С.Д. 沃尔科夫

强度统计理论

科学出版社

强度統計理論

C. Д. 沃尔科夫 著

吳学藺 译

科学出版社

С. Д. ВОЛКОВ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ

Машгиз, 1960

內 容 簡 介

强度的統计理论，考慮到由工业材料組織不均勻性主要影响的一些現象(破裂过程、尺度效应等)的情况，综合了机器和结构零件强度的各种新的計算方法。这些新方法的特点是采用数学統计及概率概念。本书探討了这种新的强度理论及其在机械工业上的实际应用。本书可供机械师、金属学家和从事研究一般强度問題以及实际計算和試驗研究材料、机器和结构零件等强度的設計师閱讀。

强度統计理论

[苏] С. Д. 沃尔科夫 著

吳学蘭 译

*

科学出版社出版
北京朝阳門内大街 117 号
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1965 年 10 月第一版　开本：850×1168 1/32
1965 年 10 月第一次印刷　印张：5 11/16
印数：0001—4,000　字数：146,000

統一书号：15031·208
本社书号：3317·15—3

定价：[科七] 1.00 元

譯者序

強度统计理论与经典力学和材料力学处理強度问题的方法不同，考虑到材料的微观组织不均匀性及其对机械、力学性能的影响，用统计和概率的观点进行強度计算．从性质论，它介于宏观现象理论与微观分子理论之间．从实际应用来说，它可以圆满解释很多工程用的強度理论 I, II, III, IV 所不能解释的问题．从它推导出来的塑性变形准则及破裂准则（包括各种不同应力状态下的一次载荷及循环载荷）远较现时工程用的強度理论所推导出的更符合于试验数据．它可以将微观研究的结果具体用于強度计算与工程设计．因而它对正确选择材料，确定机器零件与结构的安全系数，节约材料，提高机器、构架的使用寿命，具有十分重大的意义．

強度统计理论仅有二十多年的历史，其应用范围还不够广泛．本书系作者 C. Д. 沃尔科夫根据多年的研究成果编写的．他在早年阿凡纳西也夫等人工作的基础上做了进一步的概括推广．我国无论在研究、教学或具体设计工作方面強度统计理论都还沒有很好地开展．国內对这方面的文献资料介绍亦较少．我在 1962 年利用治病疗养的时间将该书译出供強度研究及机械设计工作者和与此有关的教学工作者参考用．

本书先后经过单藩圻、秦曾志、吳士科同志校阅，特别是秦曾志同志做了全面精细校阅修改，谨致衷心的谢意．若干译名国内还沒有公认的统一标准，其他地方也恐有不妥之处，希读者予以批评指正．

譯 者

1964 年 11 月

序　　言

在瑞典的维布尔（Weibull，于1939年），苏联的阿凡纳西也夫（Афанасьев，于1940年），康托罗娃和弗兰凯尔（Конторова，Френкель，于1941年）各自发表的一系列文章中，奠定了強度统计理论研究的基础．以后，这新的理论引起了许多研究工作者的特别注意．列宁格勒的达维琴柯夫（Давиденков）、巴什柯夫（Пашков）、维德曼（Витман）、谢万金（Шевандин）、切楚林（Чечулин）等，莫斯科的列宾杰尔（Ребиндер）、谢林生（Серенсен）、弗里特曼（Фридман）、斯尼特科（Снитко），乌拉尔的雅库托维奇（Якотович）、巴甫洛夫（Павлов）、柯列斯尼柯夫（Колесников）、雷巴尔科（Рыбалко）等，以及西伯利亚的库兹涅佐夫（Кузнецов）、瓦西里也夫（Васильев）等的工作，对強度统计理论的发展有很大影响．

Н．Н．阿凡纳西也夫对新理论的研究和推广起了很大作用．在他的专著"金属疲劳強度统计理论"（1953年苏联乌克兰科学院出版社出版）里，基本上综述了1946年以前所完成的疲劳理论方面的研究工作．从那时起，在各种杂志上又发表了新的论著．其中许多论著越出了最初的理论范畴，因为，其中有些论著是解决变形介质统计力学方面问题的．本书试图在工业用材料的新模型的基础上对上述论著进行总结推广，以说明微观不均匀介质是怎样的．

研究強度统计理论的所以必要是由于下列的主要原因：

1．当材料在载荷作用下的性能主要取决于其组织的场合下，在工程计算方法的可能性与实践要求之间存在抵触．随着减低过高的安全系数、减轻机器和结构的重量、更好地利用工业用材料，这种有抵触的地方日益增多．问题在于，按照固有的传统习惯，工程计算方法是建立在完全沒有微观组织的材料（弹性和塑性理论

的理想均匀介质)的模型的基础上的. 在有些文献[1-5]里已一再指出了这种缺点.

