现代数学基础丛书

微分方程定性理论

张芷芬　丁同仁
黄文灶　董镇喜　著

科学出版社

1985

内 容 简 介

本书是作者在常微分方程定性理论的多年教学和科研工作的基础上写成的，着重介绍平面定性理论的主要内容和方法，重点是：平面奇点，极限环的存在、唯一性及个数，无穷远奇点，二维周期系统的调和解，环面上的常微系统，二维流形上的结构稳定性．本书各章均附有习题．

本书可供大学数学系高年级学生及研究生阅读，也可供教师和科研人员参考．

现代数学基础丛书

微分方程定性理论

张芷芬　丁同仁
黄文灶　董镇喜　著

责任编辑　张鸿林

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1985年5月第一版　开本：850×1168 1/32
1985年5月第一次印刷　印张：17 1/2
印数：精 1—5,650　平 1—6,500　插页：精 3 平 2
字数：462,000

统一书号：13031·2739
本社书号：3775·13—1

定价：布脊精装 5.80 元
平　　装 5.00 元

目　　录

第一章 基本定理

本章介绍关于微分方程的解的一些基本定理，这是常微分方程一般理论的基础.

§1. 解的存在性、唯一性及对初值(或参数)的依赖性

定理 1.1 考虑 Cauchy 问题 (E):

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的向量，$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 是实变量 t 和 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的 n 维向量值函数;又设 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 在闭区域 G:

$$|t - t_0| \leqslant a, \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant b,$$

上连续,并且对 $\boldsymbol{x}$ 适合 Lipschitz 条件:

$$\|f(t, \boldsymbol{x}_1) - f(t, \boldsymbol{x}_2)\| \leqslant L\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|,$$
$$(t, \boldsymbol{x}_i) \in G, \quad i = 1, 2, \tag{1.2}$$

其中 Lipschitz 常数 $L > 0$. 令

$$M = \max_G\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \tag{1.3}$$

那末 Cauchy 问题(E)在区间 $|t - t_0| \leqslant h$ 上有一个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$,并且它是唯一的.

证明 我们分以下五个步骤证明之.

(一) Cauchy 问题 (E) 等价于积分方程

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})dt. \tag{1.4}$$

事实上,令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 Cauchy 问题 (E)的解,于是由(1.1)对 t 积分便有

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{C}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))dt,$$

再由初值条件(1.2)确定 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{x}_0$，因此 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 (E) 的解.

反之，设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程(1.4)的解，从 (1.4) 可知 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是连续的，从而 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$ 也是连续的，因此，$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是可微的；于是，对积分方程 (1.4) 的两侧对 t 求导数，便得到

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t)).$$

并且由(1.4)可见 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 满足初值条件

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,$$

即 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 Cauchy 问题 (E) 的解.

（二）作 (1.4) 的 Picard 近似解序列 $\{\boldsymbol{\varphi}_n(t)\}$

令 $\boldsymbol{\varphi}_0(t)\equiv\boldsymbol{x}_0$,

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_0)dt,\quad |t-t_0|\leqslant h. \tag{1.5}$$

则

$$\|\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{\varphi}_0(t)\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_0)\|dt\right|\leqslant M\cdot|t-t_0|\leqslant b. \tag{1.6}$$

当 $\boldsymbol{x}$ 是一维时，图形如下：

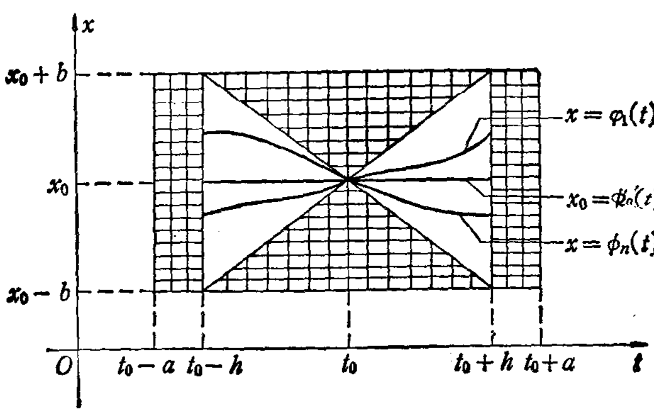

图 1.1

我们可以采用归纳的程序：设已得第 n 次近似解为

$$\boldsymbol{\varphi}_n(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_{n-1}(t))dt, \tag{1.7}$$

