

工程科学中的数值方法及算例

# 工程科学中的 数值方法及算例

宋国乡等 著

電子工業出版社

目次  
第一章  
第二章  
第三章  
第四章  
第五章  
第六章  
第七章  
第八章  
第九章  
第十章  
参考文献  
附录

TB115-53

S82

355132

# 工程科学中的数值方法及算例

宋国乡等 著

电子工业出版社

(京)新登字 055 号

**工程科学中的数值方法及算例**

宋国乡等 著

责任编辑: 洋溢

电子工业出版社出版(北京市万寿路)

电子工业出版社发行 各地新华书店经营

北京顺义李史山胶印厂印刷

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 11 字数: 260 千字

1992年1月第1版 1992年1月第1次印刷

印数: 1500 册 定价: 8.00 元

ISBN7-5053-1489-0/TN·430

# 前 言

本论文集是我们近几年来部分科研工作的小结。主要是我们应用现代数值方法于工程实践的一些探讨和体会。

结合科研实践，我们主要应用了有限元、边界元及计算、优化等理论与方法。在科学实践的基础上，我们对上述方法从理论上作了一些新的探索；从方法上作了一些研究和改进；并在工程应用中取得了较好的实效，曾多次获得国家、部、省级奖励。现在我们将部分工作整理成文，与读者共同探讨。

有些论文，因交流需要已直接写成英文，我们也就直接用英文发表，故本论文集有中文、英文两部分。其中中文论文 14 篇，英文论文 11 篇。

由于时间仓促，水平有限，有些工作还不够成熟，差错之处，敬请读者予以指正。谢谢！

著者 1991 年元月

# 目 录

1. 拓扑有限元方程的广义逆解法 ..... 宋国乡、冯象初 (1)
2. 边界元法的混合元自适应改进及其应用 ..... 宋国乡、王 玲、王家礼 (7)
3. 波导问题中的边界元计算公式 ..... 郑 勇、王家礼、宋国乡 (15)
4. 解位势问题的延拓边界元法 ..... 颜毅华、施洪立 (23)
5. 延拓边界元法收敛性的研究 ..... 付 瑜、宋国乡 (33)
6. 非线性 Reynolds 方程的 Galerkin 解 ..... 徐 展 (40)
7. 非线性递推点列极限的探讨 ..... 李广民 (47)
8. 求解最小二乘方程组的一种直接方法 ..... 王金金 (52)
9. FEM 在超导同步发电机磁场分析中的应用 ..... 甘小冰 (55)
10. 压缩地震数据的分形方法 ..... 王嘉松 (64)
11. 一个新的单臂柔性机器人动力学模型及其数值模拟 ..... 徐 展 (67)
12. 对称矩阵的图形分解及其应用 ..... 冯象初、宋国乡 (75)
13. 非连续函数的一个介值定理 ..... 李广民 (80)
14. 天线设计中的形状优化 ..... 宋国乡、李 云 (83)
15. 一种改进的构架结构优化设计 ..... 段宝岩 (92)
16. 共享理论和一类求最大可行区间的优化问题 ..... 施洪立 (103)
17. 优化问题中的影响度矩阵局部摄动法 ..... 宋国乡、施洪立 (106)
18. 具离散杆件的天线结构形状优化设计 ..... 段宝岩、徐国华 (111)
19. TFGM 在电磁场问题中的应用 ..... 宋国乡、冯象初、王嘉松 (120)
20. 解电磁场问题的延拓有限元法 ..... 施洪立、颜毅华 (126)
21. 对称矩阵的一种特殊分解 ..... 宋国乡、冯象初 (133)

22. 基于优化形状函数的柔性机器人动力学建模 ..... 徐晨、甘小冰(138)
23. 矩阵范数极小化序列在结构设计中的应用 ..... 宋国乡、段宝岩(146)
24. 求解电磁式谐波电机耦合问题的数值方法 ..... 颜毅华、施浒立(155)
25. 复合场优化方法在双反射面天线中的应用 ..... 施浒立(163)

