现代数学译丛

多复变数

H. 格劳尔特　K. 弗里切 著

科 学 出 版 社

现代数学译丛

多复变数

H. 格劳尔特　K. 弗里切 著

黄　沙　李生训 译

钟同德 校

科学出版社

1988

内 容 简 介

本书系统而又简炼地介绍了多元复分析的近代理论和方法，在叙述中除通过许多例子和特殊情况的讨论外，还借助许多图形使读者熟悉这个理论的一些最重要的分支和方法. 作者是当代著名的多元复分析专家，在 Levi 问题，$\bar{\partial}$ 问题，Stein 流形和全纯函数的积分表示等许多方面都有杰出贡献. 书末附有校者对多元复分析这门学科的一般性介绍.

本书适合大学数学系师生，以及从事函数论、代数几何、微分几何、拓扑学、微分方程和理论物理研究的工作者阅读.

H. Grauert K. Fritzsche

Several Complex Variables

Springer-Verlag, 1976

现代数学译丛

多 复 变 数

H. 格劳尔特 K. 弗里切 著

黄 沙 李生训 译

钟同德 校

责任编辑 梅 霖 刘嘉善

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988 年12月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1988 年12月第一次印刷 印张：8 1/4

印数：0001—6,150 字数：214,000

ISBN 7-03-000562-7/O·145

定 价：3.80 元

序　言

本书是由介绍多复变数函数论的讲义改编加工而成的．它的目的是通过一些例子和特殊情形的讨论使读者熟悉这个理论的一些最重要的分支和方法，其中例如，全纯延拓问题、幂级数的代数处理、层和上同调理论以及起源于一些椭圆型偏微分方程的实方法．

在第一章，我们首先介绍多复变数全纯函数的定义，它们的 Cauchy 积分表示以及它们在 Reinhardt 域上的幂级数展开．结果表明，和单复变数的理论大不相同，对于 $n \geqslant 2$，存在区域 G，$\hat{G} \subset \mathbf{C}^n$ 且 $G \subset \hat{G}$ 和 $G \neq \hat{G}$，使得每一个在 G 全纯的函数都可以延拓到 $\hat{G}$ 上．不存在这样的 $\hat{G}$ 的区域 G 称为**全纯域**．在第二章，我们给出全纯域的一些特征（Cartan-Thullen 定理，Levi 问题）．最后，我们对于每个域 G 构造全纯包 $H(G)$，即 $\mathbf{C}^n$ 中最大（不必单叶）区域，使得 G 上的每个全纯函数都能延拓到它的里面．

第三章介绍 Weierstrass 公式和 Weierstrass 预备定理并将它应用于收敛幂级数的环．可以证明这个环是因子分解环，Noetherian 环和 Hensel 环．此外，我们还将指出所得到的一些代数定理如何应用于解析集合的局部研究．在这方面，我们利用层论得到了一些深刻的结果，而层论的基本概念将在第四章讨论．在第五章，我们介绍复流形，并给出一些例子．我们还探讨 $\mathbf{C}^n$ 的不同闭包和复流形上修改的作用．

在解析层取值的上同调理论把层论和复流形上的函数论联系起来．我们在第六章对此加以讨论和应用，目的是为了叙述全纯域和 Stein 流形的主要结果（例如，Cousin 问题的可解性）．

第七章完全用来讨论复记号下的实微分，关于 z，$\bar{z}$ 的偏微分和复函数矩阵，这些论题已在第一章提到过．在第七章我们还要

定义切向量，微分形式和算子 d，d'，d''。Dolbeault 和 de Rham 定理给出了和上同调理论的联系。

作者借助许多图形详尽地叙述了这一理论，对于其证明超过本书范围的定理则给出参考的文献。只要读者具有微积分和单复变函数的基本知识，懂得一些向量分析、代数和一般拓扑学的原理，就可以阅读本书。本书写成引论的形式，无论是对专家或是对非专业人员都将产生同样的吸引力。

H. 格劳尔特

K. 弗里切

1976 年春于哥廷根

目　　录

第一章　全纯函数

引　　言

设 C 是复数域，n 是自然数，我们称有序的 n 个复数构成的集合　　$\mathbf{C}^n = \{\mathfrak{z} = (z_1, \cdots, z_n); z_\nu \in \mathbf{C},\ 1 \leqslant \nu \leqslant n\}$ 为 n 维复数空间．点 $\mathfrak{z} \in \mathbf{C}^n$ 的每个分量能被唯一地分解成实部和虚部：

$$z_\nu = x_\nu + iy_\nu.$$

这在 $\mathbf{C}^n$ 的元素$(z_1, \cdots, z_n)$和 $2n$ 维实数空间 $\mathbf{R}^{2n}$ 的元素 $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$之间给出一个唯一的 1—1 对应．