而且当 $|t-t_0|\leqslant h$ 时，我们有

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b.$$

令第 $n+1$ 次近似解为

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_n(t))dt, \tag{1.8}$$

则当 $|t-t_0|\leqslant h$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t)-\boldsymbol{x}_0\| &\leqslant \left\|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_n(t))dt\right\| \\ &\leqslant M\cdot|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b,\quad n=1,2,3\cdots.\end{aligned}$$

（三）序列 $\{\boldsymbol{\varphi}_n(t)\}$ 的一致收敛性

由于 $\{\boldsymbol{\varphi}_n(t)\}$ 的收敛问题等价于级数

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\varphi}_0(t)+[\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{\varphi}_0(t)]+[\boldsymbol{\varphi}_2(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t)]\\ &\quad+\cdots[\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{\varphi}_{n-1}(t)]+\cdots\end{aligned} \tag{1.9}$$

的收敛问题，我们只要证明(1.9)的一致收敛性即可。

首先证明(1.9)的一般项满足

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{\varphi}_{n-1}(t)\|\leqslant\frac{M}{L}\frac{(L|t-t_0|)^n}{n!},\quad n=1,2,3\cdots. \tag{1.10}$$

由(1.6)可知(1.10)对 $n=1$ 成立。现设不等式(1.10)对 $n=m$ 成立，则我们有下述不等式：

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{\varphi}_{m+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_m(t)\|\\ &=\left\|\int_{t_0}^{t}(\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_m(t))-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_{m-1}(t)))dt\right\|\\ &\leqslant L\cdot\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\varphi}_m(t)-\boldsymbol{\varphi}_{m-1}(t)\|dt\right|\\ &\leqslant\frac{M}{L}\frac{(L|t-t_0|)^{m+1}}{(m+1)!}.\end{aligned}$$

由此可知不等式(1.10)对所有正整数 n 都成立。所以当 $|t-t_0|\leqslant h$ 时，我们得到

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{\varphi}_{n-1}(t)\|\leqslant\frac{M}{L}\frac{(Lh)^n}{n!}. \tag{1.11}$$

由 Weierstrass 判别法推出级数 (1.9) 是一致收敛的，从而序列

$\{\boldsymbol{\varphi}_n(t)\}$ 一致收敛. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{\phi}_n(t)=\boldsymbol{\phi}(t)$, 则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(t)$ 连续, 且 $\|\boldsymbol{\phi}(t)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b(|t-t_0|\leqslant h)$.

(四) 证明 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程 (1.4) 的解

令 $n\to+\infty$, 由(1.8)得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{x}_0+\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_n(t))dt. \tag{1.12}$$

因此,归结于证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_n(t))dt=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))dt. \tag{1.13}$$

任给定 $\varepsilon>0$, 可找到 $N=N(\varepsilon)>0$, 使得当 $|t-t_0|\leqslant h$, 便有不等式

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{Lh},\quad \text{只要 } n\geqslant N.$$

因此,当 $|t-t_0|\leqslant h$ 时,我们有

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_n(t))dt-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))dt\right\|\\&\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|dt\right|\\&\leqslant L\cdot\frac{\varepsilon}{L\cdot h}h=\varepsilon,\end{aligned}$$

即(1.13)成立. 因此由(1.12)和(1.3), 可见 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程(1.4)的一个解 ($|t-t_0|\leqslant h$).

(五) 最后证明(1.4)的解的唯一性

事实上,设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 与 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(t)$ 是(1.4)的两个解,即

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))dt,$$

与

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\boldsymbol{x}_0+\Big|_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\phi}(t))dt.$$

两式相减,再利用 Lipschitz 条件,我们得到

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\phi}(t)\|\leqslant L\cdot\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\phi}(t)\|dt\right|. \tag{1.14}$$

令

$$g(t)=\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\|dt,\quad t\geqslant t_0.$$

于是当 $t\geqslant t_0$ 时，$g(t)\geqslant 0$，而且 (1.14) 转化为

$$g'(t)\leqslant L\cdot g(t),\tag{1.15}$$

于是

$$(e^{-L(t-t_0)}\cdot g(t))'\leqslant 0,$$

因而

$$e^{-L\cdot(t-t_0)}\cdot g(t)\leqslant g(t_0)=0.$$

由此推出

$$g(t)\equiv 0,\quad t\geqslant t_0,$$

即

$$\boldsymbol{\varphi}(t)\equiv\boldsymbol{\psi}(t),\quad t\geqslant t_0.$$

同法可证：当 $t\leqslant t_0$ 时，$\boldsymbol{\varphi}(t)\equiv\boldsymbol{\psi}(t)$.

