

电
动
力
学

张
泽
瑜
赵
钧

青

612

6

社

DIANDONGLIXUE

电动力学

张泽瑜 赵钧

清华大学出版社

社

电 动 力 学

张泽瑜 赵 钧

清华大学出版社

内 容 简 介

本书共分十章,包括:静电场,恒定电流的电场,恒定电流的磁场,变化电磁场的基本原理,似稳电磁场,辐射电磁场,电磁波的传播,狭义相对论的基本原理,相对论电动力学,相对论力学等。各章均有习题。书末并有数学附录和习题答案等。

本书为大学理科教材,也可作为工科院校理论物理课程的参考书,还可供其他有关科技人员参考。

2616/09

电 动 力 学

张泽瑜 赵 钧

★

清华大学出版社出版

北京 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

★

开本: 787×1092 1/16 印张: $17\frac{1}{8}$ 字数: 435 千字

1987 年 8 月第 1 版 1987 年 8 月第 1 次印刷

印数: 00001—10000

统一书号: 平装 15235·299

定价: 平装 2.90 元

精装 15235·304

精装 4.90 元

序

本书是作者在清华大学讲授多年的电动力学讲义的基础上补充修改而成的。理工科大学中初学电动力学的学生首先遇到的是数学上的困难,如对矢量分析、偏微分方程、特殊函数等方面不熟悉,因此常常把注意力集中在数学上而忽略了电动力学中的基本物理概念。有鉴于此,在编写本书时作了如下考虑:

1. 本书系统基本上按照电磁学发展次序安排,前七章主要讨论麦克斯韦方程,从静电场、静磁场开始逐步建立此方程,这样比较符合认识规律,由浅入深,由局部到全面。后三章讲狭义相对论,一方面对宏观电动力学从时空观的高度上作了总结,另一方面处理了高速带电粒子和高速物体的运动规律。有的专业,不需要学习相对论,那么只要学前七章就够了。

2. 本书着重于一些基本物理概念的讨论,如关于电磁场的基本性质和相对论时空观等问题。静电场中的标量势通常给予明确的物理意义,但对静磁场中常用的库仑规范矢量势 A 则不讨论其物理意义,作者在这方面给予了研讨,并由此得出法拉第电磁感应定律,本质上反映了动量转化和守恒定律。

3. 把宏观电动力学和低速的微观电动力学结合起来讲。比如在讲比-沙定律以及宏观电流的辐射场时同时得出了低速带电粒子产生的磁场和辐射场。把宏观与微观结合起来可以使学生更注意物理图象。电介质和磁介质中电磁场方程组的建立和解法也采用了物理模型和图象,这样可以避免学生只得到一些数学上的结论。

4. 本书作为一本理工科大学的教材,内容比较注意联系实际,如静电场和静磁场的解法;光的电磁理论,其中讨论了薄膜干涉;与电工学有关的路的问题,自感系数和互感系数的计算与趋肤效应;高频下物质导电率、介电常数、折射系数与低频下的不同,以及长导线输电线路,波导管和粒子碰撞等问题。

5. 为了减少学生在数学上和做题的困难,本书在附录中写了文中需用的这方面的知识,在教材中也举了较多的例子说明解题方法。解题时也让学生注意一些物理概念,如从介质的极化考虑如何设置电像。由于学时原因,特殊函数用得较少,只限于一些能说明原理应用的典型问题,在解题方法方面感兴趣的学生可以参考有关的书籍。

6. 本书中的公式推导写得比较详细,讲课时有的可以略去,让学生自学。书末附有习题答案。

7. 由于工程书上已通用 SI 制,本书也采用该制,但 CGS 制仍常见于物理书中,附录中对这两种单位制作了比较详细的介绍和换算。

由于作者学识水平有限,错误之处难免,希望读者批评指正。

张连芳同志协助做了部分答案,特此致谢。

作者: 张泽瑜 赵 钧

一九八五年六月 于清华大学

目 录

前言	1
第一章 静电场	3
§1.1 库仑定律和叠加原理	3
§1.2 静电场的基本性质	7
§1.3 电位展开、电偶极子和电四极子	11
§1.4 真空中静电场微分方程组	14
§1.5 静电场中有导体时解的唯一性定理	19
§1.6 电象法	22
§1.7 用微分方程法求区域电场	24
§1.8 介质的极化	30
§1.9 介质中的静电场方程组	33
§1.10 电场能量	39
§1.11 静电场中的应力张量	44
思考题与习题一	48
第二章 恒定电流的电场	52
§2.1 恒定电流的实验定律	52
§2.2 恒定电流电场方程组	56
习题二	60
第三章 恒定电流的磁场	61
§3.1 比-萨定律、安培定律及其微观形式	61
§3.2 静磁场的矢量势及其物理解释	63
§3.3 小电流圈与电偶极子的相似性、磁偶极矩	67
§3.4 真空中恒定电流磁场微分方程组	70
§3.5 介质的磁化、磁化电流	72
§3.6 有磁介质存在时的磁场微分方程组	75
§3.7 假想磁荷	79
*§3.8 磁镜象法	80
*§3.9 磁场问题的一般解法	82
§3.10 电流圈在外磁场中的“势能”和受力	82
§3.11 静磁场中的应力张量	84
思考题和习题三	85
第四章 变化电磁场的基本原理	88
§4.1 法拉第电磁感应定律和它的微分形式	88
§4.2 运动导体中的法拉第电磁感应定律	89

