〔日〕小林龙一 著
何文杰 译
秋 同 校

OR 运筹学概论

国防工业出版社

运筹学概论

〔日〕小林龙一 著

何文杰 译

秋 同校

国防工業出版社

内容简介

这是一本运筹学的入门读物。全书共分十一章，深入浅出地介绍了运筹学各主要分支的原理和应用，每章末附有少量习题，书末有习题简解，对自学的读者尤为适合。

本书可供从事系统工程、企业管理的工程技术人员以及高等院校有关专业的师生学习参考。

OR概論
小林竜一 著
共立出版株式会社，1977

*

运筹学概论

〔日〕小林龙一 著

何文杰 译

秋 同 校

*

国防工業出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$850 \times 1168\ ^1/_{32}$　印张 $7^5/_8$　198千字

1985年4月第一版　1985年4月第一次印刷　印数：00,001—20,500册

统一书号：15034·2861　　定价：1.55元

序

什么是运筹学？简单地说，就是动脑筋想办法。在制定和实施某项计划时，如果这项计划从前有许多人搞过，留下了许多记录数据，这就可以用统计学的方法去分析，从而找出实施计划的好办法。但如果接触的是全新的事物，或者是着手进行没有多少人干过的开拓性工作，这时，由于完全没有可供利用的原始数据，所能依靠的只有自己的大脑（智慧）。这就是所谓运筹学的学问。

由于在运筹学这门学科中，对应于各种各样不同的目的，所采用的方法也是各种各样的，而且，将来出现新的目标和计划时，还必须另行研究合适的新方法。所以，现在还只能大致地说以下这些都是运筹学的重要方法（分支）：

1．线性规划和非线性规划；

2．统计学和概率论；

3．决策论和对策论；

4．计划评审技术和关键路线法；

5．模拟（用电子计算机进行试验）；

6．信息论；

7．动态规划；

8．排队论。

因此，在本书中，作者只想针对初学者介绍以下两方面内容：一是介绍目前在实践中已被广泛应用而且效果显著的方法，如线性规划、排队论和计划评审技术、关键路线法等；二是目前虽然还没有进入实用阶段，但进一步研究，将来可能广泛应用的方法，如整数线性规划之类。

本书虽定名为《运筹学概论》，但是作者并不打算论述运筹学的全部分支，请读者给予理解。

小林龙一

目 录

第一章　建立数学模型

如果概括成一句话，运筹学可以说是“建立数学模型并求解，然后对解作切合实际的解释”。运筹学的这三个阶段——**建立数学模型、数学求解**和**对解进行解释**，都是不容易掌握的，尤其是第一阶段“建立数学模型”，初学者特别不易理解。因此，本章原则上打算详细介绍在社会科学和自然科学的广泛领域中，建立数学模型的方法，还要介绍作为第一阶段的结果的微分方程或积分方程（有时是差分方程或联立方程组）的解法。最后，对这个解进行解释并得出明确结论。

此外，运筹学的上述三个阶段当然不是相互独立的，在“建立数学模型”的同时，要考虑到什么方程好解，什么方程不好解，这显然需要较高的数学水平。而且，在“对解进行解释”时，也必须考虑到“建立数学模型”的过程是怎样进行的，从而判断解答的数值是否有误差。这是因为在“建立数学模型”时，不可能将各种自然现象的本质毫无遗漏地都列成方程表示出来。即使能列出，这个方程一定会繁杂到难以求解的程度。所以，归根结底，只能考虑现象本质中特别重要的两、三种性质。

要想自如地建立各种数学模型，唯一的秘诀是反复练习直至娴熟。如果一定要说出其方法步骤的话，那就是，首先是从所考虑的对象中选出最重要的两、三种性质，并且不要一开始就深究其细节，这样列出方程就比较容易求解。然后，根据这个大致的解和结论，再考虑到某些其它性质，重新修正模型，使它更为精确，这样一步步地深入。如果要打个比喻，那就是“建立数学模型”必须具备“能洞察大自然美并能在画布上描绘出来的画家的眼睛”。

人们常说，用数学公式是无法描绘复杂的社会现象的。其实，

说这种话的人只是强调了矛盾的特殊性，而忽略了矛盾的普遍性。的确，社会科学就象语言学的文法一样，不存在没有例外的法则。但是，如果只强调个别的例外，就找不出一般的法则和公式。我们应当先不管这些例外，在找到一般法则以后，再考虑应当怎样解释这些例外。