总结以上各步骤，定理证毕.】

附注 1 定理 1.1 的证明是古典的，但可以抽象为泛函分析中的不动点定理。等式

$$\psi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(t,\varphi(t))dt,\quad |t-t_0|\leqslant h,$$

定义了一个从连续函数 $\varphi(t)$ 到连续函数 $\psi(t)$ 的变换，可简写为

$$\psi=T(\varphi).$$

若 $T(\varphi)=\varphi$，则称 φ 为变换 T 的不动点. 显然(1.4)的解就是变换 T 的不动点. 近代泛函分析中有各式各样的不动点定理，现介绍其中一个最简单的，称为压缩映像原理.

设 D 是 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 的一个非空闭子集，T 是从 D 到 D 自身的映象，即对每一个 $\psi\in D$，有 $T(\psi)\in D$. 又存在常数 k，$0\leqslant k<1$，使对 D 中任何两点 ψ_1，ψ_2，都有不等式

$$\|T(\psi_2)-T(\psi_1)\|\leqslant k\|\psi_2-\psi_1\|.$$

则在 D 中存在唯一的一个点 ψ^*，使得 $T(\psi^*)=\psi^*$.

现在我们用上述压缩映象原理来证明定理(1.1). 取 $\mathscr{B}$ 为定义在区间 $|t-t_0|\leqslant a$ 上的一切连续函数所成的空间，取 D 为定

义在$|t-t_0|\leqslant h^*$上$\left(0<h^*<\min\left(h, \frac{1}{L}\right)\right)$而图象包含在$G$中(见定理1.1的条件)的一切连续函数所组成的集合. 如果$\phi(t)\in D$,定义

$$T(\phi)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\xi, \phi(\xi))d\xi,$$

则

$$\begin{aligned}\|T(\phi)-x_0\| &\leqslant \left\|\int_{t_0}^{t} f(\xi, \phi(\xi))d\xi\right\| \\ &\leqslant M|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b,\end{aligned}$$

即$T(\phi)\in D$. 其次设$\phi_1,\phi_2\in D$,于是

$$\begin{aligned}\|T(\phi_1)-T(\phi_2)\| &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t}\|f(t, \phi_1)-f(t, \phi_2)\|dt\right| \\ &\leqslant L\cdot h^*\|\phi_1-\phi_2\| \\ &= K\|\phi_1-\phi_2\| \quad (K=Lh^*<1).\end{aligned}$$

故由压缩映象原理,有唯一的不动点ϕ^*,使$T(\phi^*)=\phi^*$,即

$$\phi^*(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(t, \phi^*(t))dt \qquad (|t-t_0|\leqslant h^*).$$

附注2 设方程(1.1)是线性的,即

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t), \tag{1.16}$$

其中$A(t)$, $\boldsymbol{f}(t)$在区间$[\alpha, \beta]$上是连续的.

这时由初值$(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ $(t_0\in[\alpha, \beta])$所确定的解在整个区间$[\alpha, \beta]$上都有定义. 这是因为所构造的逐次近似解序列$\{\boldsymbol{\varphi}_n(t)\}$在整个区间$[\alpha, \beta]$都有定义,并且是一致收敛的.

附注3 如果$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$对$t$, $\boldsymbol{x}$连续,但不一定满足Lipschitz条件,则Cauchy问题(1.1)+(1.2)的解仍是存在的,参见下面的定理(证明从略).

Cauchy-Peano 定理 若$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$在区域$G$: $|t-t_0|\leqslant a$, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b$上连续,则(1.4)在区间$|t-t_0|\leqslant h$上有解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$且满足初值条件$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$,此处

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{G}\|f(t,x)\|.$$

下面讨论解与参数(或初值)的关系.

