

# 偏微分方程数值解法

陆金甫 关 治

清华大学出版社

## 内 容 简 介

本书着重介绍偏微分方程数值解的两类主要方法：有限差分方法和有限元方法。全书包括有限差分方法的基本概念；双曲型方程的差分方法；抛物型方程的差分方法；椭圆型方程的差分方法；数学物理方程的变分原理；有限元离散方法以及其它的课题等。各章均附有习题。

本书可作为高等院校理工科各有关专业大学生、研究生的教材，也可供从事这方面工作的科研、工程技术人员参考。

## 偏微分方程数值解法

陆金甫 关 治



清华大学出版社出版  
(北京 清华园)

清华大学印刷厂印刷  
新华书店北京发行所发行



开本：787×1092 1/32 印张：14 字数：311 千字  
1987 年 7 月第 1 版 1987 年 7 月第 1 次印刷

印数：00001~11000

统一书号：平装 15235·287 定价：平装 2.00 元  
精装 15235·310 精装 3.50 元

# 目 录

<b>第一章</b>	<b>有限差分方法的基本概念</b> .....	1
§1	偏微分方程的定解问题.....	1
§2	有限差分近似.....	5
§3	差分格式的相容性、收敛性及稳定性.....	14
§4	研究稳定性的 Fourier 方法.....	27
§5	研究稳定性的其它方法.....	40
<b>第二章</b>	<b>双曲型方程的差分方法</b> .....	50
§1	一阶双曲型方程.....	50
§2	一阶双曲型方程组.....	67
§3	变系数方程及方程组.....	74
§4	二阶双曲型方程.....	78
§5	拟线性双曲型方程组.....	88
§6	特征线方法.....	97
§7	守恒律方程组 (I).....	100
§8	守恒律方程组 (II).....	112
§9	二维问题.....	125
§10	双曲型方程 (组) 的初边值问题.....	132
<b>第三章</b>	<b>抛物型方程的差分方法</b> .....	145
§1	常系数扩散方程.....	145
§2	初边值问题.....	160
§3	对流扩散方程.....	165
§4	变系数方程.....	171
§5	非线性问题.....	182
§6	二维问题.....	194
§7	带有热传导的波动方程.....	206

§8	可压缩的 Navier-Stokes 方程	209
<b>第四章</b>	<b>椭圆型方程的差分方法</b>	<b>217</b>
§1	Poisson 方程	217
§2	差分格式的性质	225
§3	边界条件的处理	231
§4	变系数方程	235
§5	双调和方程	238
§6	特征值问题	241
§7	不可压缩流动的 Navier-Stokes 方程	242
<b>第五章</b>	<b>数学物理方程的变分原理</b>	<b>251</b>
§1	引论	251
§2	一维的变分问题	261
§3	二维的变分问题	269
§4	变分问题的近似计算	276
<b>第六章</b>	<b>有限元离散方法</b>	<b>287</b>
§1	一维问题的有限元方法、线性元	287
§2	二维问题、三角形线性元	304
§3	高次插值	328
<b>第七章</b>	<b>其它的课题</b>	<b>359</b>
§1	抛物型方程的有限元方法	359
§2	解非线性方程的一些问题	364
§3	混合有限元方法介绍	378
§4	本征值问题的变分形式及有限元方法	385
§5	基于变分原理的差分格式	394
§6	边界元方法	404
§7	多网格方法	419
<b>参考文献</b>		<b>437</b>

# 第一章 有限差分方法的基本概念

在不同类型偏微分方程的有限差分方法中，有一些基本概念是共同的，特别是双曲型方程和抛物型方程更是如此。因此我们从简单的问题出发，利用典型的差分格式来引入这些基本概念并作扼要的阐述。此外对各类微分方程问题的提法作了简短的回顾。