§4.3 位移电流假说	91
§4.4 麦克斯韦电磁场方程组	94
§4.5 推迟势	96
§4.6 静磁场能量	102
§4.7 能流密度矢量	103
§4.8 普遍动量守恒定律和法拉第电磁感应定律的解释	106
习题四	109
*第五章 似稳电磁场	110
§5.1 似稳条件	110
§5.2 似稳电磁场方程组	110
§5.3 线圈的自感、互感系数与磁场能量的关系	111
§5.4 线性导线中的似稳现象	115
§5.5 趋肤效应	117
习题五	119
第六章 辐射电磁场	120
§6.1 辐射电磁场	120
§6.2 电偶极辐射	123
§6.3 磁偶极辐射和电四极辐射	125
§6.4 低速运动电荷的辐射场	128
§6.5 辐射阻尼力、电子低速运动方程、电磁质量	132
§6.6 谱线的自然宽度	136
习题六	140
第七章 电磁波的传播	143
§7.1 在理想绝缘介质中的平面电磁波	143
§7.2 单色平面电磁波在介质交界面上的反射和折射	149
*§7.3 全反射	158
*§7.4 电磁波的衍射	160
§7.5 在导体中传播的平面电磁波	165
§7.6 电磁波在金属面上的垂直照射、光压	167
§7.7 沿理想输电线传播的横电磁波	170
§7.8 在矩形波导管中传播的纵横波	174
§7.9 电导率和介电常数与频率的关系	179
习题七	185
第八章 狭义相对论的基本原理	187
§8.1 狭义相对论产生的历史背景	187
§8.2 狭义相对论的基本假设	189
§8.3 洛伦兹变换	191
§8.4 由洛伦兹变换得到的几个结论	193
§8.5 速度和加速度的洛伦兹变换	196

[附录]: 关于时间相对性的一些疑问的讨论	198
§8.6 四维空间的矢量和张量、物理方程的协变性	202
思考题和习题八	205
第九章 相对论电动力学	207
§9.1 电量守恒与四维电流密度矢量	207
§9.2 四维势矢量	208
§9.3 电磁场张量、麦克斯韦方程的协变形式	209
§9.4 等速运动电荷的电磁场	211
*§9.5 电磁场能量动量张量、电磁系统能量动量守恒定律的协变形式	213
*§9.6 任意运动电荷的电磁场	215
[附录] 运动电荷的电磁场	217
*§9.7 高速运动电荷的辐射	220
*§9.8 辐射的频谱分析	223
思考题和习题九	225
第十章 相对论力学	227
§10.1 相对论动力学方程	227
§10.2 质能联系定律	228
§10.3 四维动量、能量动量守恒定律	230
§10.4 能量、动量守恒定律的应用举例	231
§10.5 相对论动力学方程的协变形式	234
习题十	235
数学附录	237
§1. 矢量分析	237
§2. 并矢量	243
§3. 柱坐标和球坐标中的 ∇ 算符	245
§4. δ 函数	248
§5. 台劳级数展开式	249
§6. 傅里叶积分	250
§7. 高斯单位制	253
习题答案	259

时间不够时, 可略去打“*”号内容。

前 言

电动力学是电磁学的继续，是从场的观点进一步讨论电磁现象及带电粒子运动的学科。

对于电荷之间或磁铁之间的相互作用，在历史的发展中持有两种对立的观点，即超距作用和近距作用的观点。

超距作用观点认为两个电荷之间的引力或斥力只发生在两个电荷上，而在电荷周围的空间不会发生任何变化。电磁作用力可以超越时间与空间从一个带电体出发直接过渡到另一带电体上。

近距作用观点的电磁理论首先由法拉第提出，以后由麦克斯韦发展加以完成，现在称之为“场的作用”理论。这个理论的核心是：“物质不能在它们不存在的地方发生相互作用”。电荷（或磁铁）之间所存在的作用力不是发生在相互离开的电荷（或磁铁）之间，而是发生在电荷（或磁铁）及与之接触的电场（或磁场）之间，近距作用也就是接触作用。根据这种理论，电荷（或磁铁）周围充满了电场（或磁场）的物质。

