数学思想和数学哲学

周述岐 编著

中国人民大学出版社

数学思想和数学哲学

周述岐 编著

中 国 人 民 大 学 出 版 社

（京）新登字156号

数学思想和数学哲学

周述岐　编著

出版者：中国人民大学出版社
发行者：中国人民大学出版社
（北京海淀路39号 邮码100872）
印刷者：中国人民大学出版社印刷
经销者：新华书店总店北京发行所
开　本：850×1168毫米32开
字　数：350 000
印　张：13.75
版　次：1993年12月第1版
印　次：1993年12月第1次印刷
册　数：1—2 500
书　号：ISBN7-300-01645-6/B·209
定　价：8.20元

前　　言

哲学史表明，在19世纪末以前，包括马克思、恩格斯在内的著名哲学家，都重视并深谙他们所处时代的数学。有的哲学家本来就是对数学的发展作过重大贡献的数学家。在历史上，数学或是被哲学家用作建立他们哲学体系的工具，或是作为论证他们某些重要哲学命题的主要依据，这说明，在历史上数学是同哲学联系极为密切的学科。本世纪以来，由于科学数学化趋势的出现和数学作为横断科学地位的加强，使数学同作为自然界、社会和人类思维及其发展最一般规律的哲学之间的关系更加密切。此外，对了解、分析和批判现代西方一些重要哲学流派、代表人物的哲学观点，数学也是必不可少的知识。但是，现代数学乃是一个体系庞大、内容丰富和分支众多的学科群，以致当代数学专家也“隔行如隔山”。因此，要求一般哲学工作者通晓现代数学是不现实的。

现代哲学需要数学，一般哲学工作者又不可能通晓现代数学，这个矛盾是客观存在的。全国高等院校哲学专业现行的数学课，主要介绍微积分基本知识（有的也讲一点古典概率），这仅仅是到19世纪中期为止的数学。学习这些内容的主要目的之一是了解马列原著中所涉及的数学问题，但若不介绍一点微积分的历史，这个目的也难于真正达到。因此，在无任何后续课的情况下，这样的内容显得可有可无，同学们学习的积极性并不高。为了结合哲学专业的特点，笔者在为哲学专业编写的教材《微积分基本原理》一书之末，试写了一章“数学概观”。这一章对一年级学生来说过简、过“虚”。如何改进哲学专业数学课的教学内

容，涉及到培养目标以及同数学有关的课程，值得有关部门全面考虑。

以往，哲学界普遍认为，哲学是自然科学和社会科学的概括和总结。但是现在一般哲学工作者所关心的并不是各门自然科学的具体知识，而是同哲学关系最紧密的科学思想。同样，对于数学，他们所关心的并不是艰深、具体的现代数学知识，而是数学思想。数学思想的历史是数学基本概念、重要理论产生和发展的历史，也是哲学家和数学家的数学观发展的历史，是数学内史和外史的统一，有史、有论，史论结合。笔者认为，哲学系如果能在介绍微积分基本知识的基础上，再介绍一些数学思想和数学哲学，则有助于学习哲学。基于这种认识，笔者萌发了给哲学系本科高年级学生和研究生开设一门新课“数学思想和数学哲学”的念头。1988年曾设想了一个框架。但由于一些实际原因使这一设想搁浅。

笔者认为，数学思想和数学哲学是沟通数学和哲学的桥梁，是实现二者联盟的“接触点”。于是，笔者不揣冒昧，试图为哲学和数理专业的大学生和研究生提供一本了解这方面内容的参考书。该书也可供一般的哲学、社会科学、科技史、自然辩证法工作者以及中学数学教师参考。

全书除绪论外共四章。笔者通过绪论试图描述数学基本轮廓，勾画数学全貌。第一、二章分别介绍古代（17世纪初期以前）和近代（17世纪中期～19世纪中期）重要数学思想和有影响的数学哲学思想。第三章介绍现代（19世纪末期以来）主要数学分支的思想发展。第四章是现代数学基础和数学哲学简介。为了使讨论的问题相对地集中，有的问题虽安排在前一时期，但延伸到以后；而有的问题虽安排在后一时期，却又追溯到以前。

本书利用了许多人的研究成果，其中能确切指出材料和观点来源的，均以适当的方式说明。在此，对书中所引用材料的作者

致以谢忱。

应当说明的是，笔者对数学和哲学都是一知半解，研究数学思想史也仅仅是出于爱好。因此，动笔写这样大的题目深感力不从心，比预想的困难大得多。笔者虽然主观上力图描绘数学的主要分支、重要理论的产生和发展都不是纯粹偶然，也不是单凭数学家的聪明才智，但因能力和资料所限，客观上不免有片面和不尽人意之处，既怕贻笑大方，更怕危害读者。还有，书中有些材料系辗转引用，限于主客观条件，一时无力一一加以考证、查实，所以也可能有传讹之处。所有错误和不足之处，恳请读者和专家指正。