# Contents

1. A Generalized Inverse Method for Solving the Equation of Topology-Finite-Element .....	<i>Song Guoxiang, Feng Xiangchu</i> (1)
2. A Self-Adaptive Refinement for Mixed Element of BEM .....	<i>Song Guoxiang, Wang ling, Wang Jiali</i> (7)
3. The Calculating Formula of Boundary Element In A Waveguide Problem .....	<i>Zheng Yong, Wang Jiali, Song Guoxiang</i> (15)
4. The Extension BEM for Solving Potential Problem .....	<i>Zheng Yong, Wang Jiali, Song Guoxiang</i> (23)
5. A Discussion on Convergence of Extention BEM .....	<i>Fu Yu, Song Guoxiang</i> (33)
6. The Galerkin Method for Solving the Nonlinear Reynolds Equation .....	<i>Xu Chen</i> (40)
7. Discussion of the limit of Nonlinear Recursive Sequence .....	<i>Li Guangmin</i> (47)
8. A Direct Method for Solving Least-Squares System of Equations .....	<i>Wang Jinjin</i> (52)
9. Application of FEM to Analyzing the Magnetic Field of Superconducting Synchronous Generators .....	<i>Gan Xiaobin</i> (55)
10. Fractal Method for Compressing Seismic Data .....	<i>Wang Jiasong</i> (64)
11. A New Dynamic Model of One-Link Flexible Arms and It's Numerical Simulation .....	<i>Xu Chen</i> (68)
12. A Diagram Decompose for Symmetry Matrix and it's Application .....	<i>Feng Xiangchu, Song Guoxiang</i> (75)
13. An Intermediate Value theorem of the Non-Continuous Functions .....	<i>Li Guagmin</i> (80)
14. Shape Optimization of Antenna Design .....	<i>Song Guoxiang, Li Yang</i> (83)
15. An Improved Method of Optimization Design for Skeletal Structures .....	<i>Duan Baoyan</i> (92)
16. The Sharing Theory and A Kind of Optimization to Obtain Maximum Feasible Interval .....	<i>Shi Huli</i> (103)
17. Local Perturbation Method of Influence Degree Matrix for Optimization .....	<i>Song Guoxiang, Shi Huli</i> (106)

18. Configuration Optimization of Antenna Structures with Discrete Member Size  
..... *Duan Baoyan, Xu Guohua* (111)
19. TFGM for Solving Electromagnetic Field Problems  
..... *Song Guoxiang, Feng Xiangchu, Wang Jiasong*(120)
20. An Extension FEM for Solving Electromagnetic Field Problems  
..... *Shi Huli, Yan Yihua* (126)
21. A Special Decomposition for Symmetric Matrix  
..... *Song Guoxiang, Feng Xiangchu*(133)
22. Modelling of Flexible Robot Dynamics With Optimal Shape Functions  
..... *Xu Chen Gan Xiaobing*(138)
23. Application of Minimized Matrix Norm Series to Structure Design  
..... *Song Guoxiang Duan Baoyan*(146)
24. The Numerical Approach for Solving The Coupling Problem of 'Responstrn 'Motor  
..... *Yan Yihua Shi Huli*(155)
25. Optimization of Coupling Fields Applied To Dual Reflector Antenna  
..... *Shi Huli*(163)



# 拓扑有限元方程的广义逆解法

宋国乡 冯象初

(西安电子科技大学)

[1]中介绍了拓扑有限元方法, 本文通过引入导出图的概念给出了强加边界条件节点排序法处理的几何意义, 并利用矩阵的广义逆性质建立了拓扑有限元方程的广义逆解法, 最终得到了方程的显式解。

## 前 言

[1][2]对有限元方程的形成进行了改进, 提出了计算电磁场问题的拓扑有限元的新概念和模型。它利用拓扑同构首先将电磁场抽象成一个有向图, 并用有向图的点边关联阵反映其拓扑特性, 又利用有限单元法的单元导数式建立了电磁场的影响度矩阵, 最后根据物理场中的平衡原理得到了总刚度矩阵  $K$  的一种分解表达式:  $K = -AHA^T$