从近代实验的结果也可以得到近距作用观点正确性的结论。众所周知，电磁讯号以光速传播，它的传播需要时间。设想有一个电磁讯号发生站 A 与一个与之相距有一定距离的接收站 B 。在 A 站发出一脉冲讯号，当它还未到达 B 站时，此讯号已在 A 处熄灭。在此时刻， A 站和 B 站都无电磁讯号，但过一段时间， B 站收到一电磁讯号，也即收到一个电磁能量或动量。从持超距作用观点者看来，这是无法理解的现象，如果讯号在空间传播时，空间没有能量或动量，那么当 B 站接收到讯号时，能量或动量就将被解释成无中生有，这是违反能量守恒或动量守恒的基本原理的。从近距作用论很容易理解这一点， A 站发出的能量或动量传播到场中，再由场传递到 B 站。

因此在本课程中一开始就假定电磁场是一种物质，它具有动量和能量的物质特性。我们还进一步揭露了电现象与磁现象之间的密切联系。变化的电场总是伴随着变化磁场同时发生，它们可以脱离电荷源单独存在，在电磁波中电场和磁场是相互联系而又不断转化的矛盾的两个方面，麦克斯韦电磁场方程组总结了电磁场的运动规律。

本课程中我们先分别处理电场和磁场所特有的实验规律，再从场的相邻各点的联系上及时间先后的联系上建立场的微分方程组，即麦克斯韦方程组，然后讨论电磁波的运动规律也包括光的传播规律在内。

发生在电工设备中的一切过程，其基础总是电、磁场之间的转换和电荷和场相互作用的过程。这些过程可以用更简单的积分量（电压、电流、功率、磁通等）来表述。这时我们不研究场而只用这些积分量之间的关系来代替场方程，这就归结为“路的理论”。但是在许多现象中，甚至在单纯的电工问题中求解，有时也必须以场的研究为基础。在微波及光的传播理论中，电磁场的理论是必不可少的基础。

本课程还介绍了狭义相对论，这是电动力学发展的必然结果，同时也从时空观的高度上总结了电磁场，由此可以容易地将低速运动电荷粒子的规律推广到高速运动电荷粒子上去。还导出了高速物体的动力学规律。

第一章 静 电 场

学习本章的目的就是要阐明静电场的基本性质；把高等数学与物理结合起来，表述静电场的问题的一些基本方法；学好静电场也为学好以后各章打好基础。

§ 1.1 库仑定律和叠加原理

一、库仑定律

实验指出真空中两个静止点电荷之间的相互作用力为（见图 1.1）：

$$f_2 = k_1 \frac{q_1 q_2}{R^2} \mathbf{R} = -f_1 \quad (1.1)$$

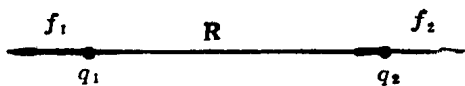


图 1.1

k_1 是由 (1.1) 式中所选单位而定，在国际单位制 (SI 制) 中用米、千克、秒、安培为单位。实验得出：

$$k_1 = 8.988 \times 10^9 \text{ 牛顿} \cdot \text{米}^2 / \text{库仑}^2 \quad (1.2)$$

为了在以后公式中不出现 4π 常数，可令

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_1} = 8.854 \times 10^{-12} \text{ 库仑}^2 / \text{牛顿} \cdot \text{米}^2 \quad (1.3)$$

ϵ_0 称为真空介电常数。库仑定律的标量式为：

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \quad (1.4)$$

二、叠加原理

实验指出，如点电荷 q_0 同时受到许多点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 的作用，则 q_0 所受的合力 f_0 为各电荷 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 单独存在时对 q_0 的作用力 $f_{0i} (i=1, 2, \dots, n)$ 的矢量和：

$$f_0 = \sum_{i=1}^n f_{0i} \quad (1.5)$$

库仑定律和叠加原理是宏观实验的结果，对微观电荷也成立。条件是：(1) 粒子速度远小于光速；(2) 粒子间距离可以近到 10^{-18} 米时，库仑力仍然有效。

三、点电荷、体电荷、面电荷和线电荷

(1.1) 形式的库仑定律只用于点电荷，实际问题中常见到大块电荷的分布，根据不同

情形,可把它们看作体电荷、面电荷和线电荷,分述如下:

点电荷 库仑定律中所指的点电荷在宏观电动力学中并不表示一个没有大小的几何点的电荷,它是实际问题的抽象。如果两个带电体相隔的距离远大于每个带电体本身的线度,那么在求这两个带电体之间的静电作用力时便可把它们视作点电荷来处理。比如说,如果有必要去决定两颗恒星间的静电力,就可以把每个恒星的总电荷视作点电荷;相反,如果求两个半径为 0.1 厘米相距 0.5 厘米带电小球间的静电力,就不能把它们作为点电荷处理,此时当使用公式 (1.1) 去求力时,必须使用体电荷分布的概念。

