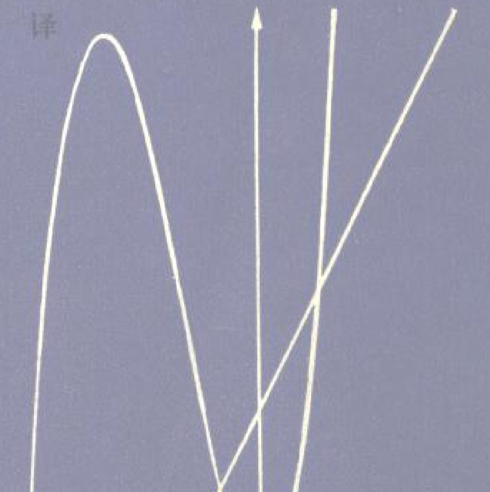
微积分

题解

第二卷

[德] W. 戴根 K. 包美尔 编
秦 裕 瑗 译



人民教育出版社

微积分题解

第二卷

［德］W.戴　根
　　　K.包美尔　编

秦　裕　瑗　译

人民教育出版社

此书曾为西德卡尔斯儒大学用书. 内容是对微积分的习题，补充典型的解题方法，提供解题要领. 本书第二卷主要是距离空间中的拓扑基本概念，多元微分法，多元函数积分法的题解 57 道，可供大学理科数学专业师生参考.

2008/3/10

微 积 分 题 解

第二卷

［德］ W. 戴根 K. 包美尔 编

秦 裕 瑗 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张3.625 字数83,000

1982年3月第1版 1983年5月第1次印刷

印数 00,001—25,000

书号 13012·0738 定价 0.29元

目　次

第一章　距离空间中的拓扑基本概念

距离空间与赋范空间，在距离空间中函数的叙列、极限与连续性.

问题 1:

设 A、B 是距离空间的子集合. 试证:

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

$$\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$$

解:

1) $\left.\begin{matrix}N_1\subset M_1\\ N_2\subset M_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}N_1\cap N_2\subset M_1\cap M_2\\ N_1\cup N_2\subset M_1\cup M_2\end{matrix}\right.$

2) $H\subset\bar{H}$

3) $A\cap B\subset A\qquad A\subset A\cup B$

$A\cap B\subset B\qquad B\subset A\cup B$

4) $F\subset G\Rightarrow\qquad\bar{F}\subset\bar{G}$ （单调性）

5) $A\cap A=A\qquad$ 与 $A\cup A=A$

要证明的是 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$. 由 3) 得到

$\left.\begin{matrix}A\subset A\cup B\\ B\subset A\cup B\end{matrix}\right\}$用 4) 得 $\begin{matrix}\bar{A}\subset\overline{A\cup B}\\ \bar{B}\subset\overline{A\cup B}\end{matrix}$用 1) 与 5) 得 $\bar{A}\cup\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$.

由 2) 得到 $\left.\begin{matrix}\bar{A}\supset A\\ \bar{B}\supset B\end{matrix}\right\}$用 1) 得 $\bar{A}\cup\bar{B}\supset A\cup B$, 用4) 得 $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}\supset$

$$\overline{A\cup B}.$$

可是因为 $\bar{A}\cup\bar{B}$ 是一个闭集合，于是 $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=\bar{A}\cup\bar{B}$, 就此有

$$\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=\bar{A}\cup\bar{B}\supset\overline{A\cup B};$$

所以

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

要证明：$\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$. 由 3) 推得

$$\left.\begin{array}{l}A\cap B\subset A\\ A\cap B\subset B\end{array}\right\}\text{用 4) 得}\begin{array}{l}\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\\ \overline{A\cap B}\subset\bar{B}\end{array}\text{，用1)与5)得 }\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}.$$

$\overline{A\cap B}$不一定等于 $\bar{A}\cap\bar{B}$，下面的例就证明这一点：

$A=\mathbf{Q}=$有理数集合，

$B=\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}=$无理数集合.

