

工程中的数学方法

T. v. 卡曼 著
M. A. 比奧

科学出版社

工程中的数学方法

T. v. 卡曼 著
M. A. 比奥

高庆琳 吴宜 译
赵旭生

科学出版社

1966

MATHEMATICAL METHODS IN ENGINEERING

by
Theodore v. Kármán
and
Maurice A. Biot

内 容 简 介

本书系根据卡曼(T. v. Kármán)与比奥(M. A. Biot)合著的“工程中的数学方法”(Mathematical Methods in Engineering)的1940年版译出。

本书作者在工程问题中选出一些有代表性的问题,通过解决这些工程问题来讲述数学方法。

所选出的工程问题包括:质点的振动;弹性体的平衡、振动及稳定;电的非周期性现象等问题。所讲述的数学方法包括:常微分方程;贝塞尔函数;常微分方程的边值问题;傅氏级数;变分学的直接法;运算微积及差分方程等等。

工程中的数学方法

卡曼、比奥 著
高庆琳 等译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街117号

北京市书刊出版业营业许可证出字第061号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1959年12月第一版	开本:850×1168 1/32
1966年2月第五次印刷	印张:14 1/4 插页:2
印数:14,001—16,500	字数:377,000

统一书号:15031·234

本社书号:3472·15—10

定价:[科六] 2.15元

原 著 者 序

本书的主要目的是向讀者介紹工程問題的数学处理方法。現代的工程师越来越需要更多的数学知識。然而，大多数工程师所用到的数学只是在大学中所学到的数学知識的一小部分，看起来，在很多情况下，大学里学到的数学知識是足够的，但是大学生对于如何将給定的物理問題或工程問題表成数学形式的能力並沒有充分培养起来。換句話說，与其增加更多的数学課程，不如使工程师更好地了解怎样应用数学。

有两种方法教学生如何把数学应用到工程問題上。第一种方法是从数学中选出一些分支，其中加入一些适当的应用上的例子，对这些內容做系統的学习；另一种方法是选出某些具有代表性的工程問題，并且通过解决这些問題来表明如何应用数学。已經有很多好的书采用第一种方法。本书是按照第二种方法的一个嘗試。当然，如果将这种方法推行到极端是会有缺点的；因此，本书的某些部分主要还是講数学問題，然而，即使在這些部分，数学概念还是从应用观点提出来，而不是从这些概念的純邏輯发展的观点提出来。

虽然作者明明知道，例如，偏微分方程，积分方程，复变函数，向量与張量分析对于有科学素养的工程师都是不可缺少的数学工具，但是为保持本书适当的篇幅，內容的选择不得不要受到限制。

看懂本书所需要的数学准备知識是普通微积分，初等解析几何，初等代数；其中包括綫性方程，行列式及代数方程的一些知識。我們假設讀者能掌握复数的基本运算，不必要預先懂得微分方程。为避免在数学术語上发生含混，我們把代数，微积分与解析几何的某些基本定义編写在“数学名詞与術語”內。

最前面两章，是关于微分方程与貝塞尔函数，基本上是数学性质的。在后面各章中，我們試着把具有数学性质的知識的大部分夹在

3770/13

需要这些数学的問題中。例如椭圆积分与摆的古典問題结合起来討論，向量代数出现在关于动力学基本概念的一章里，这一章的选材是因为我們认为理論力学在工程課程里的物理与应用力学之間通常沒有占据它应有的位置。讲课教师如果打算避免拉格朗日方程，可以删掉第三章的最末几节。第五及第六章的例子曾用到拉格朗日方程，但这些例子可以不用拉格朗日的方法来討論。然而，熟悉广义坐标，广义力以及拉格朗日的力学的其他概念，对于具有科学头脑的工程师肯定是有好处的。

本书中詳細討論的問題大多数是从质点动力学，刚体动力学以及結構理論里选出来的，少数是从电路理論里选出来的。有很多力学振动問題可以容易地轉換成电网络振盪問題。每章末的习题，除了数学运算的練習以外，还包括数学在工程学的各方面的应用。例如流体力学，热传导等等。