考虑方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

的解 $x = \varphi(t, t_0, x_0)$. 这个解是 t, t_0, x_0 的函数. 例如方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

的解为 $x = x_0 e^{t-t_0}$, 它是 t, t_0, x_0 的函数.

这里发生了一个在理论上和应用上都很重要的问题：当初值或参数变动时，对应的解是如何的变动呢？我们知道，在应用上，微分方程是描述某种物理过程的. 而将一个物理问题化成微分方程问题时，不论是初值还是参数，它们的数值都是由实验测定的，因此不可避免地会出现一些微小的误差. 如果初值或参数的微小摄动会引起方程的解发生剧烈的变化，那么所求解的可靠性就会很小. 因此我们要研究 Cauchy 问题的解与初值或参数的关系是自然而必要的.

定理 1.2 考虑 Cauchy 问题 (E_μ):

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.17}$$

此处 x 是 R^n 中的 n 维向量，μ 是 R^m 中的 m 维向量. 函数 $f(t, x, \mu)$ 在区域 G:

$$|t - t_0| \leqslant a, \ \|x - x_0\| \leqslant b, \ \|\mu - \mu_0\| \leqslant c,$$

上连续且对 x 适合 Lipschitz 条件:

$$\|f(t, x_1, \mu) - f(t, x_2, \mu)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|,$$
$$\forall (t, x_i, \mu) \in G, \quad i = 1, 2,$$

其中 Lipschitz 常数 $L > 0$. 令

$$M = \max_G \|f(t, x, \mu)\|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

则对于任意 $\mu(\|\mu - \mu_0\| \leqslant c)$，$(E_\mu)$ 的解 $x = x(t; \mu)$ 在区间 $|t - t_0| \leqslant h$ 上存在且唯一，并且 $x = x(t;\mu)$ 是 (t, μ) 的连续函数.

证明　对任意 $\mu(\|\mu - \mu_0\| \leqslant c)$，根据定理 1.1，$(E_\mu)$ 的解 $x = x(t; \mu)$ 在 $|t - t_0| \leqslant h$ 上存在唯一.

又因为 Cauchy 问题 (E_μ) 的 n 次近似解 $x = \varphi_n(t; \mu)$ 是 (t, μ) 的连续函数而且当 $n \to +\infty$ 时，$\varphi_n(t; \mu)$ 在区域 $(|t - t_0| \leqslant h, \|\mu - \mu_0\| \leqslant c)$ 上一致收敛，因而 $\varphi(t; \mu)$ 是 (t, μ) 的连续函数.】

Grownwall 引理　设函数 $g(t), \varphi(t)$ 是区间 $[t_0, t_1]$ 上的连续函数，而且 $g(t) \geqslant 0$，$\varphi(t) \geqslant 0$；又常数 $\lambda > 0, r > 0$. 若 $\varphi(t)$ 满足不等式

$$\varphi(t) \leqslant \lambda + \int_{t_0}^{t} (g(t)\varphi(t) + r)\,dt, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{1.18}$$

则有

$$\varphi(t) \leqslant (\lambda + rT)e^{\int_{t_0}^{t} g(t)dt}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{1.19}$$

其中 $T = t_1 - t_0$.

证明　令 $u(t) = \varphi(t)e^{-\int_{t_0}^{t} g(t)dt}$，$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. 显然 $u(t)$ 是连续的. 设 $\xi = \sup\{u(t) | t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$，则存在 $t^* \in [t_0, t_1]$，使得 $u(t^*) = \xi$. 由(1.18)得

$$\begin{aligned}
\xi e^{\int_{t_0}^{t^*} g(t)dt} &\leqslant \lambda + \int_{t_0}^{t^*} (g(t)\varphi(t) + r)\,dt \\
&\leqslant \lambda + \int_{t_0}^{t^*} \left(\xi g(t) e^{\int_{t_0}^{t} g(t)dt} + r\right) dt \\
&\leqslant \lambda + rT + \xi\left(e^{\int_{t_0}^{t^*} g(t)dt} - 1\right),
\end{aligned}$$

即

$$\xi \leqslant \lambda + rT.$$

由于

$$\varphi(t) \leqslant \xi e^{\int_{t_0}^{t} g(t)dt},$$

故

$$\varphi(t) \leqslant (\lambda + rT)e^{\int_{t_0}^{t} g(t)\,dt}. \rbrack$$

定理 1.3　设 Cauchy 问题 (E_μ^*):

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 n 维向量，$\boldsymbol{\mu}$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的 m 维向量，又设 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \in C^0(G, \boldsymbol{R}^n)$，其中

$$G: |t - t_0| \leqslant a, \ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant b, \ \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0\| \leqslant c,$$

且 $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_j}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \mu_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$ 连续，则定理 1.2 的结论成立，而且 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\mu})$ 对 $\mu_k (k = 1, 2, \cdots, m)$ 有连续的偏导数.