于是有 $A\cap B=\varnothing\Rightarrow\overline{A\cap B}=\varnothing$ 而 $\bar{A}=\mathbf{R}$, $\bar{B}=\mathbf{R}$, $\bar{A}\cap\bar{B}=\mathbf{R}$.

问题 2*：

定义：设 p 是一个固定的质数. 对于每一个自然数 n，在它的质数分解式中，设 $V(n)$ 是 p 的指数. 对于一个任意的数 $r=\frac{n}{m}$，其中 $m\neq 0, n\in\mathbf{Z}$，设$V(r)=V(|n|)-V(|m|)$.

现在设对于不同的有理数 x，y，有 $d(x,y)=p^{-V(x-y)}$，而当 $x=y$ 时，有 $d(x,y)=0$.

试证：具有这个距离函数 $d(x,y)$ 的有理数集合构成一个距离空间. ($d(x,y)$叫做有理数的 p-进赋值.)

解：

由 n，$m\in\mathbf{N}$ 的质数分解式，立刻得到 $V(n\cdot m)=V(n)+V(m)$. 于是，对于有理数$r=\pm\frac{n}{m}$所定义的$V(r)=V(n)-V(m)$与r的特殊表示形式无关. ($r=\pm\frac{n}{m}=\pm\frac{n\cdot s}{m\cdot s}$, $s\in\mathbf{N}$，$V(r)=V(n\cdot s)-V(m\cdot s)=V(n)-V(m)$.) 对于有理数 r_1, r_2, $V(r_1r_2)=V(r_1)+V(r_2)$也成立.

按照定义，有 $d(x,y)=d(y,x)$.

由于 $p^x>0\ (x\in\mathbf{R})$，有 $d(x,y)\geqslant 0$. 由于当 $x\neq y$ 时有 $V(x-y)<\infty$，所以当 $x\neq y$时$d(x,y)>0$；又当$x=y$时有 $d(x,y)=0$，所以，第二个距离公理也满足. 不只三角形不等式，而且更强的

$d(x, z) \leqslant \max\{d(x, y), d(y, z)\}$成立.

如果 x, y, z 中至少有两个是相等的，这个命题是平凡的.

记 $u=x-y$, $w=z-y$, 有 $x-z=u-w$. 于是要证明，当$u\neq 0$, $w\neq 0$, $u-w\neq 0$时有

$$v(u-w) \geqslant \min\{v(u), v(w)\}.$$

设 $v(u) \geqslant v(w)$. 由于 $v(r_1 \cdot r_2)=v(r_1)+v(r_2)$, 证明 $v(u'-1) \geqslant 0$ 就够了：当 $\frac{u}{w}=u' \neq 0, 1$ 而且 $v(u') \geqslant 0$, 有 $u'=p^h \frac{r}{s}$, 其中 $h \geqslant 0$, $(r, p)=1$, $(s, p)=1$. $u'-1=\frac{p^h \cdot r-s}{s}$ 的分母用 p 是除不尽的，所以 $v(u'-1) \geqslant 0$.

问题 3:

试证:

a) 设 x_n, y_n, a, b 是一个距离空间 X 的元素，而且有 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n=b$, 于是有

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)=d(a, b).$$

b) 如果 x_n, y_n, a, b 是线性赋范空间X的元素，且有 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n= a$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n=b$, 又 λ_n 是实数，有$\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n=\lambda$, 于是有

$$\lim_{n \to \infty}(x_n+y_n)=a+b \text{ 及 } \lim_{n \to \infty} \lambda_n \cdot x_n=\lambda \cdot a.$$

解:

a) $x_n, y_n, a, b \in X$.

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n=a$, 即对于每一个 $\varepsilon>0$, 存在一个 $n(\varepsilon)$, 使得对于一切 $n>n(\varepsilon)$, 有 $d(x_n, a)<\varepsilon$.