对于用这本书教工学院学生的数学家，我們要求他不要忘記，这样的一本书不可能包括书中所有的数学論点的严格証明，并希望这些数学論点中的大多数，甚至在純粹数学家的最高法庭上也站得住。有时候工程师会錯誤地将书中的某些数学方法应用于这些方法的有效范围以外，因而发生困难；可能这种事是无法避免的。在这种情形下，他最好去請教一位数学家。

我們要求搞工程的教师考虑这一点：我們不能总用他所认为最有意义的問題来闡明某些数学方法。他可以編出他自己的問題来代替本书中的問題。

我們要求学生記住这一点：仅仅把某一个問題的詳細的处理方法看懂并不保証他真正地理解这个方法，除非他亲自解一些类似的問題。

假如我們給出的問題与从事实际工作的工程师目前所遇到的个别問題并不完全一致，或者他在本书內沒有找到他所希望找到的个别方法，則希望他能諒解，他也可以閱讀那些暂时不大引起他兴趣的章节，因为可能他将来会遇到类似的問題。

每一章的輪廓在本书的两个作者紧密的合作下写出，然后每一个作者单独地写出某几章。最后，为了书的連續性，經過互相討論将整个的手稿重新整理。

T. V. 卡曼

M. A. 比奧

加省工学院
哥伦比亚大学

目 录

原著者序	i
第一章 常微分方程引論	1
引言(1)	1
1. 积分学的基本問題(1)	1
2. 定积分的数值計算(3)	3
3. 一阶微分方程(6)	6
4. 一阶綫性微分方程(10)	10
5. 一阶微分方程的奇解(12)	12
6. 一阶微分方程的数值解法(13)	13
7. 高阶微分方程一般的論述(18)	18
8. 常係数的一阶及二阶綫性微分方程(21)	21
9. 双曲綫函数(24)	24
10. 常係数二阶綫性微分方程(續)(28)	28
11. 綫性微分方程的一般論述(32)	32
12. 常係数的高阶綫性微分方程. 綫性方程組(34)	34
习題(38)	38
参考文献(42).	42
第二章 关于貝塞尔函数的若干知識	43
引言(43)	43
1. 貝塞尔微分方程与零阶貝塞尔函数(43)	43
2. 高阶貝塞尔函数(50)	50
3. 貝塞尔函数的标准形式(51)	51
4. 一些貝塞尔函数的特性(54)	54
5. 修正的貝塞尔函数(56)	56
6. 表与符号(57)	57
7. 貝塞尔微分方程的若干等同形式(58)	58
习題(62)	62
参考文献(64).	64
第三章 动力学的基本概念	65
引言(65)	65
1. 牛頓运动定律(65)	65
2. 向量的加法与乘法(65)	65
3. 一質点的运动(68)	68
4. 牛頓定律在質点系的应用(71)	71
5. 質量中心(重心)(72)	72
6. 刚体的运动(75)	75
7. 迴轉仪(78)	78
8. 功与能(81)	81
9. 虛位移定理(85)	85
10. 达伦培尔原理(88)	88
11. 广义坐标. 拉格朗日方程(91)	91
习題(95)	95
参考文献(98).	98
第四章 动力学的初等問題	99
引言(99)	99
1. 在有阻力的介質中一質点的直綫运动(99)	99
2. 在	