2. 从定量理论的观点来说，微观组织的主要特点是：由于结晶体和其他组织组分(例如：珠光体、马氏体、索氏体组织)的形状和取向是多种多样的,微观组织的机械性质和状态的所有特性(包括弹性常数,应力和变形)有很明显的统计特性. 因此,统计方法在工程方面获得了愈益广泛的应用，不仅用在产品质量的大批检验[6,7],钢轨破裂的统计分析[8]，疲劳试验结果的处理[9-11]，而且用在強度理论[12-21].

3. 強度统计理论介于材料的机械性能的分子理论与现象理论之间. 強度统计理论的研究将有助于进一步把物质的亚微观性质的研究结果用于強度计算. 这些性质的研究，主要是根据位错理论来进行的[22-27].

虽然強度统计理论的基础的研究已有相当成就[12-21]，但是強度统计理论的实际应用，大都是限于定性地说明在脆性静态破裂时的尺度效应[15-21]、在疲劳破裂时的尺度效应[19-20],论证工程用塑性准则等问题的狭窄的范围內. 如果考虑到上述文献中的材料的模型是不够完善的话，这就不难理解. 他们只注意到了组织的不均匀性,而沒有考虑材料的另一个基本性质——材料的连续性,即在各个方向抵抗外载荷的能力. 应用更完善的材料模型，可以大大地扩大強度统计理论问题的范围[30-38]，以致能概括弹性和塑性理论的某些经典问题[39].

由于原始模型的性质决定着整个理论范畴，本书內容的阐述就从描述工业用材料(微观不均匀介质)的新模型开始.

作者谨向 Ю. Н. 拉包特诺夫 (Работнов) 院士和 А. Н. 柯尔莫高罗夫 (Колмогоров) 院士对本书內容提出宝贵意见而深表谢意.

目　　录

第一章　微观不均匀介质

1. 微观不均匀的綫弹性介质

数学点和物理点　多晶体结构、化学成分的局部波动、引起材料机械性能波动的其它因素和从而造成的应力场的局部扰乱，总称为“不均匀性”. 其线尺寸与整个被研究物体的尺寸具有同一数量级的不均匀性，属于“宏观不均匀性”. 这样的材料称为“宏观不均匀材料”. 例如，用不同位置排列的木夹层胶合而成的胶合板，就是属于这样的材料.

所有的工业用材料，无论是宏观均匀或不均匀的，都含有许多微小的不均匀性；这些微小的不均匀性常为肉眼所不能觉察，因而称为“微观不均匀材料”. 普通的细晶粒机器钢或特殊钢为微观不均匀的材料的典型例子. 微观不均匀性的存在，正如物质的分子结构一样，是自然界物质的共性.

按劳伦茨（Лоренц）的假设，来区别物理上的无限小和数学上的无限小. 例如，如果用实验来验证弹性理论、塑性理论或材料力学的任何问题的解答，则自然要发生这样的问题：在实际的工业用材料中连续介质的点相当于什么？这里，“物理点”（仍然含有大量原子或分子的、与物体的尺寸比较起来相当小的体积）相当于连续均匀介质或连续不均匀介质的数学点.

仍然保持有连续介质特性的物理点，其最小线尺寸大约为 10^2—10^3 Å，因为晶体内的原子间距离约为 1 Å. 可是，这样选择物理点（用字母 V 表示）还不能保证对均匀介质所进行的计算结果与在多晶体金属场合下应力和变形的实验测定结果的可比性.

问题在于各组织单元的应力和变形与多晶体试样的平均应力和变形有很大区别[40]. 因此，除了点 V 外，必须引入这样的物理点

（以后用字母W表示），其性能可以在多晶体试样上用实验方法测得的宏观量决定之，而应力和变形可与由均匀介质的弹性理论和塑性理论计算所得的结果相比较．为此必须使点W的尺寸比组织单元的尺寸大，而比整个物体的尺寸小．就钢来说，组织单元的线尺寸为10^4—10^6 Å [41]，因而点W的线尺寸可能为10^7—10^8 Å 或为 0.1—1 毫米．