这里,  $A$  为只含 0, 1, -1 元素的联通图的点边关联阵, 其每列只有一个元素为 1, 一个元素为 -1, 其余元素皆为零。  $H$  为对角形式的影响度矩阵。这就为提供有限元方程的新的有效解法提供了客观的依据。

本文将给出强加边界条件经节点排序法处理后系数矩阵的几何意义, 在此基础上利用矩阵的广义逆性质建立了拓扑有限元方程的广义逆解法, 最终得到了方程的显式解。

### 一、导出图的基本关联阵

在电磁场问题的具体应用中, 影响度矩阵  $H$  往往是半正定(或半负定)的。文献[3]指出: 定义在连通域上的微分方程, 其离散方程当网格步长或单元步长充分小时是不可约的。在此条件下有下述定理成立:

定理 1 在拓扑有限元方程  $AHA^T x = b$  中, 若  $H$  为半正定(半负定)矩阵, 则方程可化为  $\tilde{A}\tilde{H}\tilde{A}^T x = b$  其中  $\tilde{A}$  仍为某一联通图的点边关联阵, 而  $\tilde{H}$  则为正定(负定)影响度矩阵

证明: 只对  $H$  为半正定证明结论成立。显然若将  $H$  对角线中 0 元素和  $A$  中相应的列从  $H$  与  $A$  中去掉得  $\tilde{H}$  与  $\tilde{A}$ , 则有  $AHA^T = \tilde{A}\tilde{H}\tilde{A}^T$  成立,  $\tilde{A}$  即为从拓扑图中去掉影响度为零的边后所得图的点边关联阵。故只需证明这是一联通图即可。假定是非联通的, 则经过适当排列相应的点边关联阵和影响度矩阵具有

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad \tilde{H} = \begin{bmatrix} H_1 & \\ & H_2 \end{bmatrix}$$

的形式, 因此方程化为

$$\begin{cases} \mathbf{BH}_1 \mathbf{B}^T \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{CH}_2 \mathbf{C}^T \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \end{cases}$$

这和不可约相矛盾，故 $\tilde{\mathbf{A}}$ 一定是联通图的点边关联阵。

现在用节点排序法处理方程的强加边界条件。假定有向图 $G$ 有 $m$ 个点和 $n$ 条边，又设有 $l$ 个节点落在第一类边界条件的已知边上，则在排序时，将该 $l$ 个节点排在最后，并将 $A$ 进行相应的块分解 $A = (\mathbf{B}^T \mathbf{C}^T)^T$ ，其中 $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{(m-l) \times n}$ ， $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{l \times n}$ ，则原方程化为

$$\mathbf{BHB}^T \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{CHC}^T \mathbf{x}_2$$

这里 $x_1$ ， $b_1$ 和 $x_2$ ， $b_2$ 分别为 $x$ 和 $b$ 的前 $m-l$ 个分量与后 $l$ 个分量。为方便起见，仍以 $b$ 和 $x$ 记 $b_1 - \mathbf{CHC}^T x_2$ 与 $x_1$ ，则有

$$\mathbf{BHB}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

此时， $\mathbf{BHB}^T$ 为经过边界条件处理后的满秩矩阵，故方程有唯一解。现在给出 $B$ 的几何意义。

定义1 将 $l$ 个落在第一类边界条件的已知边上的节点视为同一所得到的图 $G'$ ，称为图 $G$ 的导出图。

由此知，在边界条件处理后的方程中若 $B$ 的某列全为零(即该列对应的边为已知节点之间的边，该边在导出图中退化为点)，则可将该列和 $H$ 中对应的元去掉，不影响方程的系数矩阵，这时的 $B$ 即为导出图的基本关联阵。