- 一依赖于质点位置的力作用下质点的直线运动(100) 3. 摆的运动(102) 4. 关于椭圆积分及椭圆函数的一些知识(106) 5. 具有弹性约束及阻尼时质点的直线运动(117) 6. 在一週期性外力作用下—具有弹性约束的质点的运动, 共振(120) 7. 有阻尼的质量的强迫振动(124) 8. 在重力及空气阻力作用下质点的运动(外弹道问题)(126) 9. 飞机的运动方程(130) 10. 具有高度稳定性及小转动惯量的飞机的飞行轨道(起伏运动)(Phugoid 运动)(131) 11. 一阶微分方程的奇点(137) 习题(144) 参考文献(147).
- 第五章 保守系统的微幅振动**149
 引言(149) 1. 保守系统的微幅振动——概论(149) 2. 两个串联质量的线性振动(152) 3. 具有静力耦合的保守系统, 一般理论(156) 4. 主振动的正交性(158) 5. 一具有三个自由度的系统的例子(163) 6. 用主振动表示动能及位能(165) 7. 强迫振动(171) 8. 具有实根的代数方程的解(175) 9. 频率方程的解及利用矩阵来计算简正型(180) 10. 具有动耦合的保守系统的例子——双摆(188) 11. 关于具有动耦合的系统的一般说明(191) 习题(193) 参考文献(198).
- 第六章 非保守系统的微幅振动**199
 引言(199) 1. 非保守系统的微幅振动, 一般说明(199) 2. 一个非保守系统的例子, 机翼颤动的初等理论(203) 3. 耗散系统、力学与电学系统间振动的比拟(210) 4. 减振器的理论(213) 5. 等速转动的稳定, 垂直陀螺(218) 6. 振动系统的稳定条件(223) 7. 代数方程的复根的计算(227) 8. 飞机的纵向稳定(229) 习题(235) 参考文献(238).
- 第七章 结构理论的分微方程**239
 引言(239) 1. 受铅垂载荷的绳的变位(240) 2. 弹性支座上的细绳(245) 3. 梁的弯曲, 一般理论(246) 4. 梁的挠度, 弹性基础上的梁(249) 5. 悬桥理论(254) 6. 简化为静力学问题的

諧和振动的問題 (260)	7. 受拉力作用的繩的諧和振动 (261)
8. 梁的振动。旋轉机軸的临界速率 (262)	9. 承受一个集中質量的梁的振动 (266)
10. 等截面悬臂梁的受迫振动 (270)	11. 等截面柱在軸向載荷作用下的压屈 (271)
12. 楔形柱的压屈。自重作用下柱的压屈 (274)	13. 弹性支承梁的压屈 (278)
14. 軸向及側向載荷联合作用在飞机翼的翼梁上 (280)	15. 弯矩的图解法 (282)
16. 本章內所遇到的边界問題的一般討論 (283)	17. 用迭代漸近法确定特征值 (286)
	习题 (289) 参考文献 (294).
第八章 傅立叶級数应用于結構問題295	
引言 (295)	1. 用三角級数解弹性支承梁的微分方程 (295)
	2. 傅立叶級数和傅立叶係数 (297)
	3. 用傅立叶級数求近似任意函数 (302)
	4. 确定傅立叶係数的数解法, 图解法和机械方法。調和分析 (307)
	a. 数解法 (307) b. 图解法 (309) c. 机械法 (310)
	5. 弹性支承等截面梁的問題 (續前) (311)
	6. 无限大跨度梁。用傅立叶积分的解法 (314)
	7. 在調和載荷作用下梁的受迫振动 (318)
	8. 使用三角級数确定特征值。能量法 (322)
	9. 用瑞利-里茲方法解决受載荷的薄膜的平衡問題 (329)
	习题 (332) 参考文献 (334).
第九章 週期現象的复数表示335	
引言 (335)	1. 穩态与过渡状态 (335)
	2. 向量表示 (336)
	3. 阻抗的概念 (339)
	4. 电系統及机械系統的阻抗的計算法則 (343)
	5. 週期运动的迭加 (346)
	6. 对任意週期力的反应。傅氏級数的复数形式 (349)
	习题 (353) 参考文献 (354).
第十章 过渡現象。运算微积355	
引言 (355)	1. 傅氏积分对非週期現象的应用 (355)
	2. 单位阶梯函数与单位脉冲函数 (360)
	3. 导納指数及对单位脉冲的反应 (363)
	4. 丢阿买 (Duhamel) 的积分 (368)
	5. 应用傅氏积分决定单位阶梯的反应。布隆卫其 (Bromwich) 积分 (370)
	6. 卡