体电荷密度 在处理宏观带电体的作用力时,可以把此带电体分成许多小体积元 $\Delta\tau$, 如果 $\Delta\tau$ 与带电体体积相比非常小,而内部带电粒子又非常多,则 $\Delta\tau$ 称为物理无限小体积,用 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 表示。在电荷所在处的空间取小体积 $\Delta\tau$, 其中所包含的电荷为 Δq , 则该处的体电荷密度为

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau} \quad (1.6)$$

这里 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 就是体积趋于物理无限小体积,而不是数学上的零,由于 $\Delta\tau$ 内包含了许多带电粒子,因而在宏观电动力学上认为 ρ 是一个连续分布的空间函数。如研究电子管空间电荷分布,可用体电荷密度 ρ 来描述。

面电荷密度 如果我们考虑带电导体的电荷,这种电荷都处在导体表面层,这个表面层的厚度通常是很小的,例如不超过几十个分子的厚度,在宏观问题中通常没有必要去考虑这个薄层内的电荷分布,可以用面电荷密度 σ 来表示导体表面某处的电荷分布:

$$\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \quad (1.7)$$

Δs 是导体表面上一块厚度为 δ 的薄层的面积元。 $\Delta s \rightarrow 0$ 也表示物理无限小的面积元, Δq 是指该表面层内的电量, σ 当然也被视作空间位置的连续函数。如果要求该表面层内体电荷密度,则 ρ 与 σ 的关系式为:

$$\rho = \frac{\sigma \cdot \Delta s}{\Delta s \cdot \delta} = \frac{\sigma}{\delta} \quad (1.8)$$

由于 δ 很小, σ 为有限值,故 ρ 值很大,通常在面电荷分布中不用 ρ 值,而用 σ 。

线电荷密度 当研究一根带电细导线与点电荷之间的作用力时,点电荷与导线之间的最短距离如远大于导线的直径,则可以认为导线上的电荷分布为线电荷分布,定义单位长度上所带的电量为线电荷密度,用 η 表示:

$$\eta = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad (1.9)$$

Δq 为长度 Δl 的线段元上的电荷。如导线的截面为 Δs , 则导线上的平均体密度 ρ 与线密度 η 的关系为:

$$\eta = \frac{\rho \cdot \Delta s \cdot \Delta l}{\Delta l} = \rho \Delta s \quad (1.10)$$

有了体电荷密度的概念就可以用库仑定律和迭加原理求带电体与点电荷之间的作用力了。如电荷分布在体积 τ 内,则可将 τ 分成许多小体积元 $d\tau'$ (见图 1.2), $d\tau'$ 的位置在 $\mathbf{r}'(x', y', z')$, q_0 的位置在 $\mathbf{r}(x, y, z)$, $\mathbf{R}$ 为 $d\tau'$ 与 q_0 之间的位移:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k}$$

$$R = |\mathbf{R}| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}$$

根据库仑定律, $d\tau'$ 内的电荷对 q_0 的作用力为:

$$df_0 = k_1 \frac{q_0 \rho(\mathbf{r}') \mathbf{R}}{R^3} d\tau'$$

再由叠加原理:

$$f_0 = \int_{\tau} df_0 = \int_{\tau} \frac{k_1 q_0 \rho'}{R^3} \mathbf{R} d\tau' \quad (1.11)$$

式中 ρ' 为 $\rho(\mathbf{r}')$ 的简写, 表示 ρ' 只与 x', y', z' 有关, 与 x, y, z 无关。由于 x', y', z' 为积分流动坐标, 故对 $d\tau'$ 的积分结果, f_0 只是 q_0 的位置 $P(x, y, z)$ 的函数, 而与 x', y', z' 无关。

当带电体为面电荷 $\sigma(x', y', z')$ 分布时, 与 (1.11) 式有相似结果:

$$f_0 = \int_s \frac{k_1 q_0 \sigma'}{R^3} \mathbf{R} ds' \quad (1.12)$$

[例] 一块均匀带电的薄圆板,

厚度为 a 、半径为 b ($a \ll b$), 体电荷密度为 ρ , 在与圆板垂直的中心轴线上有点电荷 q_0 , q_0 与板的中心 O 的距离为 z , 求圆板电荷对 q_0 的作用力 f_0 (见图 1.3)。