## § 1 偏微分方程的定解问题

首先对各类微分方程问题的提法作一简单回顾，以便在用数值方法求解前，对所述问题有一个概要的了解。

对于椭圆型偏微分方程，以 Poisson 方程为例，边值问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in D \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial D \end{cases} \quad (1.2)$$

其中  $D$  是边界为  $\partial D$  的有界开区域，(1.2) 式为第一类边界条件。第三类边界条件是

$$-\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \beta(x, y), \quad (x, y) \in \partial D \quad (1.3)$$

其中  $n$  为边界  $\partial D$  的外法线方向。当  $\alpha = 0$  时就化为第二类边界条件。

抛物型方程可以提初值问题和初边值问题。以一维扩散方

8810236

• 1 •

程为例，初值问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, & -\infty < x < \infty & (1.4) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & & -\infty < x < \infty & (1.5) \end{cases}$$

其中  $a > 0$ 。其解可以表示为

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4at}\right] \varphi(\xi) d\xi \quad (1.6)$$

扩散方程的初边值问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, & 0 < x < l & (1.7) \end{cases}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l \quad (1.8)$$

$$u(0, t) = g_1(t), \quad t > 0 \quad (1.9)$$

$$u(l, t) = g_2(t), \quad t > 0 \quad (1.10)$$

边界条件 (1.9), (1.10) 为第一类边界条件。同样也可以提第二类, 第三类边界条件。

双曲型方程也可以提初值问题和初边值问题。二阶双曲型方程的最简单例子是波动方程。它的初值问题是

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, & -\infty < x < \infty & (1.11) \end{cases}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (1.13)$$

其解可以由 D'Alembert 公式给出

$$u(x, t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi \quad (1.14)$$

由此可以看出，初值问题 (1.11)–(1.13) 的解  $u$  在  $(x_0, t_0), t_0 > 0$  的值  $u(x_0, t_0)$  仅依赖于  $x$  轴上的区间  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 。此区间称为初值问题的解在点  $(x_0, t_0)$  的依赖区间(依赖区域)。过  $(x_0, t_0)$  作两条特征线

$$x - at = x_0 - at_0,$$

$$x + at = x_0 + at_0$$

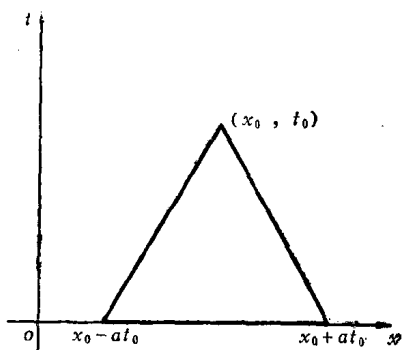


图 1.1

它们在  $x$  轴上截出的闭区间即为依赖区间，见图 1.1。

波动方程的初边值问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, 0 < x < l \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), & 0 < x < l \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), & 0 < x < l \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \varphi(t), & t > 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} u(l, t) = \psi(t), & t > 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

条件 (1.18) 和 (1.19) 也称为第一类边界条件。同样地可以提第二、三类边界条件。

下面我们简单地讨论一阶线性双曲型方程组的问题。考虑方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.20)$$

其中  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)^T$ ,  $A$  为  $p \times p$  常数矩阵。我们称方程组 (1.20) 是双曲型方程组, 如果  $A$  的特征值是实的并且存在非奇异矩阵  $S$  使得

$$A = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  是  $A$  的特征值。如果  $A$  是对称的, 则称 (1.20) 为对称双曲型方程组。如果  $A$  的特征值互不相同, 则称 (1.20) 为严格双曲型方程组。

对于一阶线性双曲型方程组 (1.20) 附以初始条件

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{f}(x) \quad (1.22)$$

其中  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p)^T$ , 则构成了 (1.20) 的初值问题。初值问题 (1.20), (1.22) 中  $p=1$  的情况是对流方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (1.23)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (1.24)$$