森 (Carson) 的积分方程(372) 7. 算子的概念(375) 8. 运算法則(376) 9. 某些基本算子(379) 10. 运算微积的展开法(381) 11. 对于常电压突然作用时电网络的反应(384) 12. 无阻尼的机械系统对于突然作用力的反应(388) 13. 算子的相乘. 包瑞尔 (Borel) 定理(393) 14. 突然作用的交流电压时网络的反应(396) 习题(398) 参考文献(399).

第十一章 有限差分方程在工程上的应用401

引言(401) 1. 差分法(401) 2. 常系数的綫性差分方程(402) 3. 在連續梁問題上的应用(405) 4. 矩形格子框架的翘曲(408) 5. 鏈式电絕緣子中的电压降(413) 6. 多汽缸內燃机的临界速率(415) 7. 机械鏈式中的波(422) 8. 电滤波器(425) 习题(428) 参考文献(429).

数学名詞与術語430

习题答案436

第一章

常微分方程引論

引言 本章的第一部分,包含第一节到第七节,把单变量微分方程的基本定理作一个簡短复习. 在第一节中,从微分方程的最简单的形式(即可以用求积法解出的)来开始. 第三节第四节叙述一阶微分方程的基本原理. 第六节論述微分方程的数值解法,第七节包含高阶微分方程的一般論述. 最后几节叙述綫性微分方程,特别是要論述常係数的方程与其特殊解法.

1. 积分学的基本問題 微分方程最简单的关系式为

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (1.1)$$

它需要决定一个函数 $y(x)$, 此函数的一阶导数等于自变量 x 的一个給定函数 $f(x)$. 而我們又假設 $f(x)$ 是单值的, 并且是連續的.

方程(1.1)的解是借助于积分学的基本定理, 即定积分 $\int_a^x f(\xi) d\xi$ 对于上限 x 的微商等于 $f(x)$; 此处之下限 a 为任意常数. 实际上, 如果把 $f(\xi)$ 作为 ξ 的函数画出(图 1.1), 則所求的定积分是以 ξ 为橫軸, 縱座标为 $f(\xi)$ 的曲綫, 在 $\xi = a$ 处的縱标 AD 与 $\xi = x$ 处的縱标 BC 等所围成的面积 $ABCD$. 如图 1.1 所示面积 $ABCD$ 定义为小矩形的和的极限值. 如果我們把定积分的上限 x 增加 Δx , 則面积相应地增加 $f(x) \Delta x$; 因此, 积分的导数是上限 x 的函数, 等于方程(1.1)所求的 $f(x)$. 即

$$y(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi \quad (1.2)$$

是微分方程(1.1)的解. 在此种情况, 即微分方程的解是对已知函数作积分而求出时, 我們称此方程是根据求积法或直接积分解出.

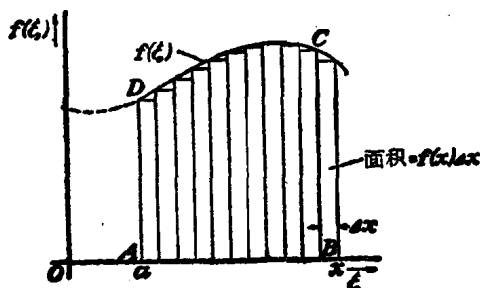


图 1.1 定积分的几何解释。

如果我们把 $y = \int_a^x f(\xi) d\xi$ 作为 x 的函数来作图，则得到微分方程 (1.1) 的积分曲线。此积分曲线通过点 $x = a, y = 0$ 。为了得出通过任意点 $x = x_0, y = y_0$ 的积分曲线，可以写出 $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$ 。改变 x_0

