非綫性振动理論中的李雅普諾夫与邦加来方法

И. Г. 馬尔金著

科 学 出 版 社

非綫性振动理論中的李雅普諾夫与邦加来方法

И. Г. 馬尔金著

秦元勳　董金柱　譯
刘永清　岳明进

科　学　出　版　社

1959

И. Г. МАЛКИН
МЕТОДЫ ЛЯПУНОВА И ПУАНКАРЕ
В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ
Государственное Издательство
Технико-Теоретической Литературы
Ленинград 1949 Москва

內 容 簡 介

李雅普諾夫及邦加来的經典著作內容复杂且范圍也較广泛，因而为了研究与非綫性振动問題有关的实际运用而須參考他們的著作时，会感到非常困难．本专論的基本任务之一，便是对这些經典著作在非綫性振动方面的結果进行闡述．

全书共分六章．第一章闡明了与小參数有关的非綫性微分方程組的周期解的邦加来理論．第二章給出拟綫性振动理論．第三章耕周期运动的稳定性理論．第四章闡述李雅普諾夫系統．第五、六章簡述近于李雅普諾夫系統的振动系統的現代研究．

此书可供數学力学系高年級学生、科学工作者及工程师作参考之用．

非綫性振动理論中的
李雅普諾夫与邦加来方法

И. Г. 馬尔金著
秦元勳　董金柱
刘永清　岳明进　譯

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第061号
中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

1959年11月第一版　书号：1956　字数：155,000
1959年11月第一次印刷　开本：850×1168 1/32
（京）0001—5,000　印张：6 1/16
定价：0.90元

前　言

滿傑尔斯塔姆（Мандельштам），帕帕勒克西（Папалекси），安德洛諾夫（Андронов）及其后継者們关于非綫性振动理論的有名研究表明了李雅普諾夫和邦加来的方法对此理論具有特出的意义．这里所指的是：

a）李雅普諾夫在他的經典著作“关于运动稳定性的一般問題”中研究过的非綫性微分方程的运动稳定性問題的解法及週期解的求法；

b）邦加来在他的經典研究“天体力学新方法”及“微分方程定义的曲綫”中研究过的非綫性微分方程週期解的求法和积分曲綫形状的研究法．

李雅普諾夫和邦加来的这些著作也研究过在非綫性振动理論中有应用的数学分析的其它一些重要問題．

李雅普諾夫和邦加来的著作內容非常复杂，范围也非常广闊．因此，为了研究与非綫性振动問題有关的实际运用而須参考他們的著作时，是会感到非常困难的．加之这些著作并不是专講非綫性振动的，且所敍問題并非对此理論都有所应用．因此，在篇幅不大的书中講述对于在非綫性振动理論中有直接应用的李雅普諾夫和邦加来的結果，我們覚得是适当的．在編成这单行本时，摆在我們面前的主要任务之一卽此．

另一方面，必須指出，李雅普諾夫与邦加来的普遍結果如何应用于非綫性振动問題的解法，卽敍述实际的方式和計算的方法．

大家知道，如果是对于一般类型的非綫性系統，李雅普諾夫和邦加来的方法实际运用有很大的数学上的困难．一般說来，仅只对于特殊类型的系統，这些困难才可能克服．但特別，对于与綫性系統相差很小的系統，則更容易克服．在滿傑尔斯塔姆，帕帕勒克

西，安德洛諾夫及其后継者們的研究中所考察的正是这种类型的系統．这样产生了拟綫性振动理論．尽管在此理論中所研究的系統的性质极其特殊，可是在它的应用中取得了非常重要的实际結果．本书第二章将敍述这一理論．

許多重要的实际問題不能置于拟綫性理論的范围中，甚至在振动方程式实际与綫性相差很小的情况．但我們尙可証明，与应用李雅普諾夫和邦加来方法相关的数学困难，对更一般的类型的系統还可以成功地克服．这里所指的是与李雅普諾夫系統相差很小的系統．本书相当大的部分是講关于这种类型的振动理論的．