下面简单地讨论一下初值问题 (1.23), (1.24) 的一些明显的性质。为确定起见, 设  $a > 0$ 。沿特征线

$$x - at = \xi \quad (1.25)$$

(1.23) 式的解  $u(x, t)$  满足

$$\frac{du}{dt} = \frac{du(at + \xi, t)}{dt} = a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

因此沿特征线 (1.25),  $u$  是常数。显然  $u$  仅依赖于参数  $\xi$ 。由此可知, 初值问题 (1.23), (1.24) 的解可以表示为

$$u(x, t) = f(\xi) = f(x - at) \quad (1.26)$$

相反地, 如果  $f(x)$  是一次连续可微的, 那么公式 (1.26) 表



示了 (1.23) 和 (1.24) 式的解。注意到, 在任一点  $(x, t)$  上  $u$  的值仅依赖于  $f(x)$  在  $\xi = x - at$  的值。 $\xi$  就是通过  $(x, t)$  的特征线与  $x$  轴交点的坐标。

由上述分析看出,  $u$  关于初值的依赖区域是用一个点  $\xi$  来表示的 (见图 1.2)。

上面对偏微分方程的定解问题作了简单地回顾, 可以看出种类不少。我们给定一个偏微分方程的定解问题, 如果它的解存在、唯一并连续依赖于原始资料 (如非齐次项、初始条件和边界条件中给定的函数),

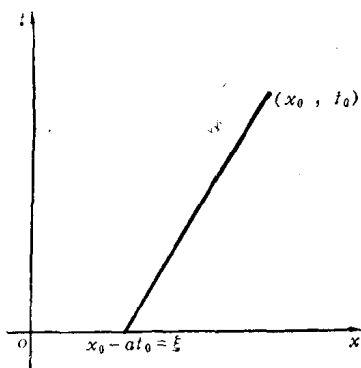


图 1.2

那么称这个定解问题是适定的。上述例举的各种定解问题都是适定的。在本书中我们仅对适定的定解问题讨论其数值求解方法。

## § 2 有限差分近似

### 2.1 网格剖分

用有限差分方法求解偏微分方程必须把连续问题进行离散化。为此首先要对求解区域作网格剖分。由于求解的问题各不相同, 因此求解区域也不尽相同。下面我们仅用例子来说明不同区域的剖分情况, 同时还引入一些通用的术语。

例 1 双曲型方程和抛物型方程的初值问题, 求解区域是

$$\mathcal{D}_1 = \{(x, t) \mid -\infty < x < \infty, t \geq 0\}$$

我们在  $x-t$  的上半平面画出两族平行于坐标轴的直线, 把上

半平面分成矩形网格。这样的直线称作网格线，其交点称为网格点或节点。一般来说，平行于  $t$  轴的直线可以是等距的。可设距离为  $\Delta x > 0$ ，有时也记为  $h$ ，我们称其为空间步长。而平行于  $x$  轴的直线则大多是不等距的，往往要按具体问题而定。在此为简单起见也假定是等距的，设距离为  $\Delta t > 0$ ，有时也记为  $\tau$ ，称其为时间步长。这样两族网格线可以写作

$$x = x_j = j\Delta x = jh, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$t = t_n = n\Delta t = n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

网格节点  $(x_j, t_n)$  有时简记为  $(j, n)$ 。 $\mathcal{D}_1$  的网格剖分见图 1.3。

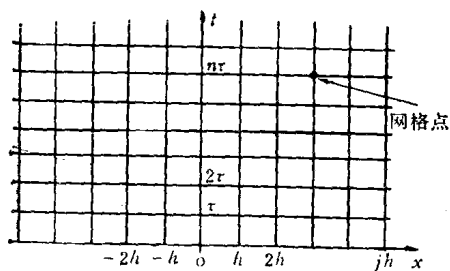


图 1.3

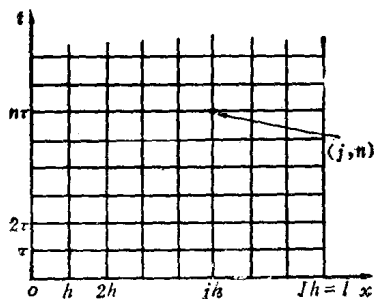


图 1.4

例 2 双曲型方程和抛物型方程的初边值问题，设其求解区域是

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, t) | 0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$$