时，此积分只差一常数。如在 $f(x)$ 的定义域内选取原点 $\xi = 0$ 。则可写出

$$y = \int_0^x f(\xi) d\xi + C, \quad (1.3)$$

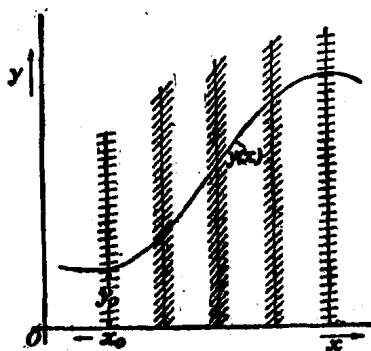
此处 C 为任意常数。

为了记号简单，我们一般把这个以上限 x 为变量的定积分写成 $\int_0^x f(x) dx$ ，但在某些情况下这种写法会引起混乱时除外。

含有任意常数 C 的表达式 (1.3)，构成了方程 (1.1) 的通解；对应于 C 的一个特殊值的任一函数 $f(x)$ 是 (1.1) 的特解。此通解表示单参数曲线族，在这个特殊情况下，它们是相同的等距离曲线。

求解方程 (1.1) 的另一个方法是与导函数的基本的几何表示有关的。方程 (1.1) 说明，积分曲线族的斜率是横坐标 x 的给定函数，也就是

说，通过相同纵坐标的积分曲线族的点的斜率是相同的 (图 1.2)。因此，我们若由一任意点 x_0, y_0 出发，并且通过 x_0, y_0 画一连续曲线，使在此曲线上每一点的斜率即如方程 (1.1) 所规定，则得出通过 x_0, y_0

图 1.2 通过点 x_0, y_0 的积分曲线的构成。

点的积分曲线。如上所述,此曲线的方程是 $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x) dx$ 。因为 $f(x)$ 假设是单值的,这样的曲线只有一条。使 x_0, y_0 变化,则显然能画出无数条这样的曲线,这些曲线构成一组单参数等距离的曲线族。

2. 定积分的数值计算 方程 (1.1) 的解牵涉到如下形式的定积分的计算:即

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.1)$$

此定积分可用如下方法近似计算。首先将积分区间 ab 分割为 n 个间隔为 h 的等间隔区间,则 $b - a = nh$ (图 2.1)。两个相邻的纵坐标

$$\begin{aligned} y_r &= f(a + rh), \\ y_{r+1} &= f[a + (r + 1)h], \end{aligned}$$

作成了面积等于 $\frac{1}{2}(y_r + y_{r+1})h$ 的梯形 $ABCD$ 。定积分 (2.1) 的全部面积可以用纵坐标 y_0, y_1, \dots, y_n 所作成的全部梯形面积之和来近似表示:

$$S = \frac{1}{2} [(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \dots + (y_{n-1} + y_n)] h$$

或

$$S = \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right) h. \quad (2.2)$$

公式 (2.2) 称作梯形法则。这个法则相当于:把等间隔纵坐标直线连接起来,来近似曲线 $y = f(x)$ 。

定积分的更精密的值可以用一系列的抛物线弧来近似曲线 $y = f(x)$ 而求得。这就引出森浦生 (Simpson) 法则。

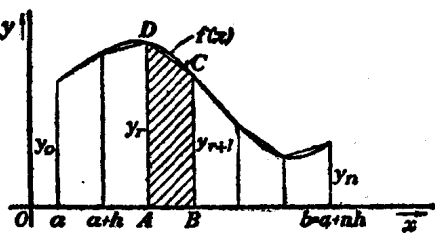


图 2.1 用梯形法则来求定积分

$$\int_a^b f(x) dx \text{ 的值.}$$

假如考虑位于区间 $a \leq x \leq a+2h$ 上的曲线部分。分别用 $y_0, y_1,$ 与 y_2 代表对于横坐标 $a, a+h$ 与 $a+2h$ 的纵坐标 (图 2.2)。