在当前出书难的情况下，中国人民大学出版社有关负责同志热情支持出版本书，笔者感到非常幸运。责任编辑林坚同志除对原稿内容详细审阅、对文字精心加工以外，还对全书的一些章节的结构提出许多很好的意见。周良和杨森协助誊写原稿，绘制图形和编写外国人名译名对照。这里谨向支持和关心本书的同志致谢。

周述岐

1992年11月

目　录

绪　论

0.1　数学的研究对象问题

数学的研究对象（即数学的定义）是数学哲学重要问题之一，这个问题既简单又不容易回答。说简单，因为在一般人的心目中都有自己所理解的数学，似乎无须给予定义。说不容易回答，因为要准确地回答并得到公认，似乎还没有人能够真正做到。

在科学史上，不仅不同历史时期的哲学家、数学家对这一问题的理解不尽相同，就是在同一历史时期的哲学家、数学家的理解也不尽相同。R.E.摩利茨的《数学家语录》（1914）曾收集了数以百计的历代著名数学家关于数学定义以及对数学性质的论述。M.C.阿克彼洛夫在《现代数学的内容和对象问题》①（1976）一书中也列举了十多种现代流行的数学定义。数学定义如此之多，以致有人说有多少个数学家就有多少种数学定义。数学定义的众说纷纭，说明人们数学观的混乱。也有人认为，即使在今天，高度发展的数学仍处在发展初期，并未定型，其前途是无限的。我国一位数学家感叹地说："要想对这个问题（指数学研究的对象）给出人人都满意的回答几乎是不可能的。"②

其实这一点早已被人们认识到了。比如17世纪时，法国数学

---

① 该书节译见《世界科学》1983年第1期，第16页。

② 孙小礼、楼格主编：《人·自然·社会》，北京大学出版社1988年版，第10页。

界三巨头之一的B.帕斯卡在他的《思维——雄辩的艺术》一书中曾说："本身已如此一目了然，以致没有任何词汇能把它解说得更清楚的事物，绝不要试图给它下定义。……以免被所使用的含混不清的词汇所欺骗。"① 数学对象问题就是这样的问题。

下面，我们循着历史的足迹，综述自古迄今关于数学定义的主要观点。

古希腊的毕达哥拉斯把"数"看成万物的本原，自然"数"也是数学的本原，是数学的研究对象，而所谓的"数"是先验的。柏拉图把数学看成是"心智的产物"，而且属于他的"理念世界"，认为数学也是先验的。

亚里士多德反对柏拉图的先验论，认为数学只研究存在的一部分属性，这部分属性就是存在物的量性和连续性。他说，数学家开始研究之前，先剥去一切可感的质，例如，轻重、软硬、冷热等等，只留下量性和连续性，而不考虑其它方面的属性。他在《范畴篇》中把数量（Quantity）区分为离散的和连续的两种，并说"数是一种离散的数量"，"线是一种连续的数量"。在作了如此区分之后，他指出，研究数及其属性（例如奇偶性、对称性以及比例关系等）的学科叫做算术，研究量及其属性（例如对称、相交、平行等）的学科叫做几何学。因为这两门学科的对象具有某些共同的性质，所以归结为一门学科：数学。所以数学是研究数量的科学。这是一个天才的定义，一直到19世纪末期，仍被多数哲学家和数学家所接受。例如，17世纪的笛卡尔就这样认为，他说："所有那些目的在于研究顺序和度量的科学，都和数学有关。至于所求的度量是关于数的呢，形的呢，星体的呢，声音的呢，还是其它东西的呢，都是无关紧要的。因此，应该有一门普遍的科学，去解释所有我们能够知道的顺序和度量，

① 转引自《自然辩证法研究》1988年第2期，第8页。

而不考虑他们在个别科学中的应用。事实上，通过长期使用，这门科学已经有了它自身的专名，这就是数学。”①可见，笛卡尔也认为数学是数量的科学，这同亚里士多德的思想一致。所不同的是，他把数、量分别解释为“顺序”和“度量”。

数学史表明，在19世纪以前，古典数学的主要成就是算术、几何学、代数学和微积分。这些数学所研究的都是客观事物的形式和数量。对此，恩格斯曾经概括为：“纯数学的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系”②；他还说，数学是“一种研究思想事物（虽然它们是现实的摹写）的抽象的科学”③。恩格斯的这些论述划清了数学同自然科学的界限，坚持了唯物主义路线，又优于亚里士多德的定义，因而受到数学家普遍的赞成，今天仍被经常引用。

