Calderon 于 1975 年用其早年发现的再生公式给出抛物型空间上  $H^1$  的原子分解, 这个公式后来成了许多函数分解的出发点, 它的离散形式已接近小波展开, 只是还无法得到组成一正交系的结论. 1981 年 Stromberg 对 Haar 系进行了改进, 证明了小波函数的存在性. 1982 年 Battle 在构造量子场论中使用了类似 Calderon 再生公式的展开. 值得注意的是, 1984 年法国地球物理学家 Morlet 在分析地震波的局部性质时, 发现传统的 Fourier 变换难以达到要求, 因此他引入小波概念于信号分析中对信号进行分解. 随后, 理论物理学家 Grossman 对 Morlet 的这种信号按一个确定函数的伸缩, 平移系  $\left\{ |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$  展开的可行性进行了研究, 这无疑为小波分析的形成开了先河.

真正的小波热开始于 1986 年, 当时 Meyer 创造性地构造出了具有一定衰减性的光滑函数  $\psi$ , 其二进制伸缩与平移  $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$  构成  $L^2(\mathbb{R})$  的规范正交基. 在那以前, 人们或许认为具有如此好性质的小波函数是一个数学神话而对其存在性发生了动摇. 事实上, Daubechies、Grossman 和 Meyer 在此之前的工作就退而研究函数  $\psi$  及数  $a_0$  与  $b_0$  使函数系  $|a_0|^{-\frac{1}{2}} \psi(a_0^{-j}t - kb_0)$  构成  $L^2(\mathbb{R})$  的框架的条件去了.

继 Meyer 提出小波变换之后, Lemarie 和 Battle 又分别独立地给出了具有指数衰减的小波函数. 1987 年, Mallat 巧妙地将计算机视觉领域的多尺度分析的思想引入到小波分析

中小波函数的构造及信号按小波变换的分解及重构,从而成功地统一了在此之前的 Stromberg、Meyer、Lemarie 和 Battle 提出的具体小波函数的构造,研究了小波变换的离散化情形,并将相应的算法——现今称之为 Mallat 算法有效地应用于图像分解与重构.与此同时, Daubechies 构造了具有有限支集的正交小波基.这样,小波分析的系统理论初步得到了建立.1988年,Arneodo 及 Grasseau 等人将小波变换运用于混沌动力学及分形理论以研究湍流及分形生长现象.1990年崔锦泰和王建忠构造了基于样条函数的所谓单正交小波函数,并讨论了具有最好局部化性质的多尺度分析的生成函数及相应的小波函数.也是1990年 Beylkin, Coifman 等将小波变换应用于算子理论.1991年, Jaffard 及 Laurencot 将小波变换应用于偏微分方程数值解,而 Wickerhanser 等将 Mallat 算法进一步深化,得到了小波包算法.其后,秦前清将小波变换作为研究分形理论的工具,并于1992年初指导刘军将小波变换运用于分形地貌制图预处理并取得了令人满意的效果.

## § 1.1 信号与系统

人们相互问讯、发布新闻、广播图像或传递数据,其目的都是要把某些信息借一定形式的信号传递出去.信号是信息的表现形式,信息则是信号的具体内容.描述信号的基本方法是写出它的数学表达式,此表达式通常是时间的函数,这种函数的图像称为信号的波形.为便于讨论,本书常常把信号与函数二个名词混用.

信号可以从不同的角度进行分类.例如:确定性信号与随机信号,周期性信号与非周期性信号,连续时间信号与离散时间信号,等等.

以下是一些典型信号的表达式:

指数函数  $f(t) = ke^{at}$  ( $k, a$  为实数).

正弦函数  $f(t) = k\sin(\omega t + \theta)$ , 称  $k$  为振幅,  $\omega$  为角频率,  $\theta$  为相位.

抽样函数  $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$ .