我們轉而較为詳細地說明本书的內容．

在第一章中敍述依赖于小参数的非綫性微分方程系統的週期解的邦加来的理論．在这里我們記述并补充邦加来的若干結果，由此大为簡化它們在实际中的应用．

在第二章中，如以上所述，闡明拟綫性振动理論．

第三章是关于週期运动稳定性的理論．这里針对週期运动闡述李雅普諾夫的关于稳定性的主要結果且指出週期振动稳定問題解決的实际方法．

此章中也闡明在週期运动稳定性及一般在非綫性振动理論中起非常重要作用的具有週期系数的綫性微分方程的一般理論．

我們对此理論的敍述与通常所采取的基于綫性变换理論者有所不同．这里的似乎更为簡单．

在第四章說明李雅普諾夫探討过的非綫性微分方程的若干特殊系統的週期解的理論，这种系統我們称为李雅普諾夫系統．此地显著地簡化了主要証明．从而所有的敍述比李雅普諾夫的更为簡便．

在第五章及第六章中敍述近于李雅普諾夫系統的振动系統的研究結果．关于这方面，在第五章中，研究具有一个自由度的系統，在第六章中研究具有多个自由度的系統．

由上所述，可見此书不能包括所有非綫性振动理論的基本問題．特别在其中只研究週期振动，因为李雅普諾夫和邦加来的理

論的主要应用正是这种类型的振动。在本书中不研究近乎週期的及特别是拟週期的振动，因此在本书中沒敍述克里洛夫（Н. М. Крылов）及包格留伯夫（Н. Н. Боголюбов）的关于非綫性振动理論的重要的研究。

此书基于作者在1943—1946年給烏拉尔国立大学及烏拉尔工学院学生及工作人員的講义而写成的。

目　录

第 一 章

邦加来的周期解的一般理論

§1. 邦加来方法的概念．小参数

考慮微分方程系

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \cdots, x_r) \quad (s = 1, 2, \cdots, r). \tag{1.1}$$

我們假設这些方程的右端是变数 $x_1, \cdots, x_r$ 在某区域 G 中的解析函数，且为独立变数 t 的連續周期函数，t 假設为正的．今后我們到处假設这些函数的周期等于 2π，显然这并不失去討論的普遍性．

問題在于寻求方程(1.1)的周期解，即这些方程的这样的解

$$x_s = f_s(t),$$

$f_s(t)$ 是 t 的周期函数．这些函数的周期显然不能异于 2π．自然，此时假設方程(1.1)的一般解是未知的．

为了解决提出的問題，可以广泛应用一种方法，这种方法是后面要講到的实用的方法．在大部分实际問題中，所研究的微分方程的右端可分出若干項为一組，它与其余的"主要"項来比較是很小的．这些項对所研究的問題(周期問題或其它問題)沒有重大的意义，去掉它就可得到更簡单的方程組．解出这簡化的系統問題，或者以这样得到的解答为限，或者把它当作第一近似解，回到原方程，并对給定問題采用某种特别設計的逐次漸近法．

这方法就是邦加来寻求周期解方法的基础．为了使問題有确切的数学提法，邦加来在研究中引入了所謂的"小参数"．邦加来假設方程(1.1)的右端不仅依賴于变数 $t, x_1, \cdots, x_r$，并且依賴于

某一参数 μ，当此参数充分小时为解析函数．在此假設下，視 μ 为充分小，方程(1.1)可表成下形：

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s^{(0)}(t,x_1,\cdots,x_r)+\mu X_s^{(1)}(t,x_1,\cdots,x_r)+$$
$$+\mu^2X_s^{(2)}(t,x_1,\cdots,x_r)+\cdots \tag{1.2}$$
$$(s=1,2,\cdots,r),$$