$\mathbf{C}^n$ 是向量空间：两个元素的加法以及 $\mathbf{C}^n$ 的一个元素与一个（实或复）纯量的乘法以分量方式加以定义．作为一个复向量空间，$\mathbf{C}^n$ 是 n 维的；作为一个实向量空间，它是 $2n$ 维的．显然，$\mathbf{C}^n$ 和 $\mathbf{R}^{2n}$ 之间的 $\mathbf{R}$ 向量空间同构导致 $\mathbf{C}^n$ 上的一个拓扑：对于 $\mathfrak{z} = (z_1, \cdots, z_n) = (x_1 + iy_1, \cdots, x_n + iy_n) \in \mathbf{C}^n$，令

$$\|\mathfrak{z}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2)\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\mathfrak{z}\|^* = \max_{k=1,\cdots,n} (|x_k|, |y_k|).$$

由 $\mathfrak{z} \longmapsto \|\mathfrak{z}\|$ 和 $\mathfrak{z} \longmapsto \|\mathfrak{z}\|^*$ 定义 $\mathbf{C}^n$ 上的范数，而相应的度量由

$$\operatorname{dist}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) = \|\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2\|,$$

$$\operatorname{dist}^*(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) = \|\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2\|^*$$

给出．在每种情况，我们得到 $\mathbf{C}^n$ 上一个拓扑，这个拓扑与通常关于 $\mathbf{R}^{2n}$ 的拓扑一致．$\mathbf{C}^n$ 的其他度量，如由 $|\mathfrak{z}| = \max\limits_{k=1,\cdots,n} |z_k|$ 和 $\operatorname{dist}'(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) = |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|$ 所定义的，也诱导出通常的拓扑．

一个**区域** $B \subset \mathbf{C}^n$ 是开集（具有通常拓扑）；一个**域**是连通的开集．开集 $G \subset \mathbf{C}^n$ 称为**连通的**，如果满足下列两个等价条件之一：

a. 对于每两个点 $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in G$，存在一个连续映射 $\varphi: [0,1] \to \mathbf{C}^n$ 满足 $\varphi(0) = \mathfrak{z}_1$, $\varphi(1) = \mathfrak{z}_2$，且 $\varphi([0, 1]) \subset G$。

b. 如果 B_1, $B_2 \subset G$ 是开集，具有 $B_1 \cup B_2 = G$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ 和 $B_1 \neq \varnothing$，则 $B_2 = \varnothing$。

定义. 设$B \subset \mathbf{C}^n$ 是一个区域，点 $\mathfrak{z}_0 \in B$，集合 $C_B(\mathfrak{z}_0) = \{\mathfrak{z} \in B: \mathfrak{z}$ 和 $\mathfrak{z}_0$ 能够用一条 B 中的路径连结$\}$称为 $\mathfrak{z}_0$ 在B 中的**分支.**

附注 设 $B \subset \mathbf{C}^n$ 是一个开集，则:

a. 对于每个 $\mathfrak{z} \in B$, $C_B(\mathfrak{z})$ 和 $B - C_B(\mathfrak{z})$ 是开集.

b. 对于每个 $\mathfrak{z} \in B$, $C_B(\mathfrak{z})$ 是连通的.

c. 从 $C_B(\mathfrak{z}_1) \cap C_B(\mathfrak{z}_2) \neq \varnothing$ 可得 $C_B(\mathfrak{z}_1) = C_B(\mathfrak{z}_2)$。

d. $B = \bigcup\limits_{\mathfrak{z} \in B} C_B(\mathfrak{z})$。

e. 如果G是一个域，并且 $\mathfrak{z} \in G \subset B$，则 $G \subset C_B(\mathfrak{z})$。

f. B 至多有可数个分支.

证明是平凡的.

最后，对于 $\mathfrak{z}_0 \in \mathbf{C}^n$，我们定义:

$$U_\varepsilon(\mathfrak{z}_0) = \{\mathfrak{z} \in \mathbf{C}^n: \operatorname{dist}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0) < \varepsilon\},$$

$$U_\varepsilon^*(\mathfrak{z}_0) = \{\mathfrak{z} \in \mathbf{C}^n: \operatorname{dist}^*(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0) < \varepsilon\},$$

$$U_\varepsilon'(\mathfrak{z}_0) = \{\mathfrak{z} \in \mathbf{C}^n: \operatorname{dist}'(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0) < \varepsilon\}.$$

