工程中的数学方法

T. v. 卡曼
M.A. 比奥 著

科学出版社

工程中的数学方法

T. v. 卡曼
M. A. 比奥 著

高庆琳
赵旭生 吴宜 译

科学出版社

1966

MATHEMATICAL METHODS
IN ENGINEERING

by

Theodore v. Kármán

and

Maurice A. Biot

內 容 简 介

本书系根据卡曼(T. v. Kármán)与比奥(M. A. Biot)合著的"工程中的数学方法"(Mathematical Methods in Engineering)的1940年版译出.

本书作者在工程问题中选出一些有代表性的问题，通过解决这些工程问题来讲述数学方法.

所选出的工程问题包括:质点的振动;弹性体的平衡、振动及稳定;电的非周期性现象等问题. 所讲述的数学方法包括: 常微分方程; 贝塞尔函数; 常微分方程的边値问题;傅氏级数;变分学的直接法;运算微积及差分方程等等.

工程中的数学方法

卡曼、比奥 著

高庆琳等译

*

科学出版社 出版
北京朝阳門内大街 117 号
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1959年12月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1966年 2 月第五次印刷 印张：14 1/4 插页：2
印数：14,001—16,500 字数：377,000

统一书号：15031·234
本社书号：3472·15—10

定价：[科六] 2.15 元

原 著 者 序

本书的主要目的是向讀者介紹工程問題的数学处理方法. 現代的工程师越来越需要更多的数学知識. 然而, 大多数工程师所用到的数学只是在大学中所学到的数学知識的一小部分, 看起来, 在很多情况下, 大学里学到的数学知識是足够的, 但是大学生对于如何将給定的物理問題或工程問題表成数学形式的能力并沒有充分培养起来. 換句話說, 与其增加更多的数学課程, 不如使工程师更好地了解怎样应用数学.

有两种方法教学生如何把数学应用到工程問題上. 第一种方法是从数学中选出一些分支, 其中加入一些适当的应用上的例子, 对这些內容做系統的学习; 另一种方法是选出某些具有代表性的工程問題, 并且通过解决这些問題来表明如何应用数学. 已經有很多好的书采用第一种方法. 本书是按照第二种方法的一个尝試. 当然, 如果将这种方法推行到极端是会有缺点的; 因此, 本书的某些部分主要还是講数学問題, 然而, 即使在这些部分, 数学概念还是从应用观点提出来, 而不是从这些概念的純邏輯发展的观点提出来.

虽然作者明明知道, 例如, 偏微分方程, 积分方程, 复变函数, 向量与张量分析对于有科学素养的工程师都是不可缺少的数学工具, 但是为保持本书适当的篇幅, 內容的选择不得不受到限制.

看懂本书所需要的数学准备知識是普通微积分, 初等解析几何, 初等代数; 其中包括綫性方程, 行列式及代数方程的一些知識. 我們假設讀者能掌握复数的基本运算, 不必要預先懂得微分方程. 为避免在数学术語上发生含混, 我們把代数, 微积分与解析几何的某些基本定义編写在"数学名詞与术語"內.

最前面两章, 是关于微分方程与貝塞尔函数, 基本上是数学性质的. 在后面各章中, 我們試着把具有数学性质的知識的大部分夾在

需要这些数学的問題中．例如椭圓积分与摆的古典問題結合起来討論，向量代数出現在关于动力学基本概念的一章里，这一章的选材是因为我們認为理論力学在工程課程里的物理与应用力学之間通常沒有占据它应有的位置．讲課教师如果打算避免拉格朗日方程，可以删掉第三章的最末几节．第五及第六章的例子曾用到拉格朗日方程，但这些例子可以不用拉格朗日的方法来討論．然而，熟悉广义坐标，广义力以及拉格朗日的力学的其他概念，对于具有科学头脑的工程师肯定是有好处的．

本书中詳細討論的問題大多数是从質点动力学，刚体动力学以及結构理論里选出来的，少数是从电路理論里选出来的．有很多力学振动問題可以容易地轉換成电网絡振盪問題．每章末的习題，除了数学运算的練习以外，还包括数学在工程学的各方面的应用．例如流体力学，热传导等等．