这个区域的网格由平行于  $t$  轴的直线族

$$x = x_j, \quad j = 0, 1, \dots, J$$

与平行于  $x$  轴的直线族

$$t = t_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

所构成, 其中  $x_j = j\Delta x = jh$ ,  $\Delta x = h = l/J$ ;  $t_n = n\Delta t = n\tau$ 。  
 $\mathcal{D}_2$  的网格剖分见图 1.4。

例 3 椭圆型方程的边值问题。求解区域是  $x, y$  平面上的一个有界区域  $\mathcal{D}$ , 其边界  $\Gamma$  为分段光滑曲线。取沿  $x$  轴和  $y$  轴方向的步长  $\Delta x$  和  $\Delta y$ , 作两族分别与  $x$  轴和  $y$  轴平行的直线:

$$x = x_i = i\Delta x, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$y = y_j = j\Delta y, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

如例 1 同样, 两族直线的交点称作网格点或节点, 并记为  $(x_i, y_j)$  或简记为  $(i, j)$ 。我们只考虑属于  $\mathcal{D} + \Gamma$  的节点。如果两个节点沿  $x$  轴方向 (或沿  $y$  轴方向) 只相差一个步长时称为两个相邻的节点。如果一个节点的所有四个相邻的节点都属于  $\mathcal{D} + \Gamma$ , 那么称此节点为内部节点 (内点)。如果一个节点的四个相邻节点中至少有一个不属于  $\mathcal{D} + \Gamma$  时, 则称此节点为边界节点 (边界点)。我们用  $\mathcal{D}_h$  表示内点集合,  $\Gamma_h$  表示边界点集合。图 1.5 表示了  $\mathcal{D}$  的网格剖分, 分别以 “○”, “\*” 表示内点和边界点。

上面我们仅列举了三个不同类型的网格剖分的例子。以后碰到具体问题再作一些讨论。

## 2.2 差分方程的建立

利用有限差分方法来离散偏微分方程, 方法是多种多样的。而且对于同一偏微分方程

可以建立各不相同的差分方程。这些我们将在以后几章中逐步

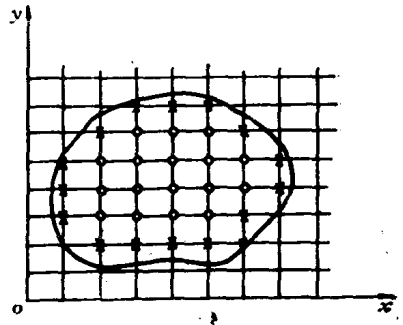


图 1.5

给出。这里仅为说明一些基本概念，以偏微分方程 (1.4) 和 (1.23) 为例，构造几个典型的差分格式。

在节点  $(x_j, t_n)$  处微商和差商之间有下列关系：

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^n + O(\tau) \quad (2.1)$$

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1}))}{2\tau} = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^n + O(\tau^2) \quad (2.2)$$

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{h} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n + O(h) \quad (2.3)$$

$$\frac{u(x_j, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{h} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n + O(h) \quad (2.4)$$

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2h} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n + O(h^2) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{h^2} \\ &= \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n + O(h^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中  $[\cdot]_j^n$ ，或用  $(\cdot)_j^n$ ，表示括号内的函数在节点  $(x_j, t_n)$  处取的值。利用表达式 (2.1) 和 (2.3) 有

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} + a \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{h} \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n + O(\tau + h) \end{aligned}$$