第Ⅰ类和第Ⅱ类力学量　设Ω——特征尺寸，例如，物体的体积；W和V——规定尺寸，总是与物体给定点邻域ϵ的尺寸相关联的；而且，当$\epsilon \geqslant W$时为$W \subset \epsilon$，当$\epsilon \geqslant V$时为$V \subset \epsilon$，$\Omega \gg W \gg V$．

线弹性介质的弹性由弹性常数$a_{ij}^{(\epsilon)}$，$b_{ij}^{(\epsilon)}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, 6)$决定之，一般地说，它们取决于介质点邻域ϵ的尺寸．宏观弹性常数或第Ⅰ类弹性常数可由下列等式决定之

$$a_{ij}^0 = \lim_{\epsilon \to w} a_{ij}^{(\epsilon)},\ b_{ij}^0 = \lim_{\epsilon \to w} b_{ij}^{(\epsilon)} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, 6).$$

微观弹性常数（第Ⅱ类）：

$$a_{ij} = \lim_{\epsilon \to v} a_{ij}^{(\epsilon)},\ b_{ij} = \lim_{\epsilon \to v} b_{ij}^{(\epsilon)} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, 6).$$

设ΔF为通过该点的介质内某点的平面截面S_ϵ（ϵ——邻域）的面积，$\vec{P}$为被切开的两半之间的相互作用力的合力．则截面S_ϵ上的平均应力$\vec{S}^*$、宏观应力$\vec{\sigma}$和微观应力$\vec{\xi}$为

$$\vec{S}^* = \frac{\vec{P}}{\Delta F}, (\epsilon > W), \vec{\sigma} = \lim_{\epsilon \to w} \frac{\vec{P}}{\Delta F}, \vec{\xi} = \lim_{\epsilon \to v} \frac{\vec{P}}{\Delta F}.$$

这里，当$\epsilon \to 0$，则对所有的计算$\Delta F \to 0$．

当$\epsilon = W$时所决定的应力σ_i和变形e_i的张量分量将称为“宏观的”（第Ⅰ类），以区别于“微观的”（第Ⅱ类）当$\epsilon = V$时所决定的应力ξ_i和变形ε_i的张量分量（图1）．为了简化张量分量的写法，用六个矢量分量表示之：

$$\sigma_1 = \sigma_{xx},\ \sigma_2 = \sigma_{yy},\ \sigma_3 = \sigma_{zz},$$
$$\sigma_4 = \sigma_{xy},\ \sigma_5 = \sigma_{yz},\ \sigma_6 = \sigma_{zx},$$
$$\xi_1 = \xi_{xx},\ \cdots,\ \xi_6 = \xi_{zx}.$$