对于用这本书教工学院学生的数学家，我們要求他不要忘記，这样的一本书不可能包括书中所有的数学論点的严格証明，并希望这些数学論点中的大多数，甚至在純粹数学家的最高法庭上也站得住．有时候工程师会錯誤地将书中的某些数学方法应用于这些方法的有效范围以外，因而发生困难；可能这种事是无法避免的．在这种情形下，他最好去請教一位数学家．

我們要求搞工程的教师考虑这一点：我們不能总用他所認为最有意义的問題来闡明某些数学方法．他可以編出他自己的問題来代替本书中的問題．

我們要求学生記住这一点：仅仅把某一个問題的詳細的处理方法看懂并不保証他眞正地了解这个方法，除非他亲自解一些类似的問題．

假如我們給出的問題与从事实际工作的工程师目前所遇到的个别問題并不完全一致，或者他在本书內沒有找到他所希望找到的个别方法，則希望他能諒解，他也可以閱讀那些暫时不大引起他兴趣的章节，因为可能他将来会遇到类似的問題．

每一章的輪廓在本书的两个作者紧密的合作下写出，然后每一个作者单独地写出某几章．最后，为了书的連續性，經过互相討論将整个的手稿重新整理．

T. V. 卡曼
M. A. 比奥

加省工学院
哥伦比亚大学

目　　录

第 一 章

常微分方程引論

引言 本章的第一部分，包含第一节到第七节，把单变量微分方程的基本定理作一个簡短复习. 在第一节中，从微分方程的最簡单的形式（即可以用求积法解出的）来开始. 第三节第四节叙述一阶微分方程的基本原理. 第六节論述微分方程的数值解法，第七节包含高阶微分方程的一般論述. 最后几节叙述綫性微分方程，特别是要論述常係数的方程与其特殊解法.

1. 积分学的基本問題 微分方程最簡单的关系式为

$$\frac{dy}{dx}=f(x). \tag{1.1}$$

它需要决定一个函数 $y(x)$，此函数的一阶导数等于自变量 x 的一个給定函数 $f(x)$. 而我們又假設 $f(x)$ 是单值的，并且是連續的.

方程(1.1)的解是借助于积分学的基本定理，即定积分 $\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ 对于上限 x 的微商等于 $f(x)$；此处之下限 a 为任意常数. 实际上，如果把 $f(\xi)$ 作为 ξ 的函数画出（图 1.1），则所求的定积分是以 ξ 为横軸，纵座标为 $f(\xi)$ 的曲綫，在 $\xi=a$ 处的纵标 AD 与 $\xi=x$ 处的纵标 BC 等所围成的面积 $ABCD$. 如图 1.1 所示面积 $ABCD$ 定义为小矩形的和的极限值. 如果我們把定积分的上限 x 增加 $\triangle x$，则面积相应地增加 $f(x)\triangle x$；因此，积分的导数是上限 x 的函数，等于方程 (1.1) 所求的 $f(x)$. 即

$$y(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi \tag{1.2}$$

是微分方程 (1.1) 的解. 在此种情况，即微分方程的解是对已知函数作积分而求出时，我們称此方程是根据求积法或直接积分解出.

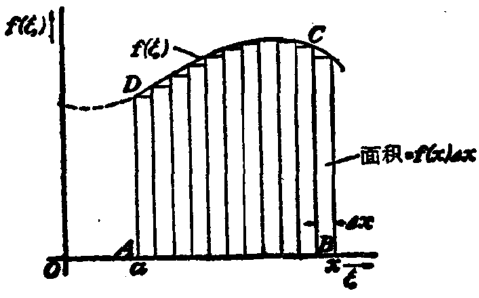

图1.1 定积分的几何解释.