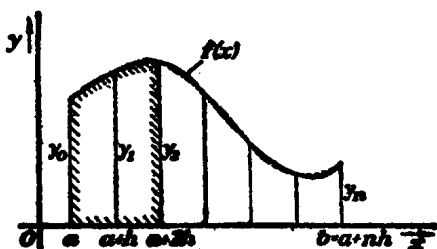


图 2.2 用森浦生法则来求定积分

$$\int_a^b f(x) dx \text{ 的值.}$$

通过点 $(a+h, y_1)$ 的任意抛物线的方程是:

$$\eta = y_1 + \alpha[x - (a+h)] + \beta[x - (a+h)]^2. \quad (2.3)$$

我们确定常数 α 与 β , 此曲线需要通过点 (a, y_0) 与 $(a+2h, y_2)$ 。因此得出

$$\alpha = \frac{y_2 - y_0}{2h},$$

$$\beta = \frac{y_2 + y_0 - 2y_1}{2h^2}.$$

此抛物线弧与 x 轴所围成之面积为

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2h} \eta dx &= \int_a^{a+2h} y_1 dx + \alpha \int_a^{a+2h} [x - (a+h)] dx \\ &+ \beta \int_a^{a+2h} [x - (a+h)]^2 dx \\ &= \frac{1}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) h. \end{aligned}$$

其次,用同样的方法选出 $(a+2h, y_1), (a+3h, y_3)$ 和 $(a+4h, y_4)$ 三点,并且计算过此三点之抛物线与 x 轴所围成之面积: $\frac{1}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)h$, 以下对于区间 $(a+4h)$ 至 $(a+6h)$, $(a+6h)$ 到 $(a+8h)$ 等等也采取同样的方法。每个抛物线复盖着间隔 $2h$, 如果我们把 ab 区间分为偶数 n 个等间隔 h , 则由 a 到 b 的全部曲线 $y = f(x)$ 可近似地由 $\frac{n}{2}$ 个抛物线的弧所代表。因此,可用此抛物线弧以下的面积和来表示积分 (2.1) 的面积近似值。

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{h}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots \\
 &\quad + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)] \\
 &= \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots \\
 &\quad + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n], \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

此处等間隔 h 的数目 n 是偶数。此公式就是熟悉的森浦生法則。

此公式的近似程度随間隔 h 的大小而异。也可能建立一些比森浦生法則更精确的公式，例如在諸間隔 h 上，用高次多項式来近似曲綫 $y = f(x)$ 等¹⁾。但在多数实际情况中，森浦生法則能滿足工程方面的需要。

例 π 的值是由定积分

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\tan^{-1}x]_0^1$$

給出。今計算此定积分之值。用間隔 $h=0.25$ ，順次計算 $x=0$ 与 $x=1$ 之間的

函數 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的值。得到 $y_0=1.00000000$ ， $y_1=0.94117647$ ， $y_2=0.80000000$ ，

$y_3=0.64000000$ 和 $y_4=0.50000000$ 。

梯形法則給出

$$\frac{\pi}{4} = 0.25 \left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_4 \right],$$

則

$$\pi = 3.13117647.$$

森浦生法則給出

$$\frac{\pi}{4} = \frac{0.25}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4],$$

則

$$\pi = 3.14156896.$$

π 的九位正确值为

$$\pi = 3.14159265.$$

將以上两个近似值作比較，可以看出森浦生法則的优越性，即用此法則可精确到五位数，而梯形法則仅有两位是正确的，如果用更小的間隔 $h=0.1$ 时，梯形法則得出 $\pi=3.13992597$ ，森浦生法則得出 $\pi=3.14159260$ 。后者的值有八

1) 參看 J. B. Scarborough, "Numerical Mathematical Analysis," pp. 117—152.