单位阶跃函数  $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases}$

单位冲激函数  $\delta(t)$  满足:

$$\begin{cases} \int_R \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (\text{当 } t \neq 0). \end{cases}$$

值得注意的是在广义意义下,如果  $\delta(t)$  与一个在  $t=0$  点连续(且处处有界)的信号  $f(t)$  相乘,则其乘积仅在  $t=0$  处得到  $f(0) \cdot \delta(t)$ , 其余各点乘积为 0, 于是对于函数  $\delta(t)$ , 有:

$$\int_R \delta(t) f(t) dt = \int_R \delta(t) f(0) dt = f(0) \int_R \delta(t) dt = f(0)$$

由此可知:

①  $\delta(t) = \delta(-t)$ , 即  $\delta(t)$  为偶函数.

②  $\int_R \delta(t) dt = u(t)$ , 即  $\delta(t)$  的积分等于  $u(t)$ . 反之,  $\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$ , 即  $u(t)$  的微分为

$\delta(t)$ , 其一个重要性质表现在,若函数  $f(t)$  在零点有连续导数,则有

$$\int_R \frac{d\delta(t)}{dt} \cdot f(t) dt = -f'(0)$$

为了后面介绍方便起见, 我们称满足以下条件的  $L = (f(t), T, g(t))$  叫做一个系统, 如果:

1°  $T$  是一个线性变换, 即

$$T(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) = \alpha T(f_1(t)) + \beta T(f_2(t)) = \alpha g_1(t) + \beta g_2(t) \quad \alpha, \beta \in R$$

2°  $T$  是时不变的, 即: 若

$$g(t) = T(f(t))$$

则

$$g(t - \tau) = T(f(t - \tau)) \quad \tau \in R$$

这时称  $f(t)$  为输入, 而称  $g(t)$  为输出或响应.

现设  $L = (f(t), T, g(t))$  为一个系统, 它对函数  $\delta(t)$  的响应  $h(t) = T(\delta(t))$  叫做该系统的脉冲响应. 系统的脉冲响应是刻画系统  $L$  的重要函数. 因为我们有如下事实:

设  $L$  的脉冲响应为  $h(t)$ , 则对任意的输入函数  $f(t)$ , 其输出函数  $g(t) = T(f(t))$  可表示为:

$$g(t) = \int_R f(\tau) h(t - \tau) d\tau \triangleq f * h(t) \quad (1.1)$$

对于系统  $L$ , 系统函数  $H(\omega)$  定义为

$$H(\omega) = \int_R h(t) e^{-i\omega t} dt \triangleq h(\omega) \quad (1.2)$$

这里假定  $h(t) \in L^1(R)$ , 对于  $L^2(R)$  中的函数  $f(t)$ , 因为积分  $\int_R f(t) e^{-i\omega t} dt$  不一定存在, 所以其 Fourier 变换不能用 (1.2) 式来定义, 而通常以以下方式给出. 设  $f(t) \in L^2(R)$ , 令

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t) & |x| \leq N \\ 0 & |x| > N \end{cases}$$

则  $f_N(t) \in L^1(R)$ , 因而有:  $\hat{f}_N(\omega) = \int_R f_N(x) e^{-i\omega x} dx$ . 我们定义  $f$  的 Fourier 变换  $\hat{f}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N(\omega)$ , 亦即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{f}(\omega) - \hat{f}_N(\omega)\|_2 = 0$$

一般地, 系数函数  $H(\omega)$  是复函数, 即  $H(\omega)$  有如下表示:

$$H(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)} \quad (1.3)$$

其中,  $A(\omega)$  为振幅,  $\varphi(\omega)$  为相位. 当  $h(t)$  为实函数时, 称  $L$  为实系统. 对实系统的系统函数而言, 它的振幅是偶函数, 而相位是奇函数. 即:

$$A(-\omega) = A(\omega), \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \quad (1.4)$$

此时, 若知道  $\omega \geq 0$  时的系统函数的性质, 则  $\omega < 0$  时的系统函数的性质也就知道了.

由卷积定理知, (1.1) 式可写为

$$G(\omega) = H(\omega) F(\omega)$$

即

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega) \hat{f}(\omega) \quad (1.5)$$

利用广义函数的理论, 我们有:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_R e^{i\omega t} d\omega \quad (1.6)$$