如果我們将$y=\int_a^x f(\xi)d\xi$作为 x 的函数来作图，则得到微分方程(1.1)的积分曲綫. 此积分曲綫通过点 $x=a$, $y=0$. 为了得出通过任意点 $x=x_0$, $y=y_0$ 的积分曲綫，可以写出 $y=y_0+\int_{x_0}^x f(\xi)d\xi$. 改变 x_0 时，此积分只差一常数. 如在 $f(x)$ 的定义域内选取原点 $\xi=0$. 则可写出

$$y=\int_0^x f(\xi)d\xi+C, \tag{1.3}$$

此处 C 为任意常数.

为了記号簡单，我們一般把这个以上限 x 为变量的定积分写成 $\int_0^x f(x)dx$，但在某些情况下这种写法会引起混乱时除外.

含有任意常数 C 的表达式(1.3)，构成了方程(1.1)的通解；对应于 C 的一个特殊值的任一函数 $f(x)$ 是(1.1)的特解. 此通解表示单参数曲綫族，在这个特殊情况下，它們是相同的等距离曲綫.

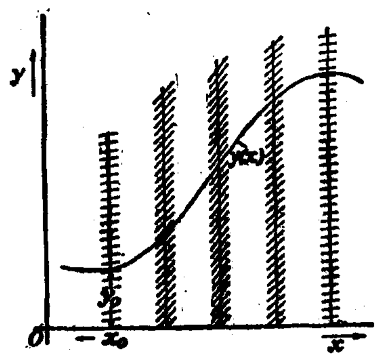

图1.2 通过点 x_0, y_0 的积分曲綫的构成.

求解方程(1.1)的另一个方法是与导函数的基本的几何表示有关的. 方程(1.1)說明，积分曲綫族的斜率是横座标 x 的給定函数，也就是說，通过相同縱座标的积分曲綫族的点的斜率是相同的(图1.2). 因此，我們若由一任意点 x_0, y_0 出发，并且通过 x_0, y_0 画一連續曲綫，使在此曲綫上每一点的斜率即如方程(1.1)所規定，则得出通过 x_0, y_0

点的积分曲綫．如上所述，此曲綫的方程是 $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$．因为 $f(x)$ 假設是单值的，这样的曲綫只有一条．使 x_0, y_0 变化，則显然能画出无数条这样的曲綫，这些曲綫构成一組单参数等距离的曲綫族．

2. 定积分的数值計算　方程 (1.1) 的解牽涉到如下形式的定积分的計算：即

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.1}$$

此定积分可用如下方法近似計算．首先将积分区間 ab 分割为 n 个間隔为 h 的等間隔区間，則 $b - a = nh$（图 2.1）．两个相隣的縱座标

$$y_r = f(a + rh),$$
$$y_{r+1} = f[a + (r + 1)h],$$

作成了面积等于 $\frac{1}{2}(y_r + y_{r+1})h$ 的梯形 $ABCD$．定积分 (2.1) 的全部面积可以用縱座标 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 所作成的全部梯形面积之和来近似表示：

$$S = \frac{1}{2}\left[(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \cdots + (y_{n-1} + y_n)\right]h$$

或

$$S = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)h. \tag{2.2}$$

公式 (2.2) 称作梯形法則．这个法則相当于：把等間隔縱座标直綫連接起来，来近似曲綫 $y=f(x)$．

定积分的更精密的值可以用一系列的抛物綫弧来近似曲綫 $y = f(x)$ 而求得．这就引出森浦生 (Simpson) 法則．

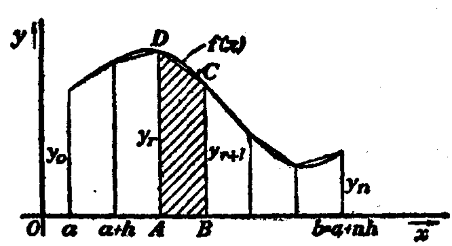

图 2.1　用梯形法則来求定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的值．

假如考虑位于区間$a \leqq x \leqq a+2h$上的曲綫部分．分别用y_0, y_1，与y_2代表对于横座标a, $a+h$与$a+2h$的縱座标(图2.2)．通过点$(a+h, y_1)$的任意抛物綫的方程是：