§1. 幂 级 数

设M是 $\mathbf{C}^n$ 的一个子集，从M到 $\mathbf{C}$ 的映射 f 称为 M 上的一个**复函数**. 多项式

$$p(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu_1, \cdots, \nu_n = 0}^{m_1, \cdots, m_n} a_{\nu_1, \cdots, \nu_n} z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}, \quad a_{\nu_1, \cdots, \nu_n} \in \mathbf{C}$$

是特别简单的例子，它定义在所有 $\mathbf{C}^n$ 上. 为简化记号，我们引进重指标: 设 ν_i, $1 \leqslant i \leqslant n$，是非负整数，$\mathfrak{z} = (z_1, \cdots, z_n)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一个点，我们定义:

$$\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n), \quad |\nu| = \sum_{i=1}^{n} \nu_i, \quad \mathfrak{z}^\nu = \prod_{i=1}^{n} z_i^{\nu_i}.$$

采用这个记号，则多项式可写成

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu z^\nu.$$

定义 1.1. 设点 $z_0 \in \mathbf{C}^n$，对 $|\nu| \geqslant 0$，a_ν 是一个复数．则表达式

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

称为一个关于 z_0 的**形式幂级数**．

这样的表达式，正象这名称所说，仅有形式上的意义．对于一个特定 z，它未必表示一个复数．由于重指标能够用多种方式排列，所以如何进行求和是不明确的．因此我们必须引进一个适当的收敛概念．

定义 1.2. 设 $\mathfrak{J} = \{\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n) : \nu_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant n\}$，$z_1 \in \mathbf{C}^n$ 固定，我们称 $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z_1 - z_0)^\nu$ **收敛于复数** c，如果对每一个 $\varepsilon > 0$，存在一个有限集 $I_0 \subset \mathfrak{J}$，使得对任意满足 $I_0 \subset I \subset \mathfrak{J}$ 的有限集 I，有

$$\left| \sum_{\nu \in I} a_\nu (z - z_0)^\nu - c \right| < \varepsilon.$$

这时记

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = c.$$

在这个意义下的收敛和绝对收敛是同义的．

定义 1.3. 设 M 是 $\mathbf{C}^n$ 的一个子集，$z_0 \in M$，f 是 M 上的一个复函数．我们说幂级数 $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ 在 M 上**一致收敛**于 $f(z)$，如果对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个有限集 $I_0 \subset \mathfrak{J}$，使得对每个 $I_0 \subset I \subset \mathfrak{J}$ 的有限集 I 和每个 $z \in M$，均有

$$\left| \sum_{\nu \in I} a_\nu (z - z_0)^\nu - f(z) \right| < \varepsilon.$$

$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)^\nu$ 在一个区域 B 内部一致收敛，如果级数在 B 的每个紧子集内一致收敛.

定义 1.4. 设 $B\subset\mathbf{C}^n$ 是一个区域，f 是 B 上一个复函数. f 称为在 B 中**全纯**，如果对每个 $\mathfrak{z}_0\in B$，在 B 中存在一个邻域 $U=U(\mathfrak{z}_0)$ 和一个在 U 上收敛于 $f(\mathfrak{z})$ 的幂级数 $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)^\nu$.

注意，并不要求在 U 上一致收敛. 现在我们证明为什么逐点收敛就够了.

定义 1.5. 点集 $V=\{\mathfrak{r}=(r_1,\cdots,r_n)\in\mathbf{R}^n: r_\nu\geqslant 0, 1\leqslant\nu\leqslant n\}$ 称为**绝对空间**. τ: $\mathbf{C}^n\to V$, $\tau(\mathfrak{z})=(|z_1|,\cdots,|z_n|)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 到 V 上的一个**自然投影**.

V 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集，且本身继承从 $\mathbf{R}^n$ 到 V 所诱导的拓扑(相关拓扑). 所以 $\tau:\mathbf{C}^n\to V$ 是一个连续满映射. 如果 $B\subset V$ 是开的，则 $\tau^{-1}(B)\subset\mathbf{C}^n$ 也是开的.

定义 1.6. 设 $\mathfrak{r}\in V_+=\{\mathfrak{r}=(r_1,\cdots,r_n)\in\mathbf{R}^n: r_k>0\}$, $\mathfrak{z}_0\in\mathbf{C}^n$，那么 $P_\mathfrak{r}(\mathfrak{z}_0)=\{\mathfrak{z}\in\mathbf{C}^n:|z_k-z_k^{(0)}|<r_k, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 称为具有(多)半径 $\mathfrak{r}$ 的关于 $\mathfrak{z}_0$ 的**多圆柱**. $T=T(P)=\{\mathfrak{z}\in\mathbf{C}^n:|z_k-z_k^{(0)}|=r_k\}$ 称为 P 的**特征边界**(见图 1).