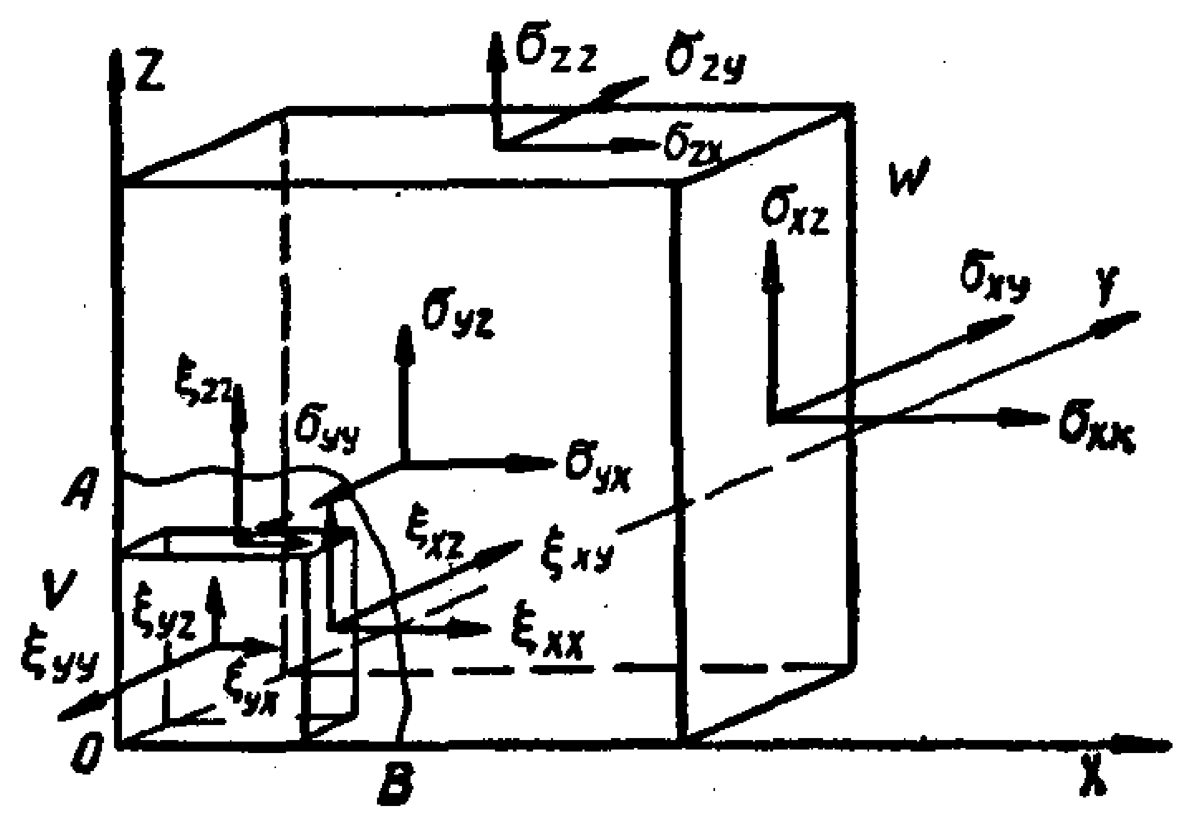

图1　两种基本型式的"物理点"：W 和 V
（用图表示点的相对尺寸）

线弹性介质称为"微观不均匀介质"，如果 1)已知 a_{ij}^0 (b_{ij}^0)，为介质的点的单值座标函数，2) σ_i，e_i 可以用解边界问题或实验方法求得之，3) ξ_i，ε_i，a_{ij}，b_{ij} 为随机变量。

物理点W的变形定律(第 I 类变形定律，宏观变形定律或第 I 类力学状态方程式)：

$$e_i=\sum_{j=1}^{6} a_{ij}^0\sigma_j,\quad \sigma_i=\sum_{j=1}^{6} b_{ij}^0 e_j\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6). \tag{1}$$

物理点V的变形定律(第 II 类变形定律，微观变形定律或第 II 类力学状态方程式)：

$$\varepsilon_i=\sum_{j=1}^{6} a_{ij}\xi_j,\quad \xi_i=\sum_{j=1}^{6} b_{ij}\varepsilon_j\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6). \tag{2}$$

2. 微观不均匀介质的应力、变形和强度

应力　设 F——法线为 x 的物体上给定点邻域W的平面截面 S_w 的面积，f_k——位于截面 S_w 上的点V的互不相交的截面 S_v 的面积，T——点 W 被切开的两半之间的相互作用合力的法向分力，t_k——截面 $S_v\subset S_w$ 上相互作用力的法向分力(图 2)。因为 $t_k=\xi_{xx}^{(k)}f_k$，式中 ξ_{xx}^k——第 II 类应力的法向分量，由于平衡条件，法向应力的宏观分量为