证明　因为 $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j} \in C^0(G, \boldsymbol{R}^n)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$，所以 $\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 适合 Lipschitz 条件. 因此，定理 1.2 蕴含定理 1.3，即 (E_μ^*) 的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ 存在唯一且在区域 $B(|t - t_0| \leqslant h, \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0\| \leqslant c)$ 上连续. 下面证明 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ 对 $\boldsymbol{\mu}$ 是可微的. 我们的证明分以下三个步骤进行.

为了形式地推导 $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\mu}}$，首先我们考虑线性方程

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \boldsymbol{f}_x(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})z + \boldsymbol{f}_\mu(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}), \\ \boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

或与上面等价的积分方程

$$\boldsymbol{z}(t, \boldsymbol{\mu}) = \int_{t_0}^{t} [\boldsymbol{f}_x(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{z}(t, \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{f}_\mu(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})]\,dt, \tag{1.20}$$

其中

$$\boldsymbol{f}_x(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) = \left(\frac{\partial f_i(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right)_{n\times n}$$

是 $n \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{f}_\mu(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) = \left(\frac{\partial f_i(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}_k}\right)_{n\times m}$$

是 $n \times m$ 矩阵

Cauchy 问题 (E_μ^*) 等价于积分方程

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) dt, \tag{1.21}$$

从此式形式地计算 $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\mu}}$ 得

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(t, \varphi(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\mu}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) dt. \tag{1.22}$$

这就是说，如果 $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\mu}}$ 存在，则它应满足方程 (1.20).

其次，当参量 $\boldsymbol{\mu}$ 有改变量 $\Delta\boldsymbol{\mu}$ 时，相应的 $\boldsymbol{x}$ 有改变量 $\Delta\boldsymbol{x}$, 今计算 $\Delta\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\mu} + \Delta\boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\phi} + \Delta\boldsymbol{\phi} \\ &= \int_{t_0}^{t} [\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi} + \Delta\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\mu} + \Delta\boldsymbol{\mu}) - f(t, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\mu})] dt \\ &= \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{x}} + \varepsilon_1\right) \Delta\boldsymbol{x} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} + \varepsilon_2\right) \Delta\boldsymbol{\mu} dt. \end{aligned} \tag{1.23}$$

其中 ε_1 是 $n \times n$ 矩阵，ε_2 是 $n \times m$ 矩阵，而且当 $\|\Delta\boldsymbol{\mu}\|$ 趋于零时，$\|\varepsilon_1\|$, $\|\varepsilon_2\|$ 一致地趋于零，即

$$\lim_{\|\Delta\mu\| \to 0} \|\varepsilon_1\| = 0, \quad \lim_{\|\Delta\mu\| \to 0} \|\varepsilon_2\| = 0. \tag{1.24}$$

把 ε_1, ε_2 代入 (1.23) 便有下式:

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{x} &= \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{x}} + \varepsilon_1\right) \Delta\boldsymbol{x} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} + \varepsilon_2\right) \Delta\boldsymbol{\mu} dt. \end{aligned} \tag{1.25}$$

最后来证明

$$\lim_{\|\Delta\mu\|\to 0}\frac{\|\Delta x - z(t,\ \mu)\Delta\mu\|}{\|\Delta\mu\|} = 0.$$

由 (1.20) 和 (1.25) 有

$$\begin{aligned}&\Delta x - z(t,\ \mu)\Delta\mu\\ &\quad = \int_{t_0}^{t}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon_1\right)(\Delta x - z\Delta\mu) + (\varepsilon_1 z + \varepsilon_2)\Delta\mu\right] dt.\end{aligned}$$

令 $\Delta u = \Delta x - z(t,\ \mu)\Delta\mu$, 于是上式化为

$$\Delta u = \int_{t_0}^{t}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon_1\right)\Delta u + (\varepsilon_1 z + \varepsilon_2)\Delta\mu\right] dt,$$