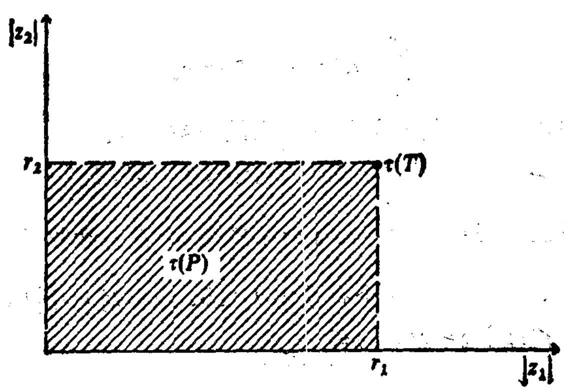

图 1. 多圆柱在绝对空间中的像

$P = P_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{z}_0)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中一个凸域，它的特征边界是 P 的拓扑边界 ∂P 的一个子集．对于 $n=2$ 和 $\mathfrak{z}_0=0$，情况很容易说明：这时 V 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个象限，$\tau(P)$ 是一个开矩形，$\tau(T)$ 是 $\tau(P)$ 的边界上的一个点．因此

$$T = \{\mathfrak{z}\in \mathbf{C}^2 : |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\}$$
$$= \{\mathfrak{z} = (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})\in \mathbf{C}^2 : 0\leqslant \theta_1 < 2\pi, 0\leqslant\theta_2 < 2\pi\}$$

是一个二维环面．类似地，在 n 维情况，我们得到一个 n 维环面（n 个圆的 Descartes 积）．

如果 $\mathfrak{z}_1\in \mathring{\mathbf{C}}^n = \{\mathfrak{z} = (z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n : z_k\neq 0, 1\leqslant k\leqslant n\}$，则$P_{\mathfrak{z}_1} = \{\mathfrak{z}_1\in \mathbf{C}^n : |z_k| < |z_k^{(1)}| = r_k, 1\leqslant k\leqslant n\}$是一个具有半径 $\mathfrak{r} = (r_1,\cdots,r_n)$的关于 0 的多圆柱．

定理 1.1. 设 $\mathfrak{z}_1\in\mathring{\mathbf{C}}^n$，如果幂级数 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \mathfrak{z}^\nu$ 在 $\mathfrak{z}_1$ 收敛，则它在多圆柱 $P_{\mathfrak{z}_1}$ 的内部一致收敛．

证明：

1．由于级数在 $\mathfrak{z}_1$ 收敛，所以集合 $\{a_\nu\mathfrak{z}_1^\nu : |\nu|\geqslant 0\}$ 有界．选择 $M\in\mathbf{R}$，使得对所有 ν，$|a_\nu\mathfrak{z}_1^\nu| < M$．如果 $\mathfrak{z}_1\in\mathring{\mathbf{C}}^n$ 且 $0<q<1$，则 $q\cdot\mathfrak{z}_1\in\mathring{\mathbf{C}}^n$．设 $P^* = P_{q\cdot\mathfrak{z}_1}$，对 $\mathfrak{z}\in P^*$，$|\mathfrak{z}^\nu| = |z_1|^{\nu_1}\cdots|z_n|^{\nu_n} < |q\cdot z_1^{(1)}|^{\nu_1}\cdots|q\cdot z_n^{(1)}|^{\nu_n} = q^{\nu_1+\cdots+\nu_n}\cdot|z_1^{(1)}|^{\nu_1}\cdots|z_n^{(1)}|^{\nu_n} = q^{|\nu|}\cdot|\mathfrak{z}_1^\nu|$，

即 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\cdot|\mathfrak{z}_1^\nu|\cdot q^{|\nu|}$ 是 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\mathfrak{z}^\nu$ 的一个控制函数，因而

$$M\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}q^{\nu_1+\cdots+\nu_n} = M\cdot\left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}q^{\nu_1}\right)\cdots\left(\sum_{\nu_n=0}^{\infty}q^{\nu_n}\right)$$
$$= M\cdot\left(\frac{1}{1-q}\right)^n.$$

重指标的集合 $\mathfrak{I}$ 是可数的，所以存在一个双射 $\Phi:\mathbf{N}_0\to\mathfrak{I}$．令

$$b_n(\mathfrak{z}) = a_{\Phi(n)}\cdot\mathfrak{z}^{\Phi(n)},$$

则 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_n(\mathfrak{z})$ 在 P^* 绝对且一致收敛．给定 $\varepsilon>0$，存在一个 $n_0\in\mathbf{N}$，

使得在 P^* 上 $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|b_n(\mathfrak{z})|<\varepsilon$. 令 $I_0=\Phi(\{0,1,2,\cdots,n_0\})$, 如果 I 是一个满足 $I_0\subset I\subset\mathfrak{J}$ 的有限集,则 $\{0,1,\cdots,n_0\}\subset\Phi^{-1}(I)$, 因此