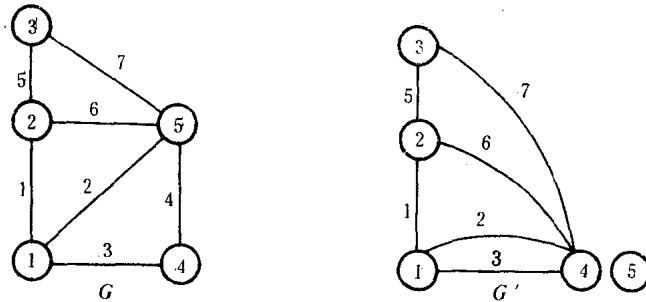


图1

例如，某场域剖分如图(1)所示，假定节点④⑤位于已知边上，故可视为同一。图 $G$ 的点边关联阵 $A$ 的前 $m-l$ 行(这里 $m=5$ ， $l=2$ )和图 $G'$ 的基本关联阵完全相同。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 二、 $B^{-}$ 的一种图解法

由于 $B$ 为导出图 $G'$ 的基本关联阵,故可用[4]提供的方法求 $B^{-}$ 。我们知道若 $B$ 和 $H$ 保持相应的对应关系,则经过适当地列交换总可以使 $B$ 的前 $m-l$ 列线性无关,且保持系数矩阵不变。故可将 $B$ 和 $H$ 重排,使 $B=(B_1, B_2)$ ,其中 $B_1$ 对应于图 $G'$ 的某棵树 $T$ 。

定义2 假定 $T$ 为一棵树, $r$ 为参考节点, $l_i$ 为由节点 $i$ 到 $r$ 的路径,则对任一节点 $i$ 可由下列规则产生一向量,称为节点 $i$ 的路径向量:

1) 如果 $T$ 的第 $j$ 条边属于 $l_i$ ,且边的方向和 $l_i$ 的方向一致,则向量的第 $j$ 个元素为1,若边的方向和 $l_i$ 的方向相反,则向量的第 $j$ 个元素为-1。

2) 如果 $T$ 的第 $j$ 条边不属于 $l_i$ ,则向量的第 $j$ 个元素为0。

定义3 以全体路径向量为列构成的矩阵称为路径矩阵。

由路径矩阵的定义我们知道 $B=(B_1, B_2)$ 的一个广义逆是 $B^{-}=(p_r^T, 0)^T$ ,这里 $B_1$ 对应于图 $G'$ 的某棵树 $T$ , $p_r$ 是树 $T$ 的路径矩阵。实际上,这里的 $(p_r^T, 0)^T$ 是 $B$ 的一个 $\{1, 2\}$ —逆。因此只要求出 $G'$ 的某棵树 $T$ ,进而求出 $T$ 的路径矩阵,则可得 $B$ 的广义逆 $B^{-}$ ,这里的 $B$ 经过了适当地列交换,只要 $H$ 保持对应的关系,则系数矩阵不变。而树 $T$ 可用DFS方法<sup>[5]</sup>很容易地求得。

## 三、拓扑有限元方程的广义逆矩阵解法

定理2 如果 $B$ 为行满秩的, $H$ 为可逆的,则方程 $BHB^T x = b$ 的解 $x_0$ 具有下述形式:

$$x_0 = (B^{-})^T H^{-1} B^{-} b + (B^{-})^T H^{-1} (I - B^{-} B) y \quad (1)$$

这里 $B^{-}$ 为 $B$ 的 $\{1\}$ —逆, $y$ 为满足下述方程的向量

$$(I - B^{-} B)^T H^{-1} (I - B^{-} B) y = -(I - B^{-} B)^T H^{-1} B^{-} b \quad (2)$$

证明:实际上

$$\begin{aligned} BHB^T x_0 &= BHB^T [(B^{-})^T H^{-1} B^{-} b + (B^{-})^T H^{-1} (I - B^{-} B) y] \\ &= BH[H^{-1} B^{-} b + H^{-1} (I - B^{-} B) y] \\ &= B[B^{-} b + (I - B^{-} B) y] = BB^{-} b = b \end{aligned}$$