当 $n>n'(\varepsilon)$时，有 $d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, a)+d(a, b)+d(b, y_n) \leqslant d(a, b)+2\varepsilon$, 类似地，有 $d(a, b) \leqslant d(x_n, y_n)+2\varepsilon$, 所以有

$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(a, b)$.

b) $x_n, y_n, a, b \in X, \lambda_n \in \boldsymbol{R}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 即对于每一个 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $n(\varepsilon)$, 使得对于一切 $n > n(\varepsilon)$, 有 $\|x_n - a\| < \varepsilon$. 对于 $n > n'(\varepsilon)$, 有 $\|x_n + y_n - (a+b)\| \leqslant \|x_n - a\| + \|y_n - b\| < 2\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

$\|\lambda_n x_n - \lambda a\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n a\| + \|\lambda_n a - \lambda a\| = |\lambda_n| \cdot \|x_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|a\|$.

由于 λ_n 的收敛性, 有 $|\lambda_n| < M \in \boldsymbol{R}_+$. 对于适当的 $n'(\varepsilon)$, 于是, 对于一切 $n > n'(\varepsilon)$, 有 $\|\lambda_n x_n - \lambda a\| < 2\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda a$.

注记: 我们立刻看到, 在 $E \times E$ 中, 映射 $(x, y) \to (x+y)$ 甚至是均匀连续的.

问题 4:

设 M 是所有在 $[a, b] \subset \boldsymbol{R}$ 上(关于范数值的)连续实函数组成的集合. 试证: 规定 $f + g: x \longmapsto f(x) + g(x)$, $\lambda \cdot f: x \longmapsto \lambda f(x)$, $f, g \in M$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ 以及 $\|f\|_1 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$, 则这个集合是一个完备线性赋范空间(简记作 $C^{\sup}_{[a,b]}$).

提示: 要注意这个范数与均匀收敛概念的关系.

解:

a) 所有在 $[a, b]$ 上连续的函数组成的集合, 附以所述的关系, 是一个向量空间.

b) 用 $\|f\|_1 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ 定义一个范数.

证明:

α) 当 $f \equiv 0$ 时, 有 $\sup|f(t)| = \sup 0 = 0$.

β) $f \not\equiv 0$, 于是存在一个 $t_0 \in [a, b]$, 使得 $f(t_0) \neq 0$. 所以有 $0 < |f(t_0)| \leqslant \sup|f(t)|$.

r) 因为$[a,b]$是闭的，而f_1, f_2是连续的，所以存在一个t_1，使得$\sup|f_1(t)+f_2(t)|=|f_1(t_1)+f_2(t_1)|$. 再者，有

$$|f_1(t_1)+f_2(t_1)|\leqslant|f_1(t_1)|+|f_2(t_1)|$$
$$\leqslant\sup|f_1(t)|+\sup|f_2(t)|.$$

所以有

$$\sup|f_1(t)+f_2(t)|\leqslant\sup|f_1(t)|+\sup|f_2(t)|.$$

c) 线性赋范空间$C_{[a,b]}^{\sup}$是完备的.

证明: 设f_n是$C_{[a,b]}^{\sup}$的一个叙列，它收敛于f. 这就是说，对于事先给定的$\varepsilon>0$，存在一个n_0，使得对于$n\geqslant n_0$，有$|f_n(t)-f(t)|\leqslant\sup|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$. 从而对于$n\geqslant n_0$，得到，$|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$与在$[a,b]$中选取$t$的值无关.

所以，从按范数的收敛性推得均匀收敛性: $f_n\to f$.

现在设f_n是$C_{[a,b]}^{\sup}$的一个柯西叙列. 于是，当$n>n_1$时，有$\sup|f_n(t)-f_m(t)|<\varepsilon$. 对于$[a, b]$中的每一个固定的$t$，$f_n(t)$是一个柯西实数列，它收敛于一个$f(t)$. 可是，极限函数$f$，作为均匀收敛的、连续函数叙列的极限，同样是连续的.