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}b_n(\mathfrak{z})-\sum_{\nu\in I}a_\nu\mathfrak{z}^\nu\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}b_n(\mathfrak{z})-\sum_{n\in\Phi^{-1}(I)}b_n(\mathfrak{z})\right|$$

$$=\left|\sum_{n\in\mathbf{N}-\Phi^{-1}(I)}b_n(\mathfrak{z})\right|^{1)}\leqslant\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|b_n(\mathfrak{z})|<\varepsilon,\ \text{对}\ \mathfrak{z}\in P^*.$$

所以 $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\mathfrak{z}^\nu$ 在 P^* 一致收敛.

2. 设 $K\subset P_{\mathfrak{z}_1}$ 是紧的. $\{P_{q\cdot\mathfrak{z}_1}:0<q<1\}$ 是 $P_{\mathfrak{z}_1}$ 的一个开覆盖,因而也是 K 的开覆盖,但另一方面存在一个有限子覆盖 $\{P_{q_1\cdot\mathfrak{z}_1},\cdots,P_{q_l\cdot\mathfrak{z}_1}\}$. 如果我们置 $q=\max(q_1,\cdots,q_l)$, 则 $K\subset P_{q\cdot\mathfrak{z}_1}$, 而 $P_{q\cdot\mathfrak{z}_1}$ 与 1) 中的 P^* 类似. 因此 $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\mathfrak{z}^\nu$ 在 K 上一致收敛, 定理得证. □

其次,我们将考察在什么集合上幂级数收敛. 为了简单起见,我们选择 $\mathfrak{z}_0=0$ 作为我们展开的点, 相应的结论在一般情况也是成立的.

定义 1.7. 一个开集 $B\subset\mathbf{C}^n$ 称为 **Reinhardt 域**,如果 $\mathfrak{z}_1\in B\Rightarrow T_{\mathfrak{z}_1}=\tau^{-1}\tau(\mathfrak{z}_1)\subset B$.

注释 $T_{\mathfrak{z}_1}$ 是环面 $\{\mathfrak{z}\in\mathbf{C}^n:|z_k|=|z_k^{(1)}|\}$. 定义 1.7 的条件意味着 $\tau^{-1}\tau(B)=B$; 一个 Reinhardt 域由它的在绝对空间中的像 $\tau(B)$ 来刻划.

定理 1.2. 一个开集 $B\subset\mathbf{C}^n$ 是一个 Reinhardt 域,当且仅当存在一个开集 $W\subset V$ 使得 $B=\tau^{-1}(W)$.

证明:

1. 设 $B=\tau^{-1}(W)$, $W\subset V$ 是开的. 因为 $\mathfrak{z}\in B$, $\tau(\mathfrak{z})\in W$, 因此 $\tau^{-1}\tau(\mathfrak{z})\subset\tau^{-1}(W)=B$.

---

1) 原文将 $n\in\mathbf{N}-\Phi^{-1}(I)$ 误为 $n\in\Phi^{-1}(I)$.——译者注

2．设 B 是一个 Reinhardt 域．那么 $B=\tau^{-1}\tau(B)$，并且只要证明 $\tau(B)$ 是 V 中的开集就够了．假设 $\tau(B)$ 不是开的，则存在一个点 $\mathfrak{r}_0\in\tau(B)$，它不是 $\tau(B)$ 的一个内点，因而是 $V-\tau(B)$ 的一个聚点．设 $(\mathfrak{r}_j)$ 是 $V-\tau(B)$ 中收敛于 $\mathfrak{r}_0$ 的一个序列，存在具有 $\mathfrak{r}_j=\tau(\mathfrak{z}_j)$ 的 $\mathfrak{z}_j\in\mathbf{C}^n$，使得对所有 j 和 $1\leqslant p\leqslant n$ 有 $|z_p^{(j)}|=r_p^{(j)}$，由于 $(\mathfrak{r}_j)$ 收敛，所以存在一个 $M\in\mathbf{R}$，使得对所有 j 和 p 有 $|r_p^{(j)}|<M$．因此，序列 $(\mathfrak{z}_j)$ 也是有界的．从而它必有一个聚点 $\mathfrak{z}_0$ 和一个具有 $\lim\limits_{\nu\to\infty}\tau(\mathfrak{z}_{j_\nu})=\mathfrak{z}_0$ 的子序列 $(\mathfrak{z}_{j_\nu})$．因为 τ 是连续的，所以 $\tau(\mathfrak{z}_0)=\lim\limits_{\nu\to\infty}\tau(\mathfrak{z}_{j_\nu})=\lim\limits_{\nu\to\infty}\mathfrak{r}_{j_\nu}=\mathfrak{r}_0$．$B$ 是一个 Reinhardt 域，由此可得出 $\mathfrak{z}_0\in\tau^{-1}(\mathfrak{r}_0)\subset\tau^{-1}\tau(B)=B$．$B$ 是 $\mathfrak{z}_0$ 的一个开邻域，所以几乎所有 $\mathfrak{z}_{j_\nu}$ 必须位于 B 中，从而几乎所有 $\mathfrak{r}_{j_\nu}=\tau(\mathfrak{z}_{j_\nu})$ 必须位于 $\tau(B)$ 中．这是一个矛盾，因而 $\tau(B)$ 是开的．□