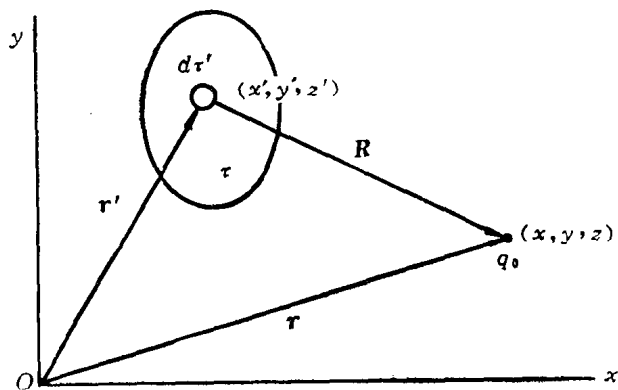


图 1.2

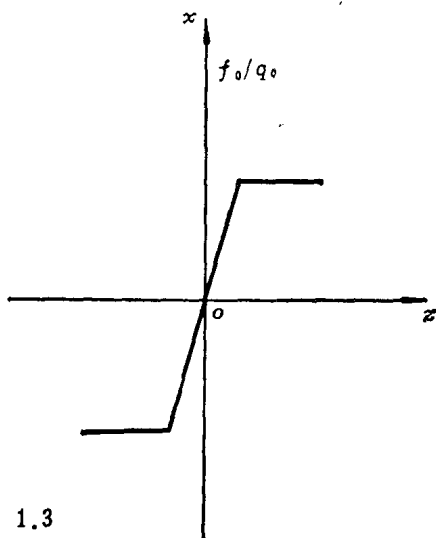
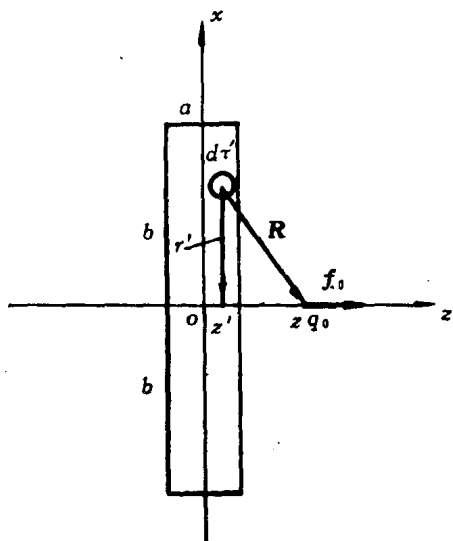


图 1.3

解: 取柱坐标 (r, θ, z) ,

$$d\tau' = r' dr' dz' d\theta'$$

由 (1.11) 可得 f_0 的方向沿 z 轴, 大小为

$$f_0 = k_1 q_0 \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{(z - z') r' dz' dr' d\theta'}{[r'^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

积分后得:

$$\frac{f_0}{q_0} = 2\pi k_1 \rho \left\{ \left| z + \frac{a}{2} \right| - \left| z - \frac{a}{2} \right| - A \right\} \quad (1.13)$$

式中: $A = \left[\left(z + \frac{a}{2} \right)^2 + b^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\left(z - \frac{a}{2} \right)^2 + b^2 \right]^{\frac{1}{2}}$
 $= R_1 - R_2$

式中 R_1 和 R_2 为 q_0 到圆盘边缘上最远点 1 和最近点 2 的距离 (见图 1.4)。下面讨论 q_0 从远离圆盘位置移向 O 点过程中 f_0/q_0 值的变化:

1) 当 $z \gg b$ 时 (图 1.4), $R_1 - R_2 \simeq a \cos \alpha$, 由 (1.13)

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{q_0} &\simeq 2\pi k_1 \rho (a - a \cos \alpha) = 2\pi k_1 \rho a \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &\simeq k_1 \pi b^2 a \rho / z^2 = k_1 q / z^2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

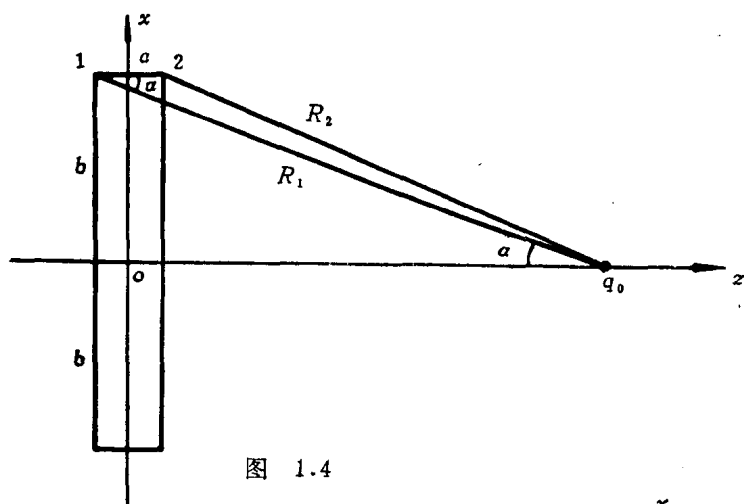


图 1.4

上式中用了当 α 小时, $\sin(\alpha/2) \simeq \alpha/2$, 而 $a \simeq b/z$ 。 q 为圆盘总电荷。(1.14) 式说明当 q_0 远离圆盘时, 可把圆盘电荷看作在原点的电荷。