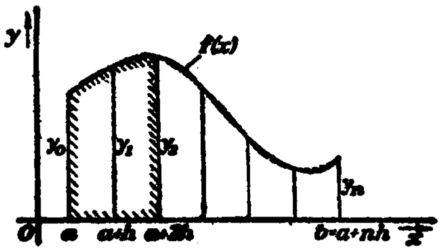

图2.2 用森浦生法則来求定积分$\int_a^b f(x)$的値．

$$\eta = y_1 + \alpha[x-(a+h)] + \beta[x-(a+h)]^2. \quad (2.3)$$

我們确定常数α与β，此曲綫需要通过点(a, y_0)与$(a+2h, y_2)$．因此得出

$$\alpha = \frac{y_2 - y_0}{2h},$$

$$\beta = \frac{y_2 + y_0 - 2y_1}{2h^2}.$$

此抛物綫弧与x軸所围成之面积为

$$\begin{aligned}\int_a^{a+2h} \eta\, dx &= \int_a^{a+2h} y_1\, dx + \alpha\int_a^{a+2h} [x-(a+h)]dx \\ &\quad + \beta\int_a^{a+2h}[x-(a+h)]^2 dx \\ &= \frac{1}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)h.\end{aligned}$$

其次，用同样的方法选出$(a+2h, y_2)$，$(a+3h, y_3)$和$(a+4h, y_4)$三点，并且計算过此三点之抛物綫与x軸所围成之面积：$\frac{1}{3}(y_2+4y_3+ y_4)h$，以下对于区間$(a+4h)$至$(a+6h)$，$(a+6h)$到$(a+8h)$等等也采取同样的方法．每个抛物綫复盖着間隔$2h$，如果我們把$ab$区間分为偶数$n$个等間隔$h$，則由$a$到$b$的全部曲綫$y=f(x)$可近似地由$\frac{n}{2}$个抛物綫的弧所代表．因此，可用此抛物綫弧以下的面积和来表示积分(2.1)的面积的近似值．

$$S=\frac{h}{3}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots$$
$$+(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)]$$
$$=\frac{h}{3}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots$$
$$+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n], \qquad (2.4)$$

此处等間隔 h 的数目 n 是偶数. 此公式就是熟悉的森浦生法則.

此公式的近似程度随間隔 h 的大小而异. 也可能建立一些比森浦生法則更精确的公式,例如在諸間隔 h 上,用高次多項式来近似曲綫 $y=f(x)$ 等[1]. 但在多数实际情况中,森浦生法則能滿足工程方面的需要.

例　π 的值是由定积分

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\left[\tan^{-1}x\right]_0^1$$

給出. 今計算此定积分之值. 用間隔 $h=0.25$, 順次計算 $x=0$ 与 $x=1$ 之間的函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的值. 得到 $y_0=1.00000000$, $y_1=0.94117647$, $y_2=0.80000000$, $y_3=0.64000000$ 和 $y_4=0.50000000$.

梯形法則給出

$$\frac{\pi}{4}=0.25\left[\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+\frac{1}{2}y_4\right],$$

則

$$\pi=3.13117647.$$

森浦生法則給出

$$\frac{\pi}{4}=\frac{0.25}{3}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4],$$

則

$$\pi=3.14156896.$$

π 的九位正确值为

$$\pi=3.14159265.$$

将以上两个近似值作比較, 可以看出森浦生法則的优越性, 即用此法則可精确到五位数, 而梯形法則仅有两位是正确的, 如果用更小的間隔 $h=0.1$ 时, 梯形法則得出 $\pi=3.13992597$, 森浦生法則得出 $\pi=3.14159260$. 后者的值有八

---

1) 参看 J. B. Scarborough, "Numerical Mathematical Analysis," pp. 117—152.

位是正确的，而梯形法則給出的值并沒有显著的改进.

3. 一阶微分方程 我們定义一阶微分方程为自变数 x，未知函数 $y(x)$ 与其一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 間的关系式：

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{3.1}$$

显然，方程 (1.1) 是此关系式的最簡单情况.

首先假設 $f(x,y)$ 是 x 与 y 的单値函数，对 x 和 y 是可微的，且其导数是有限的.