一个 Reinhardt 域在绝对空间中的象总是一个（任意形式）开集，且这个集合的逆象还是这个域．

定义 1.8. 设 $G\subset\mathbf{C}^n$ 是一个 Reinhardt 域．

1．G 称为**正常的**，如果

a．G 是连通的；

b．$0\in G$．

2．G 称为**完全的**，如果

$$\mathfrak{z}_1\in G\cap\mathring{\mathbf{C}}^n\Rightarrow P_{\mathfrak{z}_1}\subset G.$$

图 2 说明定义 1.8 当 $n=2$ 时在绝对空间的情形．

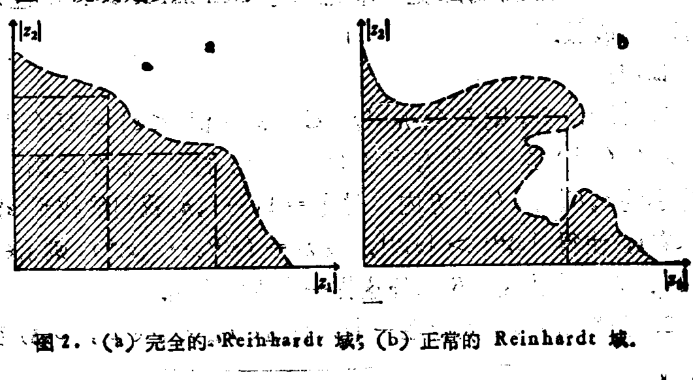

图 2．(a) 完全的 Reinhardt 域；(b) 正常的 Reinhardt 域．

当 $n=1$ 时，Reinhardt 域是开圆环的并，在这种情况下完全的和正常的 Reinhardt 域之间无差别。

显然当 $n>1$ 时，多圆柱和球 $K=\{\mathfrak{z}:|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<R^2\}$ 都是正常的和完全的 Reinhardt 域。通常我们有

定理 1.3. 每个完全的 Reinhardt 域都是正常的。

证明：设 G 是一个完全的 Reinhardt 域。存在一个点 $\mathfrak{z}_1\in G\cap\mathring{\mathbf{C}}^n$，且由定义 $0\in P_{\mathfrak{z}_1}\subset G$。剩下是证明 G 是连通的。

a. 设 $\mathfrak{z}_1\in G$ 是一个一般位置的点(即 $\mathfrak{z}_1\in G\cap\mathring{\mathbf{C}}^n$)，则 $\mathfrak{z}_0$ 和 0 之间的连接线段整个地位于 $P_{\mathfrak{z}_1}$ 内，因而位于 G 内。

b. $\mathfrak{z}_1$ 在一个"轴"上。由于 G 是开的，所以存在一个邻域 $U_\varepsilon(\mathfrak{z}_1)\subset G$，并且我们能找到一个点 $\mathfrak{z}_2\in U_\varepsilon(\mathfrak{z}_1)\cap\mathring{\mathbf{C}}^n$，因此有一个 U_ε 中的路径连接 $\mathfrak{z}_1$ 和 $\mathfrak{z}_2$，和 G 中的一个路径连接 $\mathfrak{z}_2$ 和 0。它们一起就给出 G 中一条连接 $\mathfrak{z}_1$ 和 0 的路径。

从 (a) 和 (b) 可得 G 是连通的。 □

设 $\mathfrak{P}(\mathfrak{z})=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\mathfrak{z}^\nu$ 是一个关于原点的幂级数。集合 $M\subset\mathbf{C}^n$，在其上 $\mathfrak{P}(\mathfrak{z})$ 收敛，则称为 $\mathfrak{P}(\mathfrak{z})$ 的**收敛集**。$\mathfrak{P}(\mathfrak{z})$ 在 $\mathring{M}$ 中总是收敛的，而在 $\overline{M}$ 之外是发散的。$B(\mathfrak{P}(\mathfrak{z}))=\mathring{M}$ 称为幂级数 $\mathfrak{P}(\mathfrak{z})$ 的**收敛区域**。