可是，这就是说，$C_{[a,b]}^{\sup}$中每一个柯西叙列有一个在$C_{[a,b]}^{\sup}$中的极限.

问题 5:

设M是问题 4 的集合，且具有同样的关系$f+g$与$\lambda\cdot f$. 试证: 规定$\|f\|_2=\int_a^b|f(t)|dt$，这个集合是一个不完备的线性赋范空间（记作$C_{[a,b]}^{|f|}$）. 试构造一个柯西连续函数叙列的例，使它的极限函数（在$\|f\|_2$的意义下）是不连续的.

解:

$C_{[a,b]}^{|\,|}$是一个线性空间(验证诸公理!)

对于 $\|f\|_2=\int_a^b|f(t)|dt, b>a$, 范数公理是成立的.

1) $\|f\|_2\geqslant 0$, 因为$\int_a^b|f(t)|dt\geqslant 0$.

2) $\|f\|_2=0$, 当且仅当 $f\equiv 0$. 因为当且仅当$\int_a^b|f(t)|dt=0$ 时(这里只限于讨论连续函数!), 才有 $\|f\|_2=0$.

3) $\|\lambda f\|_2=|\lambda|\,\|f\|_2$, 因为$\int_a^b|\lambda f(t)|dt=\int_a^b|\lambda|\cdot|f(t)|dt=|\lambda|\int_a^b|f(t)|dt$.

4) $\|f+g\|_2\leqslant\|f\|_2+\|g\|_2$, 因为

$$\int_a^b|f+g|dt\leqslant\int_a^b(|f|+|g|)dt=\int_a^b|f|dt+\int_a^b|g|dt.$$

这个范数, 利用 $d(f,g)=\|f-g\|$, 诱导出一个尺度 $d(f,g)$.

所以 $C_{[a,b]}^{|\,|}$是一个线性赋范空间. 可是, 它不是完备的. 为了证明这, 我们来构造一个柯西连续函数叙列, 它的极限函数是不连续的.

$$f_n(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } -1\leqslant t\leqslant 0\\ nt, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{n}\\ 1, & \text{当 } \dfrac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

$[a,b]=[-1,1]$. 这些函数都是连续的.

对于 $m>n$, 当 $n>n_0$ 时有 $d(f_m,f_n)=\int_{-1}^{+1}|f_m-f_n|dt\leqslant\frac{1}{2n}<\varepsilon$, 即叙列 f_n 是一个柯西叙列.

如果按$\|f\|_2$的意义, 有一个极限函数, 它是连续的, 那末在 $[-1,0)$上必须有 $f=0$, 而在$(0,1]$上必须有 $f=1$. (否则就与以下

说法相矛盾：当 $n>n(e)$ 而且对于分别在 $[-1,0)$ 与在 $(0,1]$ 上连续的函数 $f-f_n$，有 $0\leqslant\max\left\{\int_{-1}^{0}|f-f_n|dt,\ \int_{1}^{0}|f-f_n|dt\right\}\leqslant\int_{-1}^{1}|f-f_n|dt<e.$）可是．这个函数在 $t=0$ 处确实是不连续的．

问题 6:

用 $f(0,0)=0$，而当 $x^2+y^2>0$ 时用 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 来定义一个函数 $f: \boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$．

试确定这样的子集合 $S\subset\boldsymbol{R}^2$，使得在其上 f 是连续的，又试证：在 $(0,0)$ 的每一个任意的邻域中，f 取得属于 $[-1,+1]$ 的每一个值 a．（如果不另提出要求，在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的范数用 $\|(x_1,\cdots,x_n)\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ 来确定．）

解:

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当}(x,y)=(0,0)\\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{当}(x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时是连续的，因为有理函数[1]在分母不为零处是连续的．

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是不连续的，因为 $-1=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\neq\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=1\neq f(0,0)$．

如果我们考虑在直线 $y=mx$ 上的函数值，那末当 $x\neq0$，就有

$$f(x,mx)=\frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)}=\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

如果让 m 取遍区间 $[0,\infty)$，那末 $f(x,y)$ 取遍区间 $(-1,1]$．[2]此

1）原文本写作连续函数的有理函数——译者．

2）下面的几句话，是译者加上的——译者．

外，在直线 $x=0$ 上的函数值，只要 $y\neq 0$，就总是取得 -1. 所以，在(0, 0)的每一个邻域中，f 取属于 $[-1, +1]$ 中的每一个值.