下面我们证明(2)式有解。因为 $x_0$ 是方程 $BHB^T x = b$ 的解,即有 $BHB^T x_0 = b$ 成立,因此方程 $Bx = b$ ,有解 $HB^T x_0$ ,则 $Bx = b$ 为相容方程,即有 $BB^{-} b = b$ 成立。又 $Bx = b$ 的通解为 $B^{-} b + (I - B^{-} B) y$ ,故必有一 $y_0$ 使 $HB^T x_0 = B^{-} b + (I - B^{-} B) y_0$ ,从上式可知方程

$$Hx = B^{-} b + (I - B^{-} B) y_0$$

有解 $B^T x_0$ ,故由相容方程的充分必要条件知 $y_0$ 应满足方程(2)。

显然当 $V_n$ 是可逆矩阵时,(2)式的解 $y$ 和(3)式

$$V_n^T (I - B^{-} B)^T H^{-1} (I - B^{-} B) V_n z = -V_n^T (I - B^{-} B)^T H^{-1} B^{-} b \quad (3)$$

的解  $z$  有下述关系:  $y = V_n z$  成立. 实际应用中可取  $V_n = (B^- V)$ , 其中  $N(B)$  为  $B$  的零空间,  $V$  的各列为  $N(B)$  的一组基.  $V_n$  是非退化的. 实际上, 因为  $B$  是行满秩的, 则  $B^-$  为列满秩的, 且  $B^-$  的各列构成  $N(B)$  的补空间  $S$  的一组基, 又已知  $V$  的各列为  $N(B)$  的一组基, 所以  $V_n$  的各列构成  $R^n$  的一组基, 因此  $V_n$  是非退化的.

现在给出  $V$  的图解生成法. 因为  $V$  是  $N(B)$  的一组基, 而  $B = (B_1, B_2)$ , 其中  $B_1$  是可逆的, 则可取  $V = (N^T I)^T$ , 这里  $N = B_1^{-1} B_2$ , 而  $(m-l) \times (n-m+l)$  矩阵  $N$  可由下述方法生成: 因为  $B_2$  各列对应的边不在树  $T$  中, 假定  $B_2$  的第  $i$  列对应的边由  $s$  节点起始,  $t$  节点终止, 则在树  $T$  中必有唯一的路径  $P_i$  由  $s$  节点起至  $t$  节点止, 则  $N$  的第  $i$  列即为  $P_i$  的路径向量. 例如在图(2)中, 设节点④为参考节点, 树  $T$  由边 1, 2, 3 生成, 则



图 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

如果不仅取  $V$  为  $N(B)$  的一组普通的基, 而且使其成为一组  $H^{-1}$  正交基  $\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{n-m+l}$ , 即满足

$$\tilde{v}_i^T H^{-1} \tilde{v}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n-m+l$$

对这样的  $\tilde{v}_i$  显然有

$$(I - B^- B) \tilde{v}_i = \tilde{v}_i \quad i = 1, 2, \dots, n-m+l$$

因此有

$$(I - B^- B) V_n = (I - B^- B) (B^- \tilde{V}) = (0 \tilde{V})$$

其中  $\tilde{V}$  各列为  $\tilde{v}_i$ . 将上式代入(3)得

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{V}^T H^{-1} \tilde{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{V}^T H^{-1} B^{-1} b \end{bmatrix}$$

其中  $z_1, z_2$  为  $z$  相应的分解。故有

$$z_2 = -\tilde{V}^T H^{-1} B^{-1} b$$

则  $y = -\tilde{V} \tilde{V}^T H^{-1} B^{-1} b$

代入(1)得

$$x_0 = (B^{-1})^T H^{-1} B^{-1} b - (\tilde{V}^T H^{-1} B^{-1})^T (\tilde{V} H^{-1} B^{-1}) b$$

由此我们得到了原方程解的显式表达。

我们用上述方法计算了一个二维场中某区域上的磁位问题。场域如图(3)所示，磁场磁位用标量  $\phi$  表示，已知在  $AB$  边上  $\phi = 0$ ，在  $CD$  边上  $\phi = 70$ ，在  $AC, BD$  边上有第二类边界条件  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ ，得方程如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ \phi(x, 0) = 0, \phi(x, 7) = 70 \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{x=7} = 0 \end{cases}$$

剖分和节点如图(3)，求得结果如下：

50.1147700	30.1854600	50.1539300
30.3082300	50.2140200	30.5038200
50.1725900	30.2985500	