定理 1.4. 设 $\mathfrak{P}(\mathfrak{z})=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\mathfrak{z}^\nu$ 是 $\mathbf{C}^n$ 内一个形式幂级数。则收敛区域 $B=B(\mathfrak{P}(\mathfrak{z}))$ 是一个完全的 Reinhardt 域。$\mathfrak{P}$ 在 B 的内部一致收敛。

证明：

1. 设 $\mathfrak{z}_1\in B$，则 $U'_\varepsilon(\mathfrak{z}_1)=\{\mathfrak{z}\in\mathbf{C}^n:|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1|<\varepsilon\}=U_\varepsilon(z_1^{(1)})\times\cdots\times U_\varepsilon(z_n^{(1)})$ 是一个具有半径 $(\varepsilon,\cdots,\varepsilon)$ 的关于 $\mathfrak{z}_1$ 的多圆柱。对充分小的 ε，$U'_\varepsilon(\mathfrak{z}_1)$ 位于 B 内。对 $k=1,\cdots,n$，我们能找到 $z_k^{(2)}\in U_\varepsilon(z_k^{(1)})$，使得 $|z_k^{(2)}|>|z_k^{(1)}|$。设 $\mathfrak{z}_2=(z_1^{(2)},\cdots,z_n^{(2)})$，则 $\mathfrak{z}_2\in B$，$\mathfrak{z}_1\in P_{\mathfrak{z}_2}$。对每个点 $\mathfrak{z}_1\in B$ 选择这样一个固定点 $\mathfrak{z}_2$。

2. 如果 $\mathfrak{z}_1\in B$，则存在一个具有 $\mathfrak{z}_1\in P_{\mathfrak{z}_2}$ 的 $\mathfrak{z}_2\in B$，$\mathfrak{P}(\mathfrak{z})$ 在 $\mathfrak{z}_2$

收敛，所以在 $P_{\mathfrak{z}_2}$ 中(由定理 1.1可知)．因此 $P_{\mathfrak{z}_2}\subset B$．由于 $P_{\mathfrak{z}_1}\subset P_{\mathfrak{z}_2}$ 且 $T_{\mathfrak{z}_1}\subset P_{\mathfrak{z}_2}$，可知 B 是一个完全的 Reinhardt 域．

3．设 $P^*_{\mathfrak{z}_1}=P_{\mathfrak{z}_2}$，其中 $\mathfrak{z}_2$ 是对于 $\mathfrak{z}_1$ 如在 1) 中那样选择的．显然 $B=\bigcup\limits_{\mathfrak{z}_1\in B} P^*_{\mathfrak{z}_1}$．现在对每个 $\mathfrak{z}_2$ 选择一个具有 $0<q<1$ 的 q，使得 $\mathfrak{z}_3=(1/q)\mathfrak{z}_2$ 位于 B 中．这是可能的，由此可知对于每个 $\mathfrak{z}_1\in B$，$\mathfrak{P}(\mathfrak{z})$ 在 $P^*_{\mathfrak{z}_1}$ 中一致收敛．如果 $K\subset B$ 是紧的，则 K 能由有限多个集合 $P^*_{\mathfrak{z}_1}$ 覆盖．所以 $\mathfrak{P}(\mathfrak{z})$ 在 K 上一致收敛． □

问题发生在是否每个完全的 Reinhardt 域都是某个幂级数的收敛区域，这是不对的，必须附加必要的性质．我们这里不再深究这件事．

由于每个完全的 Reinhardt 域都是连通的，所以我们能够论及一个幂级数的**收敛域**．现在我们返回到全纯的概念．

设 f 是在区域 B 上全纯的函数，$\mathfrak{z}_0$ 是 B 中一点．设幂级数 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)^\nu$ 在 $\mathfrak{z}_0$ 的一个邻域 U 上收敛于 $f(\mathfrak{z})$，则存在一个 $\mathfrak{z}_1\in U$，使得 $z_\nu^{(1)}\neq z_\nu^{(0)}$，$1\leqslant\nu\leqslant n$，并且 $P_{\mathfrak{r}(\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_0)}(\mathfrak{z}_0)\subset U$．现在令 $0<\varepsilon<\min\limits_{\nu=1,\cdots,n}(|z_\nu^{(1)}-z_\nu^{(0)}|)$，从定理 1.1，级数在 $U'_\varepsilon(\mathfrak{z}_0)$ 上一致收敛．对每个 $\nu\in\mathfrak{I}$，可以把 $a_\nu(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)^\nu$ 看作是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的一个复值函数，这个函数显然在 $\mathfrak{z}_0$ 连续，从而极限函数在 $\mathfrak{z}_0$ 连续．我们得到：