如果  $u(x, t)$  是满足偏微分方程 (1.23) 的光滑解，那么

有 
$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n = 0$$

由此可以看出，偏微分方程 (1.23) 在  $(x_j, t_n)$  处可以近似地用下面的方程来代替

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \quad (2.7)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$$

其中  $u_j^n$  为  $u(x_j, t_n)$  的近似值。(2.7) 称作逼近微分方程 (1.23) 的有限差分方程，或简称差分方程。用到的节点如图 1.6。

我们可以把 (2.7) 式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (2.7)'$$

改写成便于计算的形式

其中  $\lambda = \tau/h$ ，称其为网格比。  
差分方程 (2.7) 再加上初始条件 (1.24) 的离散形式  $u_j^0 = f_j, j = 0, \pm 1, \dots$  (2.8)

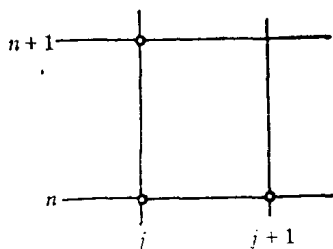


图 1.6

就可以按时间逐层推进，算出

各层的值。这里使用术语“层”是表示在直线  $t = n\tau$  上网格点的整体。差分方程 (2.7) 和初始条件的离散 (2.8) 结合在一起构成了一个差分格式。事实上，(2.7) 式就给出了根据初始条件 (2.8) 来确定  $u_j^n, j = 0, \pm 1, \dots$  的一个算法。因此有时候就称差分方程 (2.7) 为一个差分格式。以后我们不强调差分格式和差分方程之间的区别，但要作如下理解：说到差分格式就隐含了初始条件，边界条件的离散。在这样的含义下，当构造出差分方程后，就认为已构造出一个差分格式。

由第  $n$  个时间层推进到第  $n+1$  个时间层时, 公式 (2.7)<sup>''</sup> 提供了逐点计算  $u_i^{n+1}$  的明显表达式, 因此称 (2.7) 式为**显式格式**。并且我们注意到在公式 (2.7) 中, 计算第  $n+1$  层时只用到  $n$  层的数据。前后仅联系到两个时间层次, 故我们称 (2.7) 式为**两层格式**, 更明确地, 称其为**两层显式格式**。

若对  $t$  仍采用向前差商, 但对  $x$  采用向后差商, 即利用 (2.1) 和 (2.4) 式, 可以得到逼近微分方程 (1.23) 的另一差分方程

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \quad (2.9)$$

其节点如图 1.7 所示。显然, 此格式也是两层显式格式。

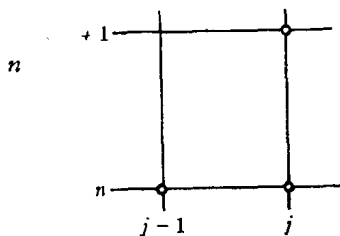


图 1.7

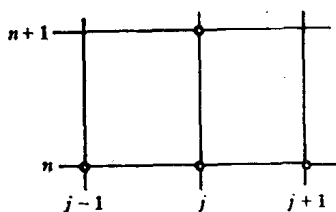


图 1.8

如果在上面的推导中, 我们用对  $x$  的中心差商来代替向前或向后差商, 即利用 (2.1) 和 (2.5) 式我们还可以得到逼近微分方程 (1.23) 的另一差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (2.10)$$

此格式所用到的节点如图 1.8 所示。可以将 (2.10) 式写成便于计算的形式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\lambda}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (2.10)'$$

其中  $\lambda = \tau/h$ 。容易看出,此格式也是两层显式格式。由于差分格式 (2.10) 中,利用空间的中心差商来逼近相应的关于  $x$  的微商项,因此我们称 (2.10) 为中心差分格式或称中心格式。相对地,差分格式 (2.7) 和 (2.9) 称为偏心差分格式。