2) 当 $a/2 < |z| \ll b$, 即当 q_0 距圆盘近时 (图 1.5), 当 $z \simeq a/2$, $R_1 - R_2 \simeq a \sin \beta$, 由 (1.13) 可得

$$\frac{f_0}{q_0} \simeq 2\pi k_1 \rho a (1 - \sin \beta)$$

而 $\tan \beta \simeq a/b$, 所以 $\sin \beta \simeq a/b$, 当 $a \ll b$ 时, 与 1 相比略去 $\sin \beta$, 所以

$$\frac{f_0}{q_0} \simeq 2\pi k_1 \rho a = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.15)$$

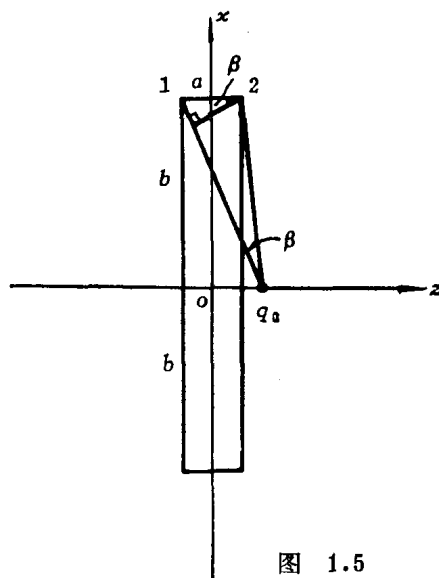


图 1.5

σ 为圆盘面电荷密度。上式表明: 对于一个有面电荷分布的圆盘, q_0 在圆盘附近处改变位置, f_0 之值不变, 此值只与 σ 有关, 与 b 值无关, 如圆盘的半径为无限大, 则 $f_0/q_0 =$

$\sigma/2\epsilon_0$ 。

3) 当 $z=0$ 时, 即 q_0 处于圆盘中心时, $f_0=0$ 。此结果显然, 因 q_0 左右两方的电荷对它的作用力抵消。

4) 当 q_0 处于 $-z$ 轴上时, 则 $f_0(z) = -f_0(-z)$ 。值得注意的是 q_0 从圆盘一个表面上改变到另一个表面上, f_0 之值改变 σ/ϵ_0 。

根据以上讨论, 有如下结论:

一个面电荷分布的电荷, 当 q_0 离它远时, 面电荷可以作为点电荷处理; 当 q_0 在它的表面附近时, 面电荷面积可以作为无限大处理; 当 q_0 进入到面电荷内部, 面电荷必须当体电荷处理; 在面电荷两旁, f_0/q_0 有一跃变 σ/ϵ_0 ; 即使当面电荷厚度 $\delta \rightarrow 0$ 时, $\rho \rightarrow \infty$, 在内部 f_0 也为有限, 并且 f_0 连续改变。把面电荷作为体电荷的极限分布处理, 这种方法以后要用。

§ 1.2 静电场的基本性质

静止电荷周围存在着电场, 这种电场称为静电场, 它有些什么基本性质呢?

一、电场强度

电场的一个最重要的基本性质是在电场中的一个静止电荷 q_0 会受到电场对它的作用力 f_0 , 只要 q_0 很小, 移入电场时不影响外部电荷分布, 则在同一地点 f_0/q_0 为一常数, 这个常数称为该点场强的值, 场强用 E 表示:

$$E = f_0/q_0 \quad (2.1)$$

由库仑定律可知, 点电荷 q 在距它 R 处的场强为:

$$E = k_1 \frac{qR}{R^3} \quad (2.2)$$

由库仑力的叠加原理很易得到场的叠加原理, 所以把上式推广到体电荷和面电荷分布的情形, 便有:

$$E = k_1 \int \frac{\rho' R}{R^3} d\tau', \quad E = k_1 \int \frac{\sigma' R}{R^3} ds' \quad (2.3)$$

在积分区域不标明时, 是指全部空间。当然无 ρ 与 σ 的地方, 积分无贡献, 只有当全部空间电荷分布都知道后, 才能确定该点场强的值。由 (2.3) 可知, 表示场“源”的位置变量已被积掉, E 只是场点位置的函数。

二、电位

由库仑定律决定的静电场强有另一个重要的特性, 就是静电场对移动电荷 q_0 做功 ΔW , 只决定于初始和终止位置, 而与移动路径无关。证明如下: 电场对电荷 q_0 所做的功 (图 1.6)

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_A^B q_0 E \cdot dl, \quad \because dl = dR \\ \therefore \Delta W &= k_1 \int_A^B q_0 q \frac{R}{R^3} \cdot dR \end{aligned}$$

$$\because R^2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \quad \therefore dR^2 = d(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})$$

$$\text{即 } R dR = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta W &= k_1 q q_0 \int_A^B \frac{dR}{R^2} \\ &= k_1 q q_0 \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