在19世纪以前，虽然数学中已经有了没有直观背景的虚数，但它在整个数学中毕竟不占主导地位，所以虚数对恩格斯的数学定义并没有产生冲击。然而自19世纪以来，纯数学的三个基本部门——分析学、几何学、代数学均发生了质的变化：分析学已由古典微积分发展出函数论、泛函分析；几何学已由欧几里得几何学发展出非欧几里得几何学、多维几何学；代数学已由代数方程论发展出抽象代数。其中的复变数函数论、非欧几何学、多维几何学以及抽象代数等这些重要的新的数学领域，开始都没有直观的背景。在数学获得巨大成就的情况下，数学的对象到底是什么，又引起人们思考。

逻辑主义者把数学等同于逻辑，因此逻辑的对象自然就成了数学的对象。逻辑主义的代表人罗素明确地说，逻辑和数学“二

---

① 转引自 M. 克莱因：《古今数学思想》第2册，上海科学技术出版社1979年版，第6页。

② 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1970年版，第35页。

③ 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年版，第192页。

者也确是一门科学，它们的不同就像儿童与成人的不同：逻辑是数学的少年时代，数学是逻辑的成人时代”① 。因此，在逻辑主义者看来，不管数学的内容如何，也不管它的内容能否反映客观实际，只要求符合逻辑。在这种思想的指导下，罗素才说：“数学可以定义为一种科目，在其中我们决不知道说的是什么，也不知道所说的是真还是假。”② 直觉主义主要从自然数的实在性出发，构造各种数学概念，至于这些数学概念有无实际意义他们并不关心。他们从这一认识出发，把数学定义为“纯粹心智的构造”，构造的目的是为了发展他们的直觉主义的数学。纯粹的形式主义者则认为数学就是一串没有实际内容的且在逻辑上又不互相矛盾的符号。1899年，希尔伯特的《几何学基础》一书出版，标志现代公理法的诞生。从此，数学开始了公理化的趋势，并产生了约定主义。约定主义者认为，不同的数学分支是从不同的公理推导出来的，而公理则是一组“公约”或“约定”的命题。这些不同的数学学派，在本世纪开始的三分之一世纪里，在数学对象这一问题上展开激烈的争论，互相批判，没有、也不可能取得一致的意见。

原苏联数学界主要坚持了恩格斯的定义，但对其作了符合本世纪以来数学发展状况的解释，其中代表性的观点是：“数学以纯粹形态的量的关系和形式作为自己的研究对象。”③

美国著名数学家R.柯朗与H.罗宾斯合著的有影响的《数学是什么》（1941）一书开头，给数学下了一个定义：“数学，作为人类智慧的一种表达形式，反映生动活泼的意念，深入细致的思考，以及完美和谐的愿望。它的基础是逻辑和直觉，分析和推

① 罗素：《数理哲学导论》，商务印书馆1982年版，第182页。

② 参见梁宗巨：《世界数学史简编》，辽宁人民出版社1980年版，第6页。

③ A.Д.亚历山大洛夫等：《数学——它的内容、方法和意义》第1卷，科学普及出版社1958年版，第72页。

理，共性和个性。”① 他们还说：“对于学者，同样对于普通人，只有依靠数学自身经验，而不是依靠哲学，才能回答下述问题：数学是什么？”② 因为他们认为，如果坚持一定的哲学信念，必然妨碍数学获得新的成就。柯朗等把数学看成超越任何哲学的观点是不可能的。

在我国，1949年以前，罗素关于数学的定义有相当大的影响。1949年以后，马克思主义在中国得到大力的宣传，人们为了坚持恩格斯的定义，基本上采取当时苏联学者的态度——对恩格斯的定义作了符合当前数学状况的解释或者作一些必要的文字改动。

本世纪30年代以来，法国兴起了一个布尔巴基学派。该学派从当前已有的数学成就出发，寻找出三个主要的“结构”——序结构、代数结构和拓扑结构，并用这三个结构重新整理了数学。所以他们把数学定义为“研究结构的科学”。这个观点反映了现代数学水平，获得了许多人的赞同，也是当前国际上有影响的一种观点。

布尔巴基学派关于数学对象的观点在我国也受到普遍的重视。但是这一观点也不是无懈可击的。首先，“结构”概念不易被人理解，也容易同物质结构、化学结构和逻辑结构等相混淆，仅限于职业数学家的圈子，可接受性不高。其次，“结构”概念虽然反映了现代数学水平，但并不比“量”的概念更普遍、更抽象。按恩格斯的观点，“结构”仍属“量”的范畴。第三，把数学定义为研究结构的科学，属于对现有数学所作的逻辑分析，是解释型的定义。今后数学的发展，一旦突破结构思想，则这一定义将失效。

① R.柯朗、H.罗宾斯：《数学是什么》，湖南教育出版社1985年版，第1页。

② 同上书，第5页。