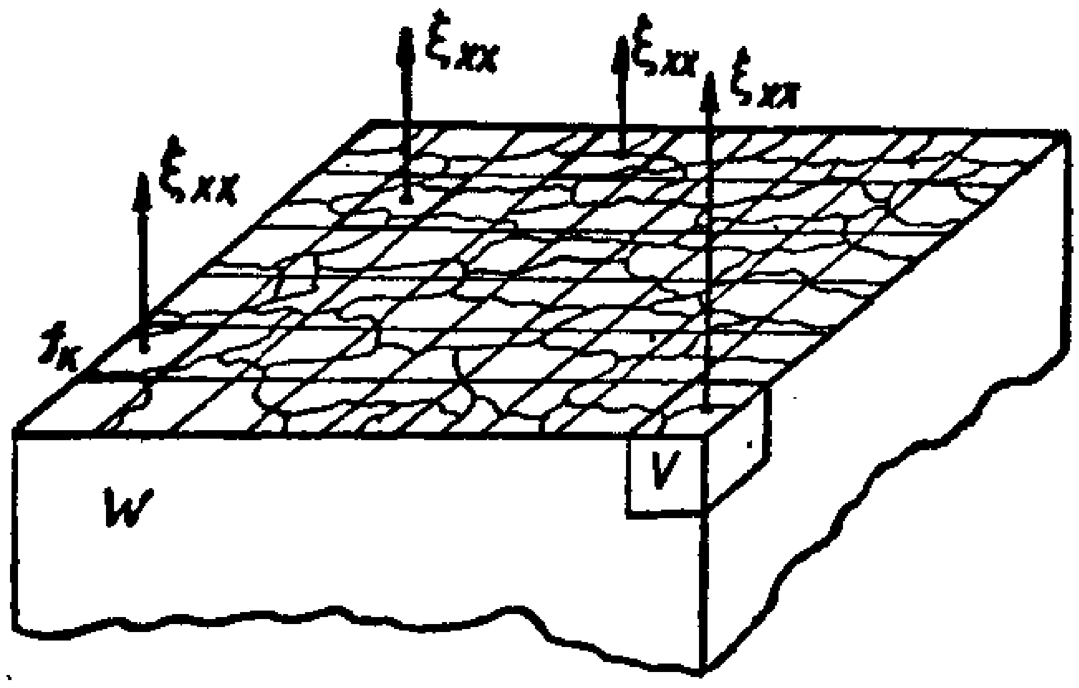

图 2　在多晶体金属的情况下，点W的截面．
截面上只表示出部分的第 II 类应力分量

$$\sigma_{xx}=\frac{T}{F}=\sum_{(k)}\xi_{xx}^{(k)}\frac{f_k}{F}.$$

特别是，当 S_v 的尺寸相同时 ($f_k=f$)，用 m_k 表示具有同值 $\xi_{xx}^{(k)}$ 的 S_v 的数目，用N表示 $S_v(S_v\subset S_w)$ 的总数，可以得到

$$\sigma_{xx}=\sum_{(k)}\xi_{xx}^{(k)}\frac{m_k}{N}.$$

在 $W\gg V$ 条件下，亦即在 $F\gg t$ 条件下，N值是很大的．假定大数定律成立，则微观应力的法向分量可以写成数学期望的形式

$$\sigma_{xx}=MO(\xi_{xx})=\overline{\xi_{xx}}.$$

前面所采用的关于截面 S_v 的尺寸相等的假设，就理解为足以假定面积 f_k 在数量级上等于线尺寸来说，是不重要的．

对所有其余的应力张量分量的类似的推论导出等式：

$$\sigma_i=MO(\xi_i)=\bar{\xi}_i\ (i=1,2,\cdots,6). \tag{3}$$

平均或宏观应力 σ_i，按其本身定义，是与该截面总是相垂直的物体给定点邻域W的所有截面面积上的平均值．就截面转动时微观应力的分布发生变化来说，分量 ξ_{xx} 的分布总是由法线 x 确定之．

变形　对变形张量分量说来，与(3)相类似的等式是成立的．我们可以用沿着通过物体给定点的 x 轴的相对延伸率为例子说明之．为了简单起见，假定 x 轴所通过的所有互不相交的点 V，在原来的未变形状态下，从它们自己的边界在 x 轴上截割等长的

线段 l_0. 在变形状态下得到的新的线段的长度，以 l_k 表示之. 以 L_0 和 L 表示在原始状态和变形状态下被物体点的邻域 W 的边界所截割的在 x 轴上的线段长度. 如果 N 为在物体给定点邻域 W 范围内截割 x 轴的点 V 的数目，则根据条件，

$$L_0 = Nl_0,\ L = \sum_{k=1}^{N} l_k,\ e_{xx} = \frac{L - L_0}{L_0},\ \ \varepsilon_{xx}^{(k)} = \frac{l_k - l_0}{l_0}$$

$$(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ N).$$

因而

$$e_{xx} = \frac{1}{Nl_0}\left(\sum_{k=1}^{N} l_k - Nl_0\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{xx}^{(k)}.$$

用 m_k 表示具有相同的延伸率 $\varepsilon_{xx}^{(k)}$ 的点 V 的数目，可以得到

$$e_{xx} = \sum_{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} \frac{m_k}{N}.$$