此功只与 A, B 位置有关, 与路径无关, 故可定义某点的电位 Φ 为将单位正电荷从该点移至无限远处静电力所做的功, 另一种说法是将单位正电荷从无限远处移到该点, 外力克服静电力所做的功。由 (2.4) 式可知, 一个点电荷 q 在 A 点所产生的电位可令 $R_B = \infty, R_A = R$, 得

$$\Phi = \frac{\Delta W}{q_0} = k_1 \frac{q}{R} \quad (2.5)$$

体电荷分布的电位是点电荷电位的叠加:

$$\Phi = k_1 \int \frac{\rho' d\tau'}{R} \quad (2.6)$$

电位与场强有如下的关系: 由 (2.6)

$$\begin{aligned} \nabla \Phi &= \nabla \int k_1 \frac{\rho' d\tau'}{R} = k_1 \int \rho' \nabla \frac{1}{R} d\tau' = -k_1 \int \frac{\rho' \mathbf{R}}{R^3} d\tau' = -\mathbf{E} \\ \therefore \mathbf{E} &= -\nabla \Phi \end{aligned} \quad (2.7)$$

这是 $\mathbf{E}, \Phi$ 的微分关系式, 可以由 Φ 求出 $\mathbf{E}$ 。反过来也可以由 $\mathbf{E}$ 求 Φ :

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= - \int_A^B (\nabla \Phi) \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ &\quad \cdot (i dx + j dy + k dz) \\ &= - \int_A^B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) = - \int_A^B d\Phi \\ &= \Phi_A - \Phi_B \end{aligned} \quad (2.8)$$

即由 A 点到 B 点场强的线积分之值等于 A 点电位与 B 点电位的差值。

在 (2.5) 式中, 我们实际上已选择了无限远处的电位为零, 当电荷集中在有限区域内时 (实际电荷分布都是如此), 无限远处构成一个等位区, 可以选定电荷分散在无限远处的位能为零, 即处于零电位, 这在以后计算电荷系的能量时有其优越性。

在电动力学问题中, 有时会遇到与地球有关的问题, 如带电体接地, 或者放在地球表面附近但不接地等情形。地球可以被认为是一个半径很大的导体球, 它的电容可认为是无限大, 地球上电量的改变 (如宇宙射线对它照射) 都不会影响地球电位的改变, 任何带电导体接地后, 带电体与地球间可以交换电量, 也不影响地球电位, 因此带电导体接地后总认为它的电位与地球的恒定电位相同。另外一个问题是地球的实际电位究竟有多大? 在电动力学中是这样处理这个问题的, 地球上虽带有一定数量的电荷, 但是由于它的电容大, 分布在地球表面的面电荷密度甚小, 它在地表面附近的电场也很小, 可以近似认为地球不带电, 并且由于地球的半径很大, 认为地球与无限远相接, 即认为地球为零电位, 因此任何接地导体都认为是

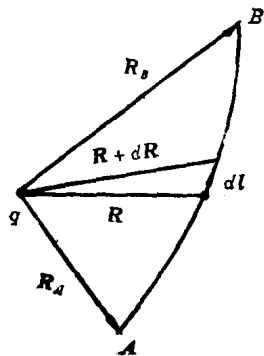


图 1.6

于零电位，虽然此时带电体上的电荷可以发生改变。另一种情形是如果带电导体放在地球表面附近而又不接地，这时带电导体的电位不能视作零，而地球的电位始终为零，地球可以认为是一个很大的具有零电位的导体放在带电体的附近，在地球靠近带电体的地面上会感生出电荷分布来，这样会影响带电体原来的电场分布。在所有以上的考虑中都认为地球是不带电的，如果要进一步考虑地球带电的情形，则可以用叠加原理来处理，在所考虑的问题中都有一个由地球表面带电所产生的微弱的均匀电场的存在，这个电场垂直于地球表面，在以后的问题中，如无特殊声明，通常都忽略这个静电场。

三、奥高定理

静电场除了上述的在封闭回路上做功为零的特性外，还有一个关于在封闭面上积分的定理，这就是奥高定理。在电场中通过 ds 面积元的电通量 dN 被定义为

$$dN = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.9)$$

根据库仑定律可以证明：通过任何一个闭合面 s 的电通量等于该封闭面内所含电量的 $\frac{1}{\epsilon_0}$ 倍，而与封闭面外的电量无关。用式子表示为：

$$N = \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i q_i / \epsilon_0 \quad (2.10)$$

式中 $d\mathbf{s}$ 的方向是指封闭面的外法线方向。

[证明] 设封闭面 s 内有电荷 q_1 ，外面有电荷 q_2 (见图 1.7)。

$$N = \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = k_1 \oint_s \frac{q_1 \mathbf{R}_1}{R_1^3} \cdot d\mathbf{s} + k_1 \oint_s \frac{q_2 \mathbf{R}_2}{R_2^3} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.11)$$