其次，要想在"数学求解"方面得心应手，无疑要钻研尽可能广泛的各个数学分支。在这一阶段，应当努力弄清定理的具体含义及其证明的思想。一般数学教科书往往为了理论上的完整而使用一些令人费解的逻辑进行证明，虽然这对数学本身是必要的，但是，这样的书对于数学工作者以外的人就不太适宜。换句话说，有许多被数学工作者掌握的证明定理用的严格而巧妙的方法，并没有理由要求其它的科学家和工程技术人员也都完全掌握。

但是，为了能很好地理解定理的重要作用，需要了解定理证明的思路，了解以后还要将它记住，否则，就不能灵活应用。为此，读一下它们的证明固然不错，但数学书上的证明往往很复杂难懂，不妨先代进数值作为例子验算一下，并画出图来看一看，就容易理解了。

"对解进行解释"时，应注意讨论如果引进在建立数学模型时已舍弃了的条件，会产生什么结果。要把这一阶段工作搞好，重要的是积累所谓的"常识"。例如在工程上，计算木桥横梁的粗细时，搞错一位小数点，就可能制造出比原要求粗了九倍或细了十分之九的梁。这时，如能感到不对头就是有常识。

所谓常识，也就是以往的经验在无意识中的呈现。因此，这也说明了我们只有多次反复地进行练习。

1.1 电锅的销售问题

众所周知，电锅是战后日本家用电器中很受欢迎的一个产品。现在，我们设想自己是一个在电锅制造厂计划部门搞需求预测的人来考虑这个问题。

首先定义以下的符号：

t ——时间；

$x(t)$——开始销售以来，售出电锅的总数量，是时间 t 的函数；

x_∞——日本全国需要购买电锅的顾客数量（大体上可按每户一个计，可用全国的总户数）；

k ——比例常数（说明见后）。

研究方法如下：

（1）电锅这一类家庭主妇购买的商品，在利用电视和广播做广告的同时，实物广告的效果是很大的。比较已售出 10 个电锅和 100 个电锅两种情况时，由于实物广告的作用对应于后一种情况下的销售量的增加将是前者的 10 倍。也就是说，电锅的销售速度 $\frac{dx}{dt}$ 是与 $x(t)$ 成比例的，即

$$\frac{dx}{dt} \propto x$$

式中 $x = x(t)$。此式若取 k 为比例常数，可导出

$$\frac{dx}{dt} - kx = 0 \tag{1.1}$$

这个微分方程可按下述方法求解

$$\frac{dx}{dt} = kx \Longrightarrow \frac{dx}{x} = kdt$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int kdt + c \ (c \text{ ——积分常数})$$

$$\Longrightarrow \log x = kt + c \Longrightarrow x = e^{kt+c}$$

$$\Longrightarrow x = c' e^{kt} (c' = e^c)$$

这个解的图形如图 1.1 所示，可见电锅的销售量会爆发式（按几

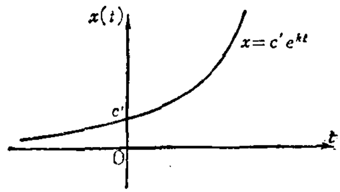

图1.1　$x(t) = c' e^{kt}$

何级数）地增长。下面研究 c' 和 k 的实际数值。

令 $t=0$ 为开始销售的时刻，此时 $x(t)$ 也是 0，代入

$$x=c'e^{kt} \tag{1.2}$$

因为有

$$0=c'e^0=c'$$

所以，$c'=0$。再将 $c'=0$ 代入（1.2）式，就得到 $x\equiv 0$，结果得到一个电锅也没有卖出去的矛盾。这个矛盾是由于只考虑了实物广告的力量。开始一个没有售出，就是没有实物广告，于是永远一个也卖不出去。这个缺点要在以后的进一步分析中加以修正，将报纸、电视等的广告作用也考虑进去，使方程更为精确。

然而，在这里为回避这个矛盾，可以假设 $t=0$ 时，通过某种努力已经卖出了 a 个。即当 $t=0$ 时，$x=a$（a 应当是很小的数）。代入（1.2）式，得

$$c'=a$$

则，（1.2）式成为

$$x=ae^{kt}$$

再就是求 k 值的问题。这可以从销售以来几个月内所记录的销售量求出 $\frac{dx}{dt}$，再求出各 t 值的 $\left(\frac{dx}{dt}\right)/x$，加以平均即可。

1.2 电锅销售问题的精确化

上节分析的电锅销售问题，对于刚开始销售的初期，可以认为是合适的。如果这种产品已经普及到全国大多数家庭，那么，上述（1）的假设将不能成立。为研究这种情况，将 x_∞ 作为全部需要量，并采用下面的假设。