根据前述，假定大数定律成立，可以求出

$$e_{xx} = MO(\varepsilon_{xx}) = \overline{\varepsilon_{xx}}.$$

对所有其余的变形张量分量的相类似的推论可得出

$$e_i = MO(\varepsilon_i) = \overline{\varepsilon_i}. \tag{4}$$

简单载荷定理 如果所有的外力对一共同参数 u（外载参数）成比例地变化，物体就受到“简单载荷”[42]. 假设充填物体的介质是不均匀的、线弹性的和各向异性的. 在个别情况下，它可以是宏观均匀的（介质的任意两点的邻域 W 有相同的弹性）、微观不均匀的、似各向同性的等等. 当物体在简单的静载荷的条件下，介质任何点上的应力和变形的张量分量，不论是第 I 类或是第 II 类，都与外载参数 u 成比例地变化（简单载荷定理）. 事实上，当 $u = u_1$ 时，假设 $\sigma_{lm} = \sigma_{lm}^*$, $e_{lm} = e_{lm}^*$ $(l,\ m = x,\ y,\ z)$. 当 $u > u_1$ 时，弹性理论边界问题的解为

$$\sigma_{lm} = \sigma_{lm}^* u,\ \ e_{lm} = e_{lm}^* f(u),$$

式中 $f(u)$——u 的暂时未定的函数. 因为 σ_{lm}^*, e_{lm}^* 是解，所以平衡方程式和边界条件同时满足：

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=0;\ \sigma_{xx}n_1+\sigma_{xy}n_2+\sigma_{xz}n_3=p_{x\nu};$$

$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}=0;\ \sigma_{yx}n_1+\sigma_{yy}n_2+\sigma_{yz}n_3=p_{y\nu};$$

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0;\ \sigma_{zx}n_1+\sigma_{zy}n_2+\sigma_{zz}n_3=p_{z\nu};$$

式中 n_1，n_2，n_3——对斜面的法线的方向余弦，$p_{x\nu}\cdots$——物体边界上的应力。为了满足虎克定律方程式：

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{xx}=b_{11}e_{xx}+b_{12}e_{xy}+\cdots+b_{16}e_{zx}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\text{等等}\end{array}\right\},$$

式中模数 b_{lm}——物体点的座标的任意函数，可以取 $f(u)=u$。同时，亦满足变形一致条件。

介质常数　将简单载荷定理用于微观不均匀线弹性介质的截面 S_w，可以得到（采用以前的简化符号时，$\sigma_1=\sigma_{xx}$，$\sigma_2=\sigma_{yy}$，$\sigma_3=\sigma_{zz}$，$\sigma_4=\sigma_{xy}$，$\sigma_5=\sigma_{yz}$，$\sigma_6=\sigma_{zx}$；$\xi_1=\xi_{xx}$，$\cdots$，$\xi_6=\xi_{zx}$）：

$$\xi_i=u\xi_i^*,\ \varepsilon_i=u\varepsilon_i^*,\ \sigma_i=u\sigma_i^*,\ e_i=ue_i^*. \tag{5}$$

当 $\sigma_j^*\neq 0$，$e_j^*\neq 0$ 时：

$$\xi_i=k_{ij}\sigma_j,\ \varepsilon_i=l_{ij}e_j,\ k_{ij}=\frac{\xi_i^*}{\sigma_j^*},l_{ij}=\frac{\varepsilon_i^*}{e_j^*}. \tag{6}$$

在简单载荷的条件下，k_{ij} 值和 l_{ij} 值为常数，同时

$$\overline{k_{ij}}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases};\quad \overline{l_{ij}}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}.$$

介质不均匀性的特性　设 x——随机变量；$\Delta x=x-\bar{x}$，式中 $\bar{x}$——x 的平均值；$\overline{\Delta x^2}$——x 值的均方差[1]。我们探讨一下参数：

$$I_x=\frac{\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}}}{\bar{x}};\ J_x'=\frac{\sqrt[3]{\overline{(\Delta x)^3}}}{\bar{x}};\ J_x=\frac{\sqrt[4]{\overline{(\Delta x)^4}}}{\bar{x}}. \tag{7}$$

1) 亦称分散度——译者注.

参数(7)称为变分系数. 假定 $x = a_{ij}, b_{ij}, \xi_i, \varepsilon_i (i, j = 1, 2, \cdots, 6)$, 对第 II 类弹性常数、应力和变形可以得到象(7)那样型式的参数. 在等式(7)內, 所有的根都是正的, 分数的符号取决于分母的符号. 如果分母不为零, 分式是可定的. 根据众所周知的绝对矩定理, $|I_x| \leqslant |J_x|$.