定理 1.5. 设 $B\subset\mathbb{C}^n$ 是一个区域，且 f 是 B 上的一个全纯函数，则 f 在 B 上连续．

§2. 复可微函数

定义 2.1. 设 B 是一个区域，$f:B\to\mathbb{C}$ 是一个复函数．f 称为在 $\mathfrak{z}_0\in B$ **复可微的**，如果在 B 上存在复函数 $\Delta_1,\cdots,\Delta_n$，它们在 $\mathfrak{z}_0$ 全都连续，且在 B 内满足等式：

$$f(\mathfrak{z})=f(\mathfrak{z}_0)+\sum_{\nu=1}^{n}(z_\nu-z_\nu^{(0)})\Delta_\nu(\mathfrak{z}).$$

可微性是一个局部性质．如果存在一个邻域$U = U(\mathfrak{z}_0) \subset B$，使得$f|U$在$\mathfrak{z}_0$点复可微，则$f|B$在$\mathfrak{z}_0$点复可微，因为函数$\Delta_\nu(\mathfrak{z})$能够延拓到$U$的外边使得所要求的方程成立．

在$\mathfrak{z}_0$下述定理成立：

定理 2.1. 设$B \subset \mathbf{C}^n$是一个区域，$f: B \to \mathbf{C}$在$\mathfrak{z}_0$复可微，则函数$\Delta_1, \cdots, \Delta_n$在$\mathfrak{z}_0$的值唯一确定．

证明： $E_\nu = \{\mathfrak{z} \in \mathbf{C}^n: z_\lambda = z_\lambda^{(0)}, \lambda \neq \nu\}$是一个一维复平面．设$B_\nu = \{\zeta \in \mathbf{C}: (z_1^{(0)}, \cdots, z_{\nu-1}^{(0)}, \zeta, z_{\nu+1}^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)}) \in E_\nu \cap B\}$．$f_\nu^*(z_\nu) = f(z_1^{(0)}, \cdots, z_{\nu-1}^{(0)}, z_\nu, z_{\nu+1}^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)})$定义了$B_\nu$上的一个复函数．由于$f$在$\mathfrak{z}_0$可微，所以在$B_\nu$上有

$$
\begin{aligned}
f_\nu^*(z_\nu) &= f(z_1^{(0)}, \cdots, z_{\nu-1}^{(0)}, z_\nu, z_{\nu+1}^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)}) \\
&= f(\mathfrak{z}_0) + (z_\nu - z_\nu^{(0)}) \cdot \Delta_\nu(z_1^{(0)}, \cdots, z_\nu, \cdots, z_n^{(0)}) \\
&= f_\nu^*(z_\nu^{(0)}) + (z_\nu - z_\nu^{(0)}) \cdot \Delta_\nu^*(z_\nu).
\end{aligned}
$$

于是$\Delta_\nu^*(z_\nu) = \Delta_\nu(z_1^{(0)}, \cdots, z_{\nu-1}^{(0)}, z_\nu, z_{\nu+1}^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)})$在$z_\nu^{(0)}$连续，因此$f_\nu^*(z_\nu)$在$z_\nu^{(0)} \in \mathbf{C}^n$复可微，且$\Delta_\nu^*(z_\nu^{(0)}) = \Delta_\nu(\mathfrak{z}_0)$是唯一确定的．这对每个$\nu$都成立． □

定义 2.2. 设定义在区域$B \subset \mathbf{C}^n$上的复函数f在$\mathfrak{z}_0 \in B$复可微．如果$f(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{z}_0) + \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_\nu^{(0)}) \Delta_\nu(\mathfrak{z})$那么我们称$\Delta_\nu(\mathfrak{z}_0)$为$f$在$\mathfrak{z}_0$关于$z_\nu$的**偏导数**，且可写作

$$\Delta_\nu(\mathfrak{z}_0) = \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(\mathfrak{z}_0) = f_{z_\nu}(\mathfrak{z}_0) = f_\nu(\mathfrak{z}_0).$$

定理 2.2. 设$B \subset \mathbf{C}^n$是一个区域，f在$\mathfrak{z}_0 \in B$复可微，则f在$\mathfrak{z}_0$连续．

证明： 我们有$f(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{z}_0) + \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_\nu^{(0)}) \Delta_\nu(\mathfrak{z})$，这个方程的右边显然在$\mathfrak{z}_0$连续． □

设$B \subset \mathbf{C}^n$是一个区域，如果f在B的每一点复可微，则称f在B上复可微．

复可微函数的和，积，商（分母不为 0）还是复可微的．证明类似于实的情况，这里不介绍它了．