（2）当产品相当普及时，销售速度 $\frac{dx}{dt}$ 与潜在的需要量（$x_\infty-x$）成比例。从该产品销售的全过程来看，应该将这个性质与（1）的情况结合起来考虑，电锅的销售速度 $\frac{dx}{dt}$ 是与 $x(x_\infty-x)$ 成比例的。这是因为当 x 较小时，$x(x_\infty-x)$ 是与 x

成比例的函数；当 x 趋向于 x_∞（当然 $x<x_\infty$）时，$x(x_\infty-x)$ 是与（$x_\infty-x$）成比例的函数。根据这个假设，得到微分方程

$$\frac{dx}{dt}=kx(x_\infty-x) \tag{1.3}$$

此式可用如下的计算求解

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}=kx(x_\infty-x) &\Longrightarrow \frac{dx}{x(x_\infty-x)}=kdt \\
&\Longrightarrow \int\frac{dx}{x(x_\infty-x)}=\int kdt+c \\
&\Longrightarrow \int\frac{1}{x_\infty}\left(\frac{1}{x_\infty-x}+\frac{1}{x}\right)dx=\int kdt+c \\
&\Longrightarrow \frac{1}{x_\infty}\left(-\log(x_\infty-x)+\log x\right)=kt+c \\
&\Longrightarrow \log\frac{x_\infty-x}{x}=-x_\infty kt-x_\infty c \\
&\Longrightarrow \frac{x_\infty-x}{x}=e^{-x_\infty kt-x_\infty c} \\
&\Longrightarrow x_\infty-x=xe^{-x_\infty kt-x_\infty c} \\
&\Longrightarrow x_\infty=x\left(1+e^{-x_\infty kt-x_\infty c}\right) \\
&\Longrightarrow x=\frac{x_\infty}{1+e^{-x_\infty kt-x_\infty c}} \\
&\Longrightarrow x=\frac{x_\infty}{1+c'e^{-x_\infty kt}}\ (c'=e^{-x_\infty c})
\end{aligned}$$

于是得

$$\frac{x(t)}{x_\infty}=\frac{1}{1+c'e^{-x_\infty kt}}\ (c' \text{——积分常数}) \tag{1.4}$$

如果复核一下上述计算，就会发现在进行等式变形时，两边都用 $x(x_\infty-x)$ 除过。这时，我们是默认了 $x(x_\infty-x)\neq 0$，对于这一点值得很好推敲。因为 $x=0$ 或（$x_\infty-x$）$=0$ 时，都满足原（1.3）式，这些显然是原方程的**奇异解**●。

● 奇异解（Singular solution）和特解不同，特解包括在通解之中，它是将某特定数值代入待定常数而得到的，而奇异解则不包括在通解之中，但它满足原方程。

（1.4）式也称为**增长曲线**。当 $c'=1$ 时，对应于 $x_\infty k=2$、1 和 $\frac{1}{2}$ 的增长曲线如图 1.2 所示。

这时，虽然得到解为（1.4）式，但用于实际的需求预测时，还必须根据过去的数据来确定（1.4）式中的待定常数 c' 和 k 的值●。在推导（1.4）式的过程中，曾得到

$$\log\frac{x_\infty - x}{x} = -x_\infty kt - x_\infty c$$

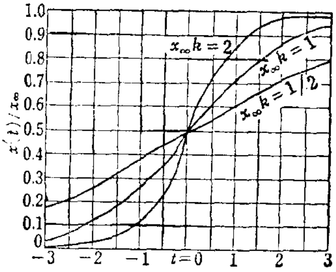

图1.2 增长曲线

在上式中取

$$Y=\log\frac{x_\infty - x}{x} \quad X=-x_\infty t \quad b=-x_\infty c$$

于是，问题就变成了根据过去的数据 (Y_i, X_i)，按最小二乘法来求

$$Y=kX+b$$

的回归直线的问题。

以上我们一直假设 x_∞ 为已知。若 x_∞ 为未知，也有估算 x_∞、k、c 的方法。

1.3 兰切斯特二次法则

现有白军 m 人与红军 n 人作战（见图 1.3），试计算战斗过程中双方的死亡情况以及最后哪一方失败。现作如下的讨论：

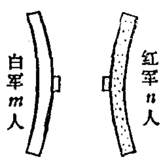

图 1.3

（1）用 t 表示时刻，并假设战斗始终是均匀连续地进行。虽然实际战斗有时激烈，有时停止，但只要认为战斗停止时，时钟停止；战斗越激烈，时钟走得越快，刚才的假设就可以成立。