当 $x = a_{ij}, b_{ij}$ 时, 参数(7)只取决于第 II 类弹性常数的分布, 而与外载荷、不均匀性的方式等无关. 如果载荷是简单载荷, 当 $x = \xi_i, \varepsilon_i$ 时, 参数(7)与外载荷无关. 例如, 假设 $x = \xi_i$, 并考虑关系式(5)和(6), 对 J_{ξ_i} 可得到

$$J_{\xi_i} = \frac{\sqrt[4]{\overline{(\xi_i - \sigma_i)^4}}}{\sigma_i} = \frac{\sqrt[4]{\overline{(\xi_i^* - \sigma_i^*)^4}}}{\sigma_i^*} = \text{常数}.$$

当 $x = \xi_i, \varepsilon_i$ 时, 参数(7)取决于弹性常数的分布、组织不均匀性的方式的变化(多晶体內的小晶体)、以及由第 I 类主应力之间的关系式决定的介质点的邻域 W 內的第 I 类应力状态的型式. 例如, 对密实的多晶体试样的任何內点说来, 在第 I 类简单的单向拉伸的条件下, 在所有第 I 类主平面(物体给定点邻域 W 的截面)上应力和变形的均方差 $\mu_{ii} = \overline{(\Delta\xi_i)^2}$, $\nu_{ii} = \overline{(\Delta\varepsilon_i)^2}$ 都不等于零. 同时, 三个第 I 类主应力中, 有二个主应力等于零. 因此, 在三个互相垂直的第 I 类主平面中的两个主平面上, 参数 I_{ξ_i} 是沒有意义的. 如果在试样上施加侧压力, 则在所有的主平面上, 参数 I_{ξ_i} 将为有限值.

平均和宏观弹性常数 注意恆等式

$$\overline{a_{ij}\xi_j} = \overline{a_{ij}}\overline{\xi_j} + \overline{\Delta a_{ij}\Delta\xi_j}; \quad \overline{b_{ij}\varepsilon_j} = \overline{b_{ij}}\overline{\varepsilon_j} + \overline{\Delta b_{ij}\Delta\varepsilon_j}, \tag{8}$$

式中根据(3)和(4), $\bar{\varepsilon}_j = e_j$, $\bar{\xi}_j = \sigma_j$, 根据物体点的邻域 W 的体积对(2)取平均值后可以得到

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i &= \sum_{j=1}^{6} \overline{b_{ij}\varepsilon_j} = \sum_{j=1}^{6}\left(1 + \frac{\overline{\Delta b_{ij}\Delta\varepsilon_j}}{\overline{b_{ij}}e_j}\right)\overline{b_{ij}}e_j \\ e_i &= \sum_{j=1}^{6} \overline{a_{ij}\xi_j} = \sum_{j=1}^{6}\left(1 + \frac{\overline{\Delta a_{ij}\Delta\xi_j}}{\overline{a_{ij}}\sigma_j}\right)\overline{a_{ij}}\sigma_j \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

方程式(9)恆等于方程式(1)，因此宏观弹性常数决定于等式：

$$a_{ij}^0 = \left(1 + \frac{\overline{\Delta a_{ij}\Delta\xi_j}}{\overline{a_{ij}}\sigma_j}\right)\overline{a_{ij}},\ b_{ij}^0 = \left(1 + \frac{\overline{\Delta b_{ij}\Delta\varepsilon_j}}{\overline{b_{ij}}e_j}\right)\overline{b_{ij}}. \qquad (10)$$

如果 $\overline{\Delta a_{ij}\Delta\xi_j} \neq 0$，$\overline{\Delta b_{ij}\Delta\varepsilon_j} \neq 0$，则从(10)得出

$$a_{ij}^0 \neq \bar{a}_{ij},\ b_{ij}^0 \neq \bar{b}_{ij}. \qquad (11)$$

用多晶体金属进行试验时发现的不等式(11)，可以利用晶粒边界和晶粒之间的相互作用对宏观弹性常数值的影响定性地解释之[43—45]。

平均和宏观弹性常数(10)与第Ⅰ类主应力之间的比值无关。在这方面，平均和宏观弹性常数是属于材料的"绝对"常数，与介质的不均匀特性 I_{ξ_i} 或 I_{ε_i} 有所不同(I_{ξ_i}，I_{ε_i} 只是在简单载荷的条件下才是常数)。

从(10)得出下列数值

$$G_{ij,j}^{(a)} = \frac{\overline{\Delta a_{ij}\Delta\xi_j}}{\overline{a_{ij}}\sigma_j} = \frac{1}{\bar{a}_{ij}}(a_{ij}^0 - \bar{a}_{ij}); \qquad (12)$$

$$G_{ij,j}^{(b)} = \frac{\overline{\Delta b_{ij}\Delta\varepsilon_j}}{\overline{b_{ij}}e_j} = \frac{1}{\overline{b_{ij}}}(b_{ij}^0 - \overline{b_{ij}}) \qquad (11)$$