其中 $X_s^{(0)}, X_s^{(1)},\cdots$ 为 $x_1,\cdots,x_r$ 的解析函数，并且是 t 的連續周期函数．形式

$$\mu X_s^{(1)}+\mu^2X_s^{(2)}+\cdots$$

就是小項的总和．在方程(1.2)中，去掉这些小項，我們卽得簡化了的方程系統

$$\frac{dx_s^0}{dt}=X_s^{(0)}(t,x_1^0,\cdots,x_r^0)\quad(s=1,2,\cdots,r), \tag{1.3}$$

此系統我們称之为“派生”系統．設

$$x_s^0=\varphi_s(t)\quad(s=1,2,\cdots,r), \tag{1.4}$$

是派生系統的任何周期解．如依以前所述的方法，我們取它作为基本系統的周期解的第一近似．我們默認，解(1.4)眞正对应于系統(1.2)的周期解，而此解当 μ 充分小时与解(1.4)相差很少．但这类的假定一般說是不正确的，邦加来是第一位充分严格地指出，卽使微分方程(在任意的問題中)右端任意小的变化，亦可能引起这一方程解的性質上的巨大質变．邦加来指出过，派生系統的周期解并不总是对应于基本系統的周期解．可能发生这种情况，对于派生系統有周期解，但并不存在基本系統的周期解，也可能发生若干个这种解或甚至无数多个解．換句話說，可能出現：求系統(1.2)的周期解与求系統(1.3)的周期解問題相互間并无共同之处．由此产生了下面的基本問題：求系統(1.3)的已知周期解对应于系統(1.2)的一个且只一个周期解的条件．显然研究的主要兴趣仅在系統(1.2)与(1.3)的周期解之間不存在单值对应的情况．由此可見，这里所指的是关于系統(1.2)的这样的周期解，当 μ 充分小时与系統(1.3)的对应的解相差很少，或者更确切一些說，是关于系

統的这样的周期解，当 $\mu = 0$ 时它变成系統(1.3)的对应的解．

邦加来的理論即致力于前述問題的研究．

§2. 基本系統周期解存在的条件．邦加来定理

設

$$x_s^0 = \varphi_s(t) \quad (s = 1, 2, \cdots, r) \tag{2.1}$$

为派生系統(1.3)的任何周期解，此解在函数 X_s^0 的解析性的区域 G 中．我們称此为派生解．考虑基本系統(1.2)的解

$$x_s = x_s(t, \beta_1, \cdots, \beta_r, \mu) \quad (s = 1, 2, \cdots, r), \tag{2.2}$$

它由初始条件

$$x_s(0, \beta_1, \cdots, \beta_r, \mu) = \varphi_s(0) + \beta_s \quad (s = 1, 2, \cdots, r) \tag{2.3}$$

所确定，且設法选择 β_i 为 μ 的这样的函数，使得当 $\mu = 0$ 时，它变成零，且使解(2.2)为周期的，其周期为 2π．換句話說，即設法取这样的 β_i，使得(2.2)为对应于派生解(2.1)的周期解．为此，必有下列条件滿足：

$$\psi_s = x_s(2\pi, \beta_1, \cdots, \beta_r, \mu) - x_s(0, \beta_1, \cdots, \beta_r, \mu) = 0 \tag{2.4}$$
$$(s = 1, 2, \cdots, r).$$

事实上，如(2.2)是周期解，則条件(2.4)显然滿足．反之，如滿足条件(2.4)，則由于方程(1.2)右端的周期性，我們得到时間 $t = 2\pi$ 时与初始时有相同的条件，因而解(2.2)是周期的．

如所周知，按微分方程論，由于方程(1.2)右端的条件，φ_s 将是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 及 μ 的解析函数，只要后面这些数值相当小．此外，当 $\beta_1 = \cdots = \beta_r = \mu = 0$ 时，φ_s 变成零．事实上，当 $\beta_1 = \cdots = \beta_r = \mu = 0$ 时，解(2.2)变成派生解，而派生解按其条件是周期的．因此，当 $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = \mu = 0$ 时，函数行列式

$$D = \frac{\partial(\psi_1, \cdots, \psi_r)}{\partial(\beta_1, \cdots, \beta_r)} \tag{2.5}$$

不为零，則存在唯一的函数組 $\beta_i(\mu)$，滿足方程(2.4)，当 $\mu = 0$ 时变为零．当 μ 充分小时，这些函数是解析的．将这些函数代入(2.2)我們得到方程(1.2)的周期解，它当 $\mu = 0$ 时变成派生的．显

然这些解对 μ 是解析的，这样一来，我們得到下述的邦加来定理.