● 这里假定 x_∞ 的值可以用其它方法或直观估算出来。

（2）当红军是 100 人和 1000 人的时候，其射出的子弹数目之比应是$100:1000=\frac{1}{10}$。在这两种情况下可以认为白军的死亡速度之比也是$\frac{1}{10}$。即白军的死亡速度与红军的兵力是成正比的，也就是

$$\frac{dm}{dt}\propto n$$

同样，红军的死亡速度也是与白军的兵力成正比的，即

$$\frac{dn}{dt}\propto m$$

如果比例常数分别取作 k_1、k_2，则

$$\left.\begin{aligned}\frac{dm}{dt}&=-k_1 n \qquad (k_1>0)\\ \frac{dn}{dt}&=-k_2 m \qquad (k_2>0)\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

式中，k_1、k_2前面的负号表示兵力减少，并且 k_1、k_2 是由两军装备的优劣所决定的。k 值大，就表示火力配备较强。一般用E表示$\frac{k_1}{k_2}$，称为**交换比**，即

$$E=\frac{k_1}{k_2} \tag{1.6}$$

要求解上面导出的微分方程，先用（1.5）式中的第 2 式除第 1 式，得

$$\frac{dm}{dn}=E\frac{n}{m}$$

再用下法求解

$$\frac{dm}{dn}=E\frac{n}{m}\Longrightarrow mdm=Endn$$

$$\Longrightarrow\int mdm=E\int ndn+c$$

$$\Longrightarrow\frac{m^2}{2}=E\frac{n^2}{2}+c \qquad (c\text{——积分常数})$$

则解为

$$\frac{m^2}{2}-E\frac{n^2}{2}=c \tag{1.7}$$

这就是**兰切斯特二次法则**。式中m、n都是时间t的函数，应写成$m(t)$、$n(t)$；积分常数c是与时间无关的常数。

这样导出的结论，从（1.7）式来看，是非常简单的，但却很有用，研究了下面的例子就会明白。

〔**例**〕 战斗开始时，白军有100人，红军有50人。假设两军的装备性能相同，即令$E=\frac{k_1}{k_2}=1$时，胜负将会怎样，胜的一方还能剩下多少人呢？

解 （1.7）式是与时间t无关的。首先，当$t=0$时，将$m=100$、$n=50$代入（1.7）式，列出其关系式

$$\frac{100^2}{2}-1\times\frac{50^2}{2}=c$$

得

$$c=\frac{7500}{2}$$

再将c值代入（1.7）式，有

$$\frac{[m(t)]^2}{2}-\frac{[n(t)]^2}{2}=\frac{7500}{2} \tag{1.7'}$$

因战斗结束的时候有一方的人数为零。显然，$n=0$是解。代入（1.7′）式，得

$$m^2=7500$$

于是，有

$$m\approx 87$$

即白军的100人战死13人，剩下87人；红军50人全部被消灭（兰切斯特法则就是战争的法则）。

兰切斯特（F. W. Lanchester，1878—1946）是英国有创见的科学家，他的思想不仅保留在今天的空气动力学兰切斯特-普兰特尔三维机翼理论之中，而且有像二次法则这类可算是运筹学

萌芽的东西，广泛保留在许多方面。

1.4 沃尔特拉的生存竞争方程

第一次世界大战中，因为战争的原故很少捕鱼，按理战后应能捕到最多的鱼才是。可是大战后，在地中海却捕不到鱼❶，因而渔民困惑不解。最先对这种现象进行分析的是沃尔特拉（Vito Volterra，1860—1940，罗马大学教授）。

根据统计，鲨鱼的捕获量占总捕鱼量的百分比如表 1.1 所示。

表 1.1

（单位：%）

地点 \ 年份	1905	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
的里雅斯德	—	5.7	8.8	9.5	15.7	14.6	17.6	16.2	15.4	—	19.9	15.8	13.3	10.7	10.2
里雅卡	—	—	—	—	—	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4	27.3	16.0	15.9	11.8	10.7
威尼斯	21.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30.9	25.3	25.9	26.8	26.6

沃尔特拉按如下方法进行分析：

令 N_1 为鱼饵❷ 的数量；

N_2 为鱼的数量；

t 为时间。

微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1(\varepsilon_1-\gamma_1 N_2)\\ \frac{dN_2}{dt} &= -N_2(\varepsilon_2-\gamma_2 N_1)\end{aligned}\right\}\qquad(1.8)$$

式中 ε_1、ε_2、γ_1、γ_2 都是正常数。上面第 1 式中鱼饵的增长速度 $\frac{dN_1}{dt}$ 大体上与 N_1 成比例，也就是与 $\varepsilon_1 N_1$ 成比例， 而被鱼吃掉

❶ 指鲨鱼。——译者

❷ 指供鲨鱼作为食物的一般小鱼。——译者