与第Ⅰ类主应力之间的比值无关，因而是属于"绝对"常数之列。

设 $I^2 = \max(|G_{ij,j}^{(a)}|,\ |G_{ij,j}^{(b)}|)$。为了简便起见，将满足条件 $1 + I^2 \cong 1$(与1比较起来 I^2 很小)的介质称之为"似均匀介质"。

如果介质为似均匀介质，则

$$(1 + |G_{ij,j}^{(a)}|) \leqslant 1 + I^2,\ (1 + |G_{ij,j}^{(b)}|) \leqslant 1 + I^2,$$

因而(10)的括号内的表式与1之差不大于 I^2。在这种情况下，不等式(11)可以用近似等式替代之：

$$a_{ij}^0 \cong \overline{a_{ij}},\ b_{ij}^0 \cong \overline{b_{ij}}. \qquad (11')$$

如果介质在给定的应力状态下，例如在第Ⅰ类单向拉伸的情况下，再施加新的应力状态，例如侧压力；则当变形很小时利用迭加原理，在主平面1上可得到 $\xi_1 = \xi_1' + \xi_1''$。式中 ξ_1'——在拉应

力 σ_1 作用下发生的第 II 类应力，ξ_1''——侧压力 σ_2 的作用的结果（$\bar{\xi}_1''=0$）。对总的应力状态，可以得到

$$G_{11,1}^{(a)}=\frac{\overline{\Delta a_{11}\Delta\xi_1}}{\bar{a}_{11}\sigma_1}=\frac{\overline{\Delta a_{11}\Delta\xi_1'}}{\bar{a}_{11}\sigma_1}+\frac{\overline{\Delta a_{11}\Delta\xi_1''}}{\bar{a}_{11}\sigma_1}=\frac{1}{\bar{a}_{11}}(a_{11}^0-\bar{a}_{11}).$$

当施加应力 σ_2 时，$G_{11,1}^{(a)}$ 值并不改变它自己的数值，因而 $\overline{\Delta a_{11}\Delta\xi_1''}=0$. 由此得出，$a_{11}$ 值和 ξ_1'' 值各不相关. 此外，根据迭加原理，ξ_1'' 值与 ξ_1' 值无关.

3. 弹性变形位能

实际和宏观位能 设在规定的座标系（x, y, z）中物体的点 V 的相对位移为 u_x, u_y, u_z. 如同第 II 类变形一样，这些位移量为随机变量. 用 $\vec{t}^{(x)}(\xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{xz})$、$\vec{t}^{(y)}(\xi_{yx}, \xi_{yy}, \xi_{yz})$ 和 $\vec{t}^{(z)}(\xi_{zx}, \xi_{zy}, \xi_{zz})$ 分别表示 $x=$ 常数，$y=$ 常数和 $z=$ 常数的平面上的第 II 类全应力矢量. 那么，在微观不均匀弹性介质内，机械能的守恒定律可写成等式 $\Pi_p=\Pi$，式中 Π——弹性变形位能，Π_p——物体点移动时外力所作的功.

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_{(\Omega)}\left(\sum_{i=1}^{6}\xi_i\varepsilon_i\right)d\Omega,\ \Pi_p=\frac{1}{2}\int_{(S)}(u_xt_\nu^{(x)}+$$
$$+u_yt_\nu^{(y)}+u_zt_\nu^{(z)})\,dS, \tag{13}$$

式中 Ω——物体的体积，S——物体的表面积，$t_\nu^{(x)}, t_\nu^{(y)}, t_\nu^{(z)}$——矢量 $\vec{t}^{(x)}, \vec{t}^{(y)}, \vec{t}^{(z)}$ 在物体表面法线 ν 上的投影.

用二种方法将(13)积分. 为此我们探讨一下体积密度和面积密度:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{H}=\frac{1}{W}\int_{(w)}HdW=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\overline{\xi_i\varepsilon_i},\ H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\xi_i\varepsilon_i;\\&\bar{H}_s=\frac{1}{S_w}\int_{(Sw)}H_SdS=\frac{1}{2}(\overline{u_xt_\nu^{(x)}}+\overline{u_yt_\nu^{(y)}}+\overline{u_zt_\nu^{(z)}});\\&H_S=\frac{1}{2}(u_xt_\nu^{(x)}+u_yt_\nu^{(y)}+u_zt_\nu^{(z)}).\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

根据(14)，有