上面我们构造了关于对流方程 (1.23) 的三种差分格式。用同样的思想可以建立扩散方程 (1.4) 的差分格式。利用 (2.1) 和 (2.6) 式有

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} \\ & - a \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{h^2} \\ & = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j + O(\tau + h^2) \end{aligned}$$

如果  $u$  是 (1.4) 式的光滑解,即  $u$  满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

那么,容易看出,扩散方程 (1.4) 可以用如下的差分方程来近似,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0 \quad (2.11)$$

$$j = 0, \pm 1, \dots, \quad n = 0, 1, \dots。$$

差分格式 (2.11) 所用到的节点如图 1.9 所示。我们可以将

(2.11) 式写成便于计算的形式

$$u_j^{n+1} = u_j^n + a\mu(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.11)'$$

其中  $\mu = \tau/h^2$ ，亦称网格比。我们注意到  $\mu$  的表达式与对流方程的差分格式的网格比  $\lambda$  的表达式是不同的。一般情况下，我们

也用字母  $\lambda$  代替字母  $\mu$ 。这是由于不同的表达式是属于不同类型的方程的差分格式，因此不会引起混淆。容易看出，(2.11) 式也是二层显式格式，称其为**古典显式格式**。初始条件 (1.5) 的离散是显然的，

$$u_j^0 = \varphi_j, \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (2.12)$$

利用 (2.11) 和 (2.12) 式可以依次计算出  $n=1, 2, \dots$ ，各层上的值  $u_j^n$ 。

### 2.3 隐式差分格式

前面建立的差分格式都是显式的，即计算  $u_j^{n+1}$  有明显的表达式可以使用，但并非都是如此。如果关于  $t$  的偏导数采用向后差商来近似：

$$\frac{u(x_j, t_n) - u(x_j, t_{n-1})}{\tau} = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^n + O(\tau)$$

仿前面推导，由上式及 (2.6) 可以得到扩散方程 (1.4) 的另一差分逼近：

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0 \quad (2.13)$$

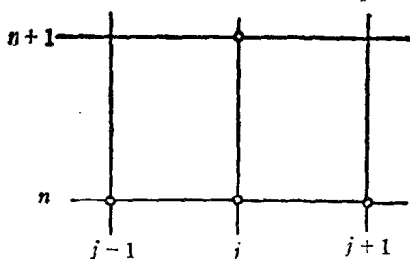


图 1.9



此差分格式节点图示如图 1.10。

可以把 (2.13) 式写成下面形式

$$\begin{aligned}
 & -a\lambda u_{j+1}^n + (1 + 2a\lambda)u_j^n \\
 & - a\lambda u_{j-1}^n = u_j^{n-1} \quad (2.13)'
 \end{aligned}$$

其中  $\lambda = \tau/h^2$ ，可以看出， $u_j^n$  不能按一公式直接由  $u_j^{n-1}$  算出。形如

(2.13) 的差分格式一般适用于求解初边值问题或满足周期条件的初值问题。

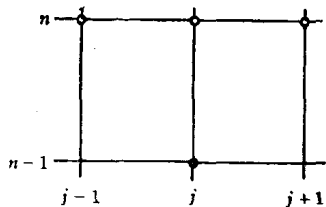


图 1.10

为简单起见，我们给出第一边界条件的扩散方程的初边值问题：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 < x < l \\
 u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad t > 0
 \end{aligned}$$

其中  $a > 0$ 。

扩散方程用差分格式 (2.13) 来近似，初始条件用 (2.12) 进行离散，而边界条件的离散则使用：

$$\begin{cases} u_0^n = 0, & n > 0 \\ u_J^n = 0, & n > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

其中  $h = l/J$ 。

令

$$\mathbf{U}^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{j-1}^n)^T$$

则可将 (2.13)' 和 (2.14) 合写成

$$\mathbf{A}\mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n-1} \quad (2.15)$$

其中