定理 如果对所研究的派生解的函数行列式 (2.5) 在 $\beta_1 = = \cdots = \beta_r = \mu = 0$ 时不变成零，則当 μ 充分小时，存在一个且只一个基本系統的周期解.当 $\mu = 0$ 变成派生解的，且对 μ 是解析的.

§ 3. 函数 ψ_i 的函数行列式变为零时的情况

現設函数行列式(2.5)变成零. 在此情况，解决方程(2.4)的問題变得非常复杂. 从数学的观点来說，这种情况可視为特殊的. 但是，不难看到，正是雅可比(2.5)变成零的这个情况对于非綫性振动的理論来說是最重要的.

例如，假設我們有“小非綫性”的情况，即派生系統是綫性的情况. 在此，我們假設問題是眞正非綫性的，即把它当作綫性来解释时将导致关于振动展开的性質(主要在于定性的方面)的不正确的結論. 如果这里所指的是周期振动，則基于邦加来定理，我們可以断定：在所考慮的情况，行列式(2.5)变成零，因为在相反的情况，我們在非綫性的問題和綫性化了的問題之間有着完全的对应.

上例表明，在非綫性振动理論中，行列式(2.5)变成零的情况起着如何重要的作用. 因此并不奇怪，邦加来对行列式(2.5)变成零的两个特殊情况的研究，在实質上，包含了多少年以后才发現的，非綫性振动情况的，某些基本現象的完备的理論根据.

現在我們进而研究这些情况.

第一种情况. 設派生系統(1.3)有依賴于一个任意参数 h 的周期解族

$$x_s^0 = \varphi_s(t, h) \quad (s = 1, 2, \cdots, r), \tag{3.1}$$

又設所研究的派生解亦屬此族，其对应的参数值 $h = h^*$. 我們証明在此情况下，函数行列式必变为零. 事实上，如果这个行列式不为零，則当 $\mu = 0$ 时方程系統(2.4)在 $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$ 的近傍有唯一的解 $\beta_1 = \beta_2 = \cdots \beta_r = 0$. 但在条件 $\mu = 0$ 之下，方程(2.4)表示，具初始条件(2.3)的派生系統的解的周期性的必要及充分条件. 但在我們的假設下，不仅解 $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$ 应滿足这些条件，而

且依賴于一任意参数的解

$$\beta_s=\varphi_s(0,h)-\varphi_s(0,h^*)\quad(s=1,2,\cdots,r)$$

也滿足这条件，与这前述的（解的惟一性）矛盾．

这样，行列式(2.5)在所研究的情况变为零．为了闡明周期解的存在問題，由方程(2.4)中消去 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 中的任意 $r-1$ 个．这是时常可能作到的，只要在行列式(2.5)中有一个 $r-1$ 阶的子式不为零即可．为确定起見，設 $\beta_1,\cdots,\beta_{r-1}$ 已被消去．在此我們設这些量是 β_r 与 μ 的解析函数，并当 $\beta_r=\mu=0$ 时，变成零．于是我們得到确定 β_r 的下形的方程

$$F(\beta_r,\mu)=0,\tag{3.2}$$

从此式 β_r 可定为 μ 之解析函数，当 $\mu=0$ 时变成零．

今更詳細地研究这方程．函数 F 对 β_r 与 μ 是解析的．此外它亦依賴于派生解中出現的参数 h^*．因为在 $\mu=0$ 时方程(2.4)有依賴于任意参数的无限多个解，故方程(3.2)在 $\mu=0$ 对于 β_r 亦有无限多个解，因此当 $\mu=0$ 时方程(3.2)恆等地滿足．由此，方程(3.2)必具下形