因而

$$\|\Delta u\| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t}\left[\left\|\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon_1\right\|\cdot\|\Delta u\| + \|\varepsilon_1 z + \varepsilon_2\|\cdot\|\Delta\mu\|\right] dt\right|.$$

令 $N = \max\limits_{G}\left\|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right\|$,又取正数 δ_1, δ_2, 使得 $\|\varepsilon_1\| \leqslant \delta_1$, $\|\varepsilon_1 z+\varepsilon_2\|\leqslant \delta_2$,而且当 $\|\Delta\mu\| \to 0$, $\delta_1 \to 0$, $\delta_2 \to 0$, 因而

$$\|\Delta u\| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t}[(N + \delta_1)\|\Delta u\| + \delta_2\|\Delta\mu\|]dt\right|.$$

再由基本引理便得

$$\|\Delta u\| \leqslant \delta_2\|\Delta\mu\|\cdot h\cdot e^{\int_{t_0}^{t}(N+\delta_1)dt} \leqslant \delta_2\|\Delta\mu\| h e^{(N+\delta_1)h}.$$

由此推出,当 $\|\Delta\mu\| \to 0$ 时我们有

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|\Delta\mu\|} = \frac{\|\Delta x - z(t,\ \mu)\Delta\mu\|}{\|\Delta\mu\|} \leqslant \delta_2\cdot h\cdot e^{(N+\delta_1)h} \to 0,$$

根据多元函数微分学的定义,我们有

$$dx = z(t,\ \mu)\Delta\mu.$$

从而

$$\frac{\partial x}{\partial\mu} = z(t,\ \mu).$$

这样我们证明了 $\dfrac{\partial x}{\partial\mu}$ 是存在的,再对(1.20)利用定理 1.2,可见 $\dfrac{\partial x}{\partial\mu}$ 对 $(t,\ \mu)$ 是连续的. 定理证毕.】

定理 1.4 考虑 Cauchy 问题 (E_η):

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \\
\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}, \qquad \left(\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0\| \leqslant \dfrac{b}{2}\right),
\end{cases}
$$

其中 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 在区域 $D(|t - t_0| \leqslant a, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant b)$ 上连续，且对 $\boldsymbol{x}$ 适合 Lipschitz 条件

$$
\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\| \leqslant L \cdot \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|,
$$
$$
\forall (t, \boldsymbol{x}_i) \in D, \quad i = 1, 2,
$$

其中 Lipschitz 常数 $L > 0$. 令

$$
M = \max_D \|f(t, x)\|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),
$$

则对所有 $\boldsymbol{\eta}\left(\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0\| \leqslant \dfrac{b}{2}\right)$, (E_η) 的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\eta})$ 在区间

$$
|t - t_0| \leqslant \frac{1}{2} h
$$

上存在，且 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\eta})$ 是 $(t, \boldsymbol{\eta})$的连续函数.

证明　令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{\eta}$($\boldsymbol{z}$ 是新的未知 n 维向量函数)，则(E_η) 化成 $(\hat{E}_\eta)$:

$$
\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}), \ \boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{0},
$$

其中 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z} + \boldsymbol{\eta})$，在区域 G:

$$
|t - t_0| \leqslant a, \ \|\boldsymbol{z}\| \leqslant \frac{b}{2}, \ \|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0\| \leqslant \frac{b}{2},
$$

上连续，且

$$
\begin{aligned}
\|F(t, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{\eta}) - F(t, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{\eta})\| &= \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{\eta})\| \\
&\leqslant L\|\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{\eta} - (\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{\eta})\| \\
&= L\|\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2\|.
\end{aligned}
$$

注意 $\boldsymbol{\eta}$ 对于 $(\hat{E}_\eta)$ 而言作为参数向量出现. 因此，由定理 1.2 推出，$(\hat{E}_\eta)$ 的解 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{\eta})$ 在区间 $|t - t_0| \leqslant \dfrac{1}{2} h$ 上存在$\Big($这里注意 G 中的 $\dfrac{b}{2}\Big)$; 且 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{\eta})$是 $(t, \boldsymbol{\eta})$ 的连续函数. 由于 (E_η) 的