上述数据和实际结果吻合的很好。

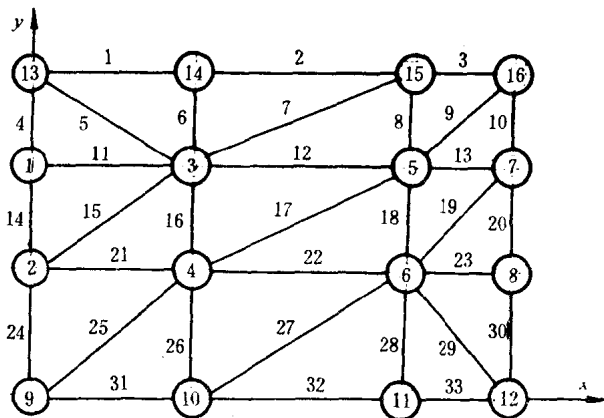


图 3

#### 四、结 语

用广义逆矩阵求解拓扑有限元方程的方法是数值稳定的,而且实际上给出的是刚度矩阵  $K$  的逆阵  $K^{-1}$ ,因此当磁场结构固定,仅对场源进行变化时,用该方法进行优化设计是方便的。同时我们已经从理论上证明了当  $R^n$  分解为  $S$  和  $N(B)$  时,这里  $S$  为  $N(B)$  的  $H^{-1}$  正交补空间,方程  $BIIB^T x = b$  的解可以写成  $x_0 = (B^-)^T H^{-1} B^- b$ , 这里  $B^-$  为相应  $S, N(B)$  分解的一个广义逆矩阵,这种广义逆可看成是  $\{1, 4\}$ ——逆的一种推广,显然这种解的形式是简单的。

#### 参 考 文 献

- [1] Song Guoxiang and Shi Huli "Topology-finite element method for solving electromagnetic field problems," IEE. E. L. 21st July 1983 Vol.19 No.15
- [2] 宋国乡 "变分、网络与有限元" 西北电讯工程学院学报, 1983 年第 3 期。
- [3] 李荣华, 冯果忱编《微分方程数值解法》人民教育出版社(1983)
- [4] Jean H. Bevis, Frank J. Hall "Integer Generalized Inverse of Incidence Matrices," Linear Algebra and Its Application (39)(1981)
- [5] 陈树柏《网络图论及其应用》科学出版社(1983)。

# 边界元法的混合元自适应改进及其应用

宋国乡 王 玲 王家礼

(西安电子科技大学)

本文利用边界元法的混合元来讨论自适应单元  $h$ -改进; 在局部误差估计的基础上引申出基于  $u$  和基于  $q$  两种改进方法, 讨论了其全局误差估计和病态分析, 并给出了计算步骤和简单算例。

## 一、引言

自适应单元改进最初是基于局部误差, 由计算机在一个粗略的初始单元剖分的数值解的基础上, 自动判断并可作局部修改和全局分析, 直到解获得理想的精度。1968年, Pearson<sup>(1)</sup>等分别在其文章里将此概念引入有限差分法; 后却大量与有限元法相联结, Johnson 和 Mclay<sup>(2)</sup>等对弹性上引起的奇异问题使用了  $h$ -改进。Zienkiewicz 等<sup>(3)</sup>首先引入  $p$ -改进的概念, 方便了混合阶的插值。1984年6月, 在 Lisbon 召开了“关于有限元计算中的精度估计和自适应改进的国际会议”(ARFEC), 大大推进了这种方法的发展进程。其中 Rencis, Mullen<sup>(4)</sup>和 Alarcon<sup>(5)</sup>等在自适应改进与边界元法相结合上做了不少努力。

然而, 仍然有许多工作需要做。1986年, 美国学者 Rencis 和 Mullen 在文[6]中用了一种自适应改进法到常值边界元上, 思路简捷, 效果较好; 但正如作者在文章中所指出的: 由于采用常值元, 造成非均匀剖分空间的产生, 很容易在实际计算中出现病态, 所给的计算例题也不尽如意。所以, 本文联想到将常值元改为混合元, 正因为从本质上说  $u$  是连续的,