$$\mu\Phi(\beta_r,\mu)=0,$$

此地 Φ 亦为 β_r 与 μ 的解析函数．但一般来說，这函数当 $\beta=\mu=0$ 时并不为零．弃掉因子 μ，展成級数，我們可将方程(3.2)表成下形

$$P(h^*)+Q(h^*)\cdot\beta_r+R(h^*)\mu+\cdots=0,$$

此地 P,Q,R，为 h^* 的函数．为使此方程有当 $\mu=0$ 变成零的这种解，h^* 必須滿足方程

$$P=0.\tag{3.3}$$

这样，我們得到了邦加来的重要的命題：

族(3.1)的无限多个派生解中，仅参数 h^* 具有一定的数値者，才能眞正对应于基本系統的周期解[1]．

因此，在所研究的情况下，基本系統与派生系統在性質上有显著的定性的差別．下面我們将看到这一事实对于非綫性振动理論

1) 自然可能有例外，此时方程(3.3)恆等滿足，这种情况需要特別的研究．

有巨大的意义.

邦加来的結果可以推广并补充. 将問題提得更寬些. 設派生系統有依賴于K个任意常数的周期解族

$$x_s^0 = \varphi_s(t, h_1, \cdots, h_k) \quad (s = 1, 2, \cdots, r), \tag{3.4}$$

又設派生解属于此族,其参数对应于 $h_j = h_j^*$. 此外,設矩陣

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial h_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial h_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial h_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial h_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial h_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial h_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial h_k} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial h_k} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial h_k} \end{matrix} \right\| \tag{3.5}$$

中至少有一个k阶行列式当 $t = 0$, $h_j = h_j^*$ 时不等于零. 这一假定不能視为特殊的限制,因为这表示在派生解的附近,解(3.4)的k个初值可以任意选择,即常数 $h_1, \cdots, h_k$ 是独立的.

在此情况下,当 $\mu = 0$ 时方程(2.4)有依赖于k个任意常数的解

$$\beta_s = \varphi_s(0, h_1, \cdots, h_k) - \varphi_s(0, h_1^*, \cdots, h_k^*) \tag{3.6}$$

$$(s = 1, 2, \cdots, r).$$

因此,不仅行列式(2.5),而且所有的一直到 $r - k + 1$ 阶的子式,在$\mu = \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$ 时,均等于零. 假設一个 $r - k$ 阶子式在此条件下不为零. 为了确定起見,設

$$\left\{\frac{\partial(\psi_1, \cdots, \psi_{r-k})}{\partial(\beta_1, \cdots, \beta_{r-k})}\right\}_{\mu=\beta_j=0} \neq 0. \tag{3.7}$$

由假定,矩陣(3.5)的k阶子式在 $t = 0$, $h_j = h_j^*$ 时不全为零,因此可以証明行列式

$$\left\{\frac{\partial(\varphi_{r-k+1}, \cdots, \varphi_r)}{\partial(h_1, \cdots, h_k)}\right\}_{t=0, h_j=h_j^*} \tag{3.8}$$

在任何情况下不为零. 事实上,考虑齐次綫性方程組

$$\left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \beta_1}\right) A_1 + \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \beta_2}\right) A_2 + \cdots + \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \beta_r}\right) A_r = 0 \tag{3.9}$$

$$(s = 1, 2, \cdots, r),$$

此地圓括号表示微分后令 $\mu, \beta_1, \cdots, \beta_r$ 之值为零. 因为这一方程組的行列式及一直到 $r-k+1$ 阶的所有子式均变成零, 故这一方程組有 k 个綫性独立解. 为得此等解, 考虑(3.9)前面的 $r-k$ 个方程. 由于(3.7), 我們可以用 $A_{r-k+1}, \cdots, A_r$ 表示 $A_1, \cdots, A_{r-k}$ 而解出此方程. 給 $A_{r-k+1}, \cdots, A_r$ 任何数值我們即得到方程組(3.9)的解. 对于具有行列式异于零的 k 組这样的数值, 我們得到方程組(3.9)的由 k 个独立解所組成的完全系統. 用 $A_{1j}, \cdots, A_{rj}$ $(j=1, 2, \cdots, k)$ 記这样得到的系統, 又假設选择 $A_{r-k+1,j}, \cdots, A_{rj}$ 的值如下:

$$A_{r-k+i,j} = \begin{matrix} 1 \ (\text{当 } i=j) \\ 0 \ (\text{当 } i\neq j) \end{matrix} \quad (i, j=1, 2, \cdots, k). \tag{3.10}$$

但我們亦可得到方程組(3.9)的另外的解系. 这解系可由下法得到.

如我們已經說过, 当 $\mu=0$ 时, 对于满足关系(3.6)的 β_s, 方程(2.4)应当恒为满足. 将这些恆等式对 $h_1, \cdots, h_k$ 微分, 然后以 $h_1^*, \cdots, h_k^*$ 代这些值, 则有

$$\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial\beta_1}\right)\frac{\partial\varphi_1(0, h_1^*, \cdots, h_k^*)}{\partial h_j^*} + \left(\frac{\partial\psi_s}{\partial\beta_2}\right)\cdot \frac{\partial\varphi_2(0, h_1^*, \cdots, h_k^*)}{\partial h_j^*} + \cdots + \left(\frac{\partial\psi_s}{\partial\beta_r}\right)\cdot \frac{\partial\varphi_r(0, h_1^*, \cdots, h_k^*)}{\partial h_j^*} = 0$$

$$(s=1, 2, \cdots, r, \quad j=1, 2, \cdots, k).$$

因此, 方程組(3.9)有解系

$$B_{sj} = \frac{\partial\varphi_s(0, h_1^*, \cdots, h_k^*)}{\partial h_j^*}$$

$$(s=1, 2, \cdots, r;\ j=1, 2, \cdots, k).$$

但这些解必須是解 A_{sj} 的綫性組合, 即是

$$B_{sj} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha j}\cdot A_{s\alpha} \quad (s=1, 2, \cdots, r; j=1, 2, \cdots, k). \tag{3.11}$$

此地 $a_{\alpha j}$ 为常数. 由(3.11)导出, 所有由 $\dfrac{\partial\varphi_s(0, h_1^*, \cdots, h_?^*)}{\partial h_j^*}$ 組成的可能的行列式等于行列式 $|a_{ij}|(i, j = 1, \cdots, k)$ 乘以由 A_{sj} 組成的对应行列式. 但由假定, 行列式

$$\left|\frac{\partial\varphi_s(0, h_1^*, \cdots, h_k^*)}{\partial(h_1^*, \cdots, h_k^*)}\right|$$

中至少有一个不为零, 故 $|a_{ij}|$ 亦不为零. 现在(3.11)中置以 $s = = r - k + i(i = 1, 2, \cdots, k)$, 根据(3.10)将有

$$\frac{\partial\varphi_{r-k+i}(0, h_1^*, \cdots, h_k^*)}{\partial h_j^*} = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, k).$$

从而, 行列式(3.8)等于行列式 $|a_{ij}|$, 按巳証将不为零.

得此后, 进而研究方程組(2.4). 由条件, 子式(3.7)不为零, 故前面的 $r-k$ 个方程式可以解出 $\beta_1, \cdots, \beta_{r-k}$, 这些量为 $\beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_r, \mu$ 的解析函数, 且当 $\beta_{r-k+1} = \cdots \beta_r = \mu = 0$ 时变成零. 将这些量代入(2.4)中后面的 k 个方程, 即得定义 $\beta_{r-k+1}, \cdots, \beta$ 的方程

$$F_j(\mu, \beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_r) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, k), \quad (3.12)$$

此地 F_j 是 $\mu, \beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_r$ 的解析函数, 当这些量为零时, F_j 亦为零.