因

$$\frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} \cdot d\mathbf{s} = \frac{ds \cos \theta_1}{R_1^2} = d\Omega_1$$

同理

$$\frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \cdot d\mathbf{s} = \frac{ds \cos \theta_2}{R_2^2} = d\Omega_2$$

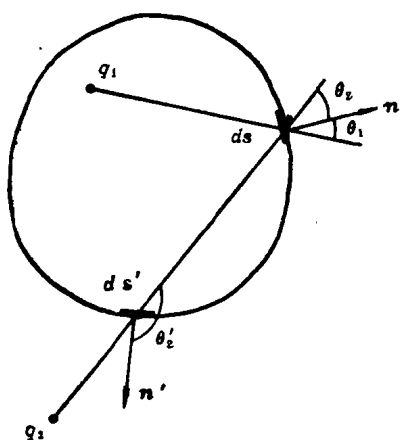


图 1.7

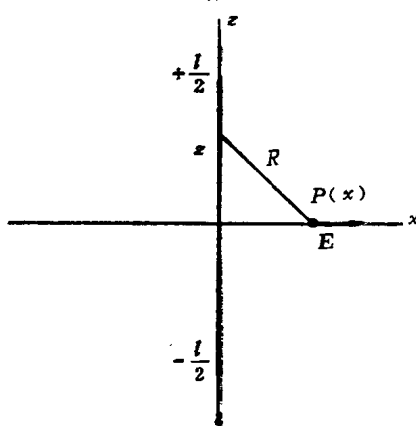


图 1.8

$d\Omega_1$ 为 ds 面积元对 q_1 点所张的立体角， $d\Omega_2$ 为 ds 面积元对 q_2 点所张的立体角。但易知

$$\left. \begin{aligned} \oint_s \frac{\mathbf{R}_1 \cdot d\mathbf{s}}{R_1^3} &= \oint_s d\Omega_1 = 4\pi \\ \oint_s \frac{\mathbf{R}_2 \cdot d\mathbf{s}}{R_2^3} &= \oint_s d\Omega_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

而

第二式所以为零是因为 q_2 点在 s 面外, $d\mathbf{s}$ 与 q_2 点所张的立体角 $d\Omega_2$ 和 s 面相交时还有一交界面 ds' , 它与 q_2 所张的立体角为负值 (由于 $\cos\theta_2'$ 为负值), 因此 (2.12) 式成立。将 (2.11) (2.12) 代入 (2.10) 得

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = k_1 \cdot 4\pi q_1 = q_1/\epsilon_0$$

以上证明可以推广到电荷体密度分布。奥高定理可以应用于一些具有对称性电荷分布情形中求电场。

[例1] 一根长度为 l , 线电荷密度为 η 的导线, 求在它中垂线上离其距离为 x 的点上的电位和场强。讨论 $l \gg x$ 的情形。

解: 由对称性可知 P 点的场强沿 x 轴方向 (见图 1.8), 先求电位 Φ , 再对 x 微分即得场强。

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{k_1 \eta dz}{R} = k_1 \eta \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz}{(z^2 + x^2)^{1/2}} \\ &= k_1 \eta \ln \frac{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + x^2} + \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + x^2} - \frac{l}{2}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{当 } l \gg x \text{ 时: } \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + x^2} \simeq \frac{l}{2} + \frac{x^2}{l}$$

$$\therefore \Phi \simeq 2k_1 \eta \ln l - 2k_1 \eta \ln x = -2k_1 \eta \ln x + C$$

$$\text{其中 } C = 2k_1 \eta \ln l \quad (2.14)$$

$$\therefore E = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2k_1 \eta}{x} \quad (2.15)$$

上式所给出的 E 值与导线长度 l 无关, 这是在 $x \ll l$ 的情形下求出的。如果问题是这样提出: 求一根线电荷密度为 η 的无限长导线在 P 点的场强与电位, 求场强可利用奥高定理, 通过 P 点作一以 z 为轴的圆柱面, (图 1.9) 柱高为 d , 半径为 x 。由于圆柱面上各点的 E 值都在径向方向且大小相等, 即 $E = E r_0$, r_0 为单位径矢量, 由奥高定理

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \eta \frac{d}{\epsilon_0}$$

即

$$2\pi x d \cdot E = \eta \frac{d}{\epsilon_0}$$

故

$$E = \frac{2k_1 \eta}{x}$$

此结果与 (2.15) 相同。

$$\text{再求 } \Phi: E = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \text{故 } \Phi = -\int E dx$$

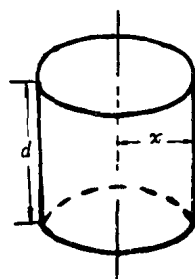


图 1.9