而  $q = \frac{\partial u}{\partial h}$  不一定是连续的, 使用混合元更符合实际工程, 不仅能提高插值精度, 而且也克服

了拐角点上因方向导数的变化造成的极大的误差, 基于  $u$  改进和基于  $q = \frac{\partial u}{\partial h}$  改进对阻止病态产生和提高适用范围具有一定的意义, 且将这两种方法联合使用, 效果会更好。最后对所求之解进行了全局误差估计和病态分析, 给出了计算步骤及简单算例。

## 二、基于 $u$ 的自适应改进

用边界元法求解齐次 Laplace 方程或亥姆霍兹方程时, 可通过变分原理写成如下形式<sup>(7)</sup>:

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* dr = \int_{\Gamma} q u^* dr \quad (1)$$

$i$  为源点,  $c_i = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$  ( $\theta$  为平面角)

$u^*$  为相应的基本解,  $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$

将边界 $r$ 剖分成 $n$ 段, 由于采用混合元, 在每一段上,  $u$ 呈线性变化, 而 $q$ 为常数, 则(1)式变为:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^i \int_{r_j} u q^* dr = \sum_{j=1}^i q_j \int_{r_j} u^* dr \quad (2)$$

最后将(2)整理成线性方程组求解, 只是要特别注意源点的选取<sup>(7)</sup>.

为了估计满足一定的精度而必须剖分的元素个数, 设最初的边界剖分是均匀的, 不妨用 $u^{i-1}$ 表示第 $i-1$ 步均匀单元剖分计算出的 $u$ 值, 则有误差估计式<sup>(8)</sup>:

$$\int_r (u^{i-1} - u)^2 dr = k(h^{i-1})^2 + O(h^{i-1})^3 \quad (3)$$

$h^{i-1}$ 表示第 $i-1$ 步的元素长度, 显然(3)式对第 $i$ 步均匀剖分仍成立:

$$\int_r (u^i - u)^2 dr = k(h^i)^2 + O(h^i)^3$$

令 $u = u^i$ , 舍去高阶项后, 有:

$$Du^i \equiv \int_r (u^{i-1} - u^i)^2 dr = k \left[ 1 - \frac{(h^i)^2}{(h^{i-1})^2} \right] (h^{i-1})^2 \quad (4)$$

设有参数 $\varepsilon$ , 满足下式中另外需要 $n$ 个均匀剖分的元素<sup>(6)</sup>:

$$\varepsilon \int_r u^2 dr = k \left( \frac{h^{i-1}}{n} \right)^2 \quad (5)$$

将(5)代入(4)即可求得:

$$n^2 = \frac{Du^i}{\left[ 1 - \frac{(h^{i-1})^2}{(h^i)^2} \right] \varepsilon \int_r u^2 dr} \quad (6)$$

由(6)式可直接推断: 对第 $j$ 元在第 $i+1$ 步时需要剖分的元素个数 $n_j^{i+1}$ 有:

$$(n_j^{i+1})^2 = \frac{Du_j^i}{\left[ 1 - \left( \frac{h^{i-1}}{h^i} \right)^2 \right] \varepsilon \int_r u^2 dr} \quad (7)$$

使用混合元,  $u$ 在 $j$ 上呈线性变化, 不妨设

$$u = \varphi_1 u_j + \varphi_2 u_{j+1} \quad (\varphi_1 = \frac{1-\zeta}{2}, \varphi_2 = \frac{1+\zeta}{2}), \text{ 则:}$$

$$\begin{aligned} Du_j^i &= \int_{r_j} (u_j^{i-1} - u_j^i)^2 dr = \int_{r_j} \left[ u_j^{i-1} \varphi_1 + u_{j+1}^{i-1} \varphi_2 - (u_j^i \varphi_1 + u_{j+1}^i \varphi_2) \right]^2 dr \\ &= (u_j^{i-1} - u_j^i)^2 \int_{r_j} \varphi_1^2 dr + 2(u_j^{i-1} - u_j^i)(u_{j+1}^{i-1} - u_{j+1}^i) \int_{r_j} \varphi_1 \varphi_2 dr \\ &\quad + (u_{j+1}^{i-1} - u_{j+1}^i)^2 \int_{r_j} \varphi_2^2 dr \end{aligned}$$