虽然我們用求积法（直接积分法）解出方程 (1.1)，但对方程 (3.1) 来說，仅在特殊情况才是可能的. 不过用来解方程 (1.1) 的第二种方法可以推广到 (3.1) 的情况. 我們画出由

$$f(x,y)=\text{const.} \tag{3.2}$$

定义的曲綫族. 显然此族中的每一条曲綫連接許多点，在这些点上 (3.1) 的积分曲綫具有同样斜率. 改变方程 (3.2) 中的常数值，則得到这样一族曲綫，称作等傾綫（图 3.1）. 因此求解 (3.1) 的問題，在于画出一些曲綫，这些曲綫与每条等傾綫都相交，使曲綫在交点的斜率等于該等傾綫所代表的斜率. 这样的积分曲綫由某一条等傾綫的不同点出发可有无限多个. 图 3.1 表示通过点 $x=a$，$y=b$ 的积分曲綫. 在第 1 节中的等傾綫为 $x=\text{const}$ 的直綫，为此节的特殊情况.

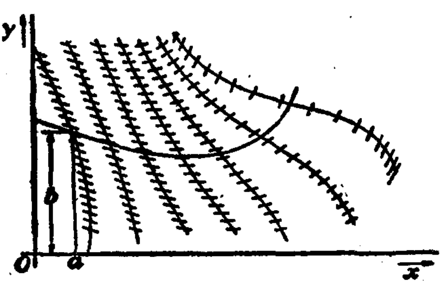

图 3.1 等傾綫法的图示. 曲綫 $f(x,y)=\text{const}$ 上的平行截綫，表示所截該曲綫的积分曲綫羣的斜率 dy/dx.

这样解一阶微分方程的方法称为等傾綫法，如果 $f(x,y)$ 是 x，y 的单値連續函数，則这个方法可作为逐步法来使用. 然而以后将遇到，某些特殊的点不能滿足以上条件. 例如，假設 $f(x,y)$ 是两个

函数 φ 与 ψ 的商，即 $f(x,y)=\varphi(x,y)/\psi(x,y)$. 若是 φ 与 ψ 在同一点是零，則 $f(x,y)$ 具有 $0/0$ 的形式，此时等傾綫法若不作更深入的討論則不能应用. 在这种奇点隣域內的积分曲綫的性質,将要在以后遇到与其相关的問題时一併討論（第四章，第 10，11 节）.

分离变数 前面說过，在一般情况，方程 (3.1) 不能用求积法来解. 然而，在一些重要的情况下是可能的. 当变数 x 与 y 可以分离时，就是这些特殊情况中的一个.

假設 $f(x,y)$ 具有 $f(x,y)=\varphi(x)/\psi(x)$ 的形式；則公式 (3.1) 变为

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\frac{\varphi(x)}{\psi(y)}, \tag{3.3}$$

也就是

$$\psi(y)\frac{dy}{dx}=\varphi(x). \tag{3.4}$$

(3.4) 的左側显然是函数 $\Psi(y)$ 对 x 的导数，其中 $\Psi(y)$ 定义为

$$\Psi(y)=\int_b^y\psi(y)dy, \tag{3.5}$$

b 为任意常数，因此 (3.4) 可写为

$$\frac{d\Psi}{dx}=\varphi(x).$$

此方程的形式与 (1.1) 相同；所以积分即得

$$\Psi=\int_b^y\psi(y)dy=\int_a^x\varphi(x)dx. \tag{3.6}$$

滿足方程 (3.6) 的 x 与 y 的值，决定了微分方程 (3.3) 的一条积分曲綫. 把 (3.6) 写成如下形式：

$$G(x,y)=\int_b^y\psi(y)\,dy-\int_a^x\varphi(x)dx,$$

用微分法可以驗証

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

$x=a$ 与 $y=b$ 两个定积分同时为零；所以 $x=a$, $y=b$ 为积分曲綫上一点；換言之，(3.6) 是通过任意点 $x=a$, $y=b$ 的积分曲綫方