位是正确的,而梯形法则给出的值并没有显著的改进。

3. 一阶微分方程 我们定义一阶微分方程为自变数 x , 未知函数 $y(x)$ 与其一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 间的关系式:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (3.1)$$

显然,方程 (1.1) 是此关系式的最简单情况。

首先假设 $f(x, y)$ 是 x 与 y 的单值函数, 对 x 和 y 是可微的, 且其导数是有限的。

虽然我们求积法(直接积分法)解出方程 (1.1), 但对方程 (3.1) 来说, 仅在特殊情况才是可能的。不过用来解方程 (1.1) 的第二种方法可以推广到 (3.1) 的情况。我们画出由

$$f(x, y) = \text{const.} \quad (3.2)$$

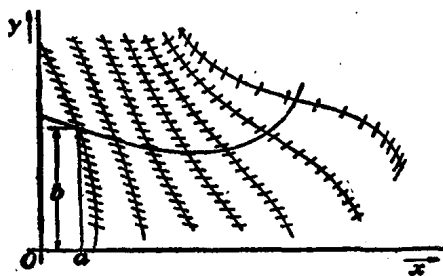


图 3.1 等傾綫法的图示。曲线 $f(x, y) = \text{const}$ 上的平行截綫, 表示所截該曲线的积分曲线羣的斜率 dy/dx 。

定义的曲线族。显然此族中的每一条曲线连接许多点, 在这些点上 (3.1) 的积分曲线具有同样斜率。改变方程 (3.2) 中的常数值, 则得到这样一族曲线, 称作等傾綫(图 3.1)。因此求解 (3.1) 的问题, 在于画出一些曲线, 这些曲线与每条等傾綫都相交, 使曲线在交点的斜率等于该等傾綫所代表的斜

率。这样的积分曲线由某一条等傾綫的不同点出发可有无限多个。图 3.1 表示通过点 $x = a, y = b$ 的积分曲线。在第 1 节中的等傾綫为 $x = \text{const}$ 的直线, 为此节的特殊情况。

这样解一阶微分方程的方法称为等傾綫法, 如果 $f(x, y)$ 是 x, y 的单值连续函数, 则这个方法可作为逐步法来使用。然而以后将遇到, 某些特殊的点不能满足以上条件, 例如, 假设 $f(x, y)$ 是两个

函数 φ 与 ψ 的商, 即 $f(x, y) = \varphi(x, y)/\psi(x, y)$. 若是 φ 与 ψ 在同一点是零, 则 $f(x, y)$ 具有 $\frac{0}{0}$ 的形式, 此时等傾綫法若不作更深入的討論則不能应用. 在这种奇点隣域內的积分曲綫的性質, 将要在以后遇到与其相关的問題时一併討論 (第四章, 第 10, 11 节).

分离变数 前面說过, 在一般情况, 方程 (3.1) 不能用求积法来解. 然而, 在一些重要的情况下是可能的. 当变数 x 与 y 可以分离时, 就是这些特殊情况中的一个.

假設 $f(x, y)$ 具有 $f(x, y) = \varphi(x)/\psi(x)$ 的形式; 則公式 (3.1) 变为

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}, \quad (3.3)$$

也就是

$$\psi(y) \frac{dy}{dx} = \varphi(x). \quad (3.4)$$

(3.4) 的左側显然是函数 $\Psi(y)$ 对 x 的导数, 其中 $\Psi(y)$ 定义为

$$\Psi(y) = \int_b^y \psi(y) dy, \quad (3.5)$$

b 为任意常数, 因此 (3.4) 可写为

$$\frac{d\Psi}{dx} = \varphi(x).$$

此方程的形式与 (1.1) 相同; 所以积分即得

$$\Psi = \int_b^y \psi(y) dy = \int_a^x \varphi(x) dx. \quad (3.6)$$

满足方程 (3.6) 的 x 与 y 的值, 决定了微分方程 (3.3) 的一条积分曲綫. 把 (3.6) 写成如下形式:

$$G(x, y) = \int_b^y \psi(y) dy - \int_a^x \varphi(x) dx,$$

用微分法可以验证

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

$x = a$ 与 $y = b$ 两个定积分同时为零; 所以 $x = a, y = b$ 为积分曲綫上一点; 換言之, (3.6) 是通过任意点 $x = a, y = b$ 的积分曲綫方