以前說过: 方程(2.4)当 $\mu = 0$ 时有依賴于 k 个任意参数 $h_1, \cdots, h_k$ 的解(3.6). 因巳証得行列式(3.8)不为零, 所以可取 $\beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_r$ 作任意参数. 从而当 $\mu = 0$ 时对于任意的 $\beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_r$ 方程(3.12)应都滿足. 由此

$$F_j = \mu\Phi_j(\mu, \beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_r) \quad (j = 1, 2, \cdots, k),$$

此地 Φ_j 也是 $\beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_r, \mu$ 的解析函数, 一般說, 当这些值为零时, Φ_j 不变成零. 这样, 除去 μ, 方程(3.12)取下面的形成

$$\Phi_j = P_j + Q_{j1}\cdot\beta_{r-k+1} + \cdots + Q_{jk}\beta_r + R_{j\mu} + \cdots = 0 \quad (3.13)$$
$$(j = 1, 2, \cdots, k),$$

此地系数 P_j, Q_{ji}, R_j 依賴于派生解中出現的参数 $h_1^*, \cdots, h_k^*$. 为使这些方程有当 $\mu = 0$ 时变成零的解 $\beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_k$, 必須滿足

下面条件

$$P_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, k). \tag{3.14}$$

因此，亦如一个参数的情况那样，只有 $h_1^*, \cdots, h_k^*$ 满足方程(3.14)的派生解才可以对应于基本系統的周期解.

設 $h_1^*, \cdots, h_k^*$ 实际上依照方程(3.14)选出. 在此条件下系統(3.13)是否有我們所需要的形式的解 $\beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_r$ 呢？换句話說，对选出的派生解是否眞正存在，当 $\mu = 0$ 时变成派生的基本方程的周期解呢？由方程(3.13)可見，如果行列式

$$|Q_{ij}| \tag{3.15}$$

不为零，则这些方程眞正有唯一的解，当 $\mu = 0$ 时 $\beta_{r-k+1} \cdots \beta_r$ 变成零，且这些解为 μ 的解析函数. 从而对于族(3.4)中的派生解，其 h_j^* 满足方程(3.14)且其行列式(3.15)不为零者，必存在一个且只有一个基本系統的周期解，此解当 $\mu = 0$ 时变为派生解，且对 μ 是解析的.

行列式(3.15)的直接計算，在实际上带来非常繁重的演算，它与函数 ψ_i 的展开式的二次項的决定有关（不难看出，系数 P_j 的計算只需要一次項的知識）. 但在此情形，这种演算沒有什么必要. 我們現在要証明，行列式(3.15)与方程(3.14)的函数行列式

$$\frac{\partial(P_1, \cdots, P_k)}{\partial(h_1^*, \cdots, h_k^*)} \tag{3.16}$$

只差一个不等于零的因子. 实际上，显然有

$$P_j = \Phi_j(0, 0, \cdots, 0),$$

$$Q_{ji} = \left(\frac{\partial \Phi_j(0, \beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_r)}{\partial \beta_{r-k+1}}\right)_{\beta_{r-k+1} = \cdots = \beta_r = 0}.$$

借变换(3.6)之助，以 $h_1, \cdots, h_k$ 代函数 Φ_j 中的 $\beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_r$. 以 $\overline{\Phi}_j(\mu, h_1, \cdots, h_k)$ 記变换后的結果. 注意到 β_j 取零值时对应的 h_j 取 h_j^* 值，则将有

$$P_j = \overline{\Phi}_j(0, h_1^*, \cdots, h_k^*),$$

$$|Q_{ji}| = \left\{\frac{\partial(\overline{\Phi}_1, \cdots, \overline{\Phi}_k)}{\partial(h_1, \cdots, h_k)} : \frac{\partial(\beta_{r-k+1}, \cdots, \beta_r)}{\partial(h_1, \cdots, h_r)}\right\}_{\mu=0, h_j=h_j^*},$$