$$= \left[ (u_{j+1}^{i-1} - u_j^i + u_{j+1}^{i-1} - u_{j+1}^i)^2 - (u_j^{i-1} - u_j^i)(u_{j+1}^{i-1} - u_{j+1}^i) \right] \cdot \frac{h_j^i}{3}$$

$$\int_{r_j} u^2 dr = \sum_{j=1}^{n_j^i} \int_{r_j} (u_j^i)^2 dr = \sum_{j=1}^{n_j^i} [(u_j^i + u_{j+1}^i)^2 - u_j^i u_{j+1}^i] \cdot \frac{h_j^i}{3}$$

$n_j^i$  表示第  $i$  步整个边界剖分的单元的总数; 将上两式代入(7)即可求得  $n_j^{i+1}$ , 对每个单元  $j$  进行计算, 则可对整个边界作出改进。

因  $u$  由  $x, y$  两个方向上的分支构成, 则  $n_j^{i+1}$  通常考虑成如下的情况:

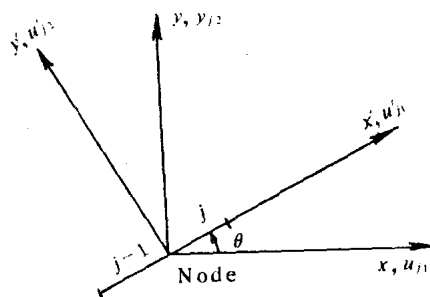


图 1

$$(n_j^{i+1})^2 = \frac{Du_{jp}^i}{\left[ 1 - \left( \frac{h_j^i}{h_j^{i-1}} \right)^2 \right] \epsilon u_p^i} \quad (8)$$

其中:  $Du_{jp}^i = |Du_{j1}^i \cos\theta + Du_{j2}^i \sin\theta|$  (9)

$\theta$  表示  $j$  元素的水平方向角, 如图 1; 有

$$\begin{bmatrix} u_{j1}^i \\ u_{j2}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{j1}^i \\ u_{j2}^i \end{bmatrix}$$

(9)式中:

$$Du_{j1}^i = \frac{h_j^i}{3} \cdot \left\{ [(u_{j1}^{i-1} - u_{j1}^i) + (u_{j+1,1}^{i-1} - u_{j+1,1}^i)]^2 - (u_{j1}^{i-1} - u_{j1}^i)(u_{j+1,1}^{i-1} - u_{j+1,1}^i) \right\}$$

$$Du_{j2}^i = \frac{h_j^i}{3} \cdot \left\{ [(u_{j2}^{i-1} - u_{j2}^i) + (u_{j+1,2}^{i-1} - u_{j+1,2}^i)]^2 - (u_{j2}^{i-1} - u_{j2}^i)(u_{j+1,2}^{i-1} - u_{j+1,2}^i) \right\}$$

且  $u_p^i = \left| \sum_{j=1}^{n_j^i} [(u_{j1}^i + u_{j+1,1}^i)^2 - u_{j1}^i u_{j+1,1}^i] \cos^2\theta \cdot h_j^i / 3 \right.$   
 $\left. + \sum_{j=1}^{n_j^i} [(u_{j2}^i + u_{j+1,2}^i)^2 - u_{j2}^i u_{j+1,2}^i] \sin^2\theta \cdot h_j^i / 3 \right|$  (10)

(8)式称为基于  $u$  的自适应改进公式。它依赖于元素在  $xy$  平面的取向和边界条件  $u$  沿着元素表面上的规定, 表明了由第一、二步元素单元外推到满足一定精度要求的第三步单元剖分的可行性。当  $u$  表示为平行于元素表面的固有函数, 则在改进公式中, (9)式由下式替代:

$$Du_{jp}^i = \int_{r_j} (u_{j1} - u_{j1}^i)^2 \cos\theta dr + \int_{r_j} (u_{j2} - u_{j2}^i)^2 \sin\theta dr \quad (11)$$