问题 7:

如果在 $\boldsymbol{R}$ 中，取离散尺度(当 $x=y$，有 $d(x,y)=0$；当 $x\neq y$，有 $d(x,y)=1$)，那末每一个函数 $f\colon D\subset\boldsymbol{R}\to X$（$X$ 是一个任意的距离空间）是连续的.

解:

要证明的是：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta(\varepsilon)=\delta>0$，使得对于 D 的每一个 x_0，当 $d_1(x_0, x)<\delta$ 时，有 $d_2(f(x), f(x_0))<\varepsilon$；$d_2$ 在这里是在 X 中的尺度，d_1 是 R 中的离散尺度. 选取 $0<\delta<1$；那末，只有当 $x_0=x$ 时，才有 $d_1(x_0, x)<\delta$. 可是当 $x=x_0$ 时自然有 $d_2(f(x), f(x_0))=0<\varepsilon$；即任意一个函数 f 在 D 中是连续的.

问题 8:

设 $K\colon D=[a,b]\times[a,b]\subset\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ 是一个在 D 中的连续函数. 设 $C^{\sup}_{[a,b]}$ 是在 $[a,b]$ 上连续实函数所构成的线性赋范空间，且有 $\|f\|=\sup\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$（参看问题 4）.

试证: $\varphi\colon f\to\int_a^b K(s,t)f(t)dt$ 在 $C^{\sup}_{[a,b]}$ 中是连续的，而且有 $\varphi(C^{\sup}_{[a,b]})\subset C^{\sup}_{[a,b]}$.

解:

1) 函数 $K\colon D=[a,b]\times[a,b]\subset\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ 是在 D 中连续的，即 K 在 D 上取得最大值 $M\neq 0$.（对于 $M=0$，断言是显然的.）

2) 函数 $f\in C^{\sup}_{[a,b]}$ 在 $[a,b]$ 上是连续的，即对于每一个 $\varepsilon>0$，有一个 $\delta(\varepsilon)=\delta>0$，使得对于一切 $t, t'\in[a,b]$，当 $|t-t'|<\delta$ 成立时，也有 $|f(t)-f(t')|<\varepsilon$. $\|f\|=\sup\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$. $K(s,t)\cdot f(t)$ 关于 $t\in[a,b]$ 是连续的；这就是说，函数 $K(s,t)\cdot f(t)$ 在 $[a,b]$ 上是

可积的.

3) $\varphi(f)=\int_a^b K(s,t)f(t)dt$ 在 $C^{\sup}_{[a,b]}$ 中是连续的.

证明: 设 $\varepsilon>0$是任意事先给定的, 又 f, $g\in C^{\sup}_{[a,b]}$ 且有 $\|f-g\|<\delta$, 其中 $\delta=\frac{\varepsilon}{M\cdot|b-a|}$. 现在有

$$
\begin{aligned}
|\varphi(f)-\varphi(g)|&=\left|\int_a^b K(s,t)\cdot f(t)dt-\int_a^b K(s,t)\cdot g(t)dt\right|\\
&=\left|\int_a^b K(s,t)(f(t)-g(t))dt\right|\\
&\leqslant|b-a|\cdot\max_{t\in[a,b]}|K(s,t)|\cdot\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|\\
&=|b-a|\cdot M\cdot\|f-g\|\leqslant|b-a|\cdot M\cdot\delta<\varepsilon,
\end{aligned}
$$

即, $\varphi(f)$是连续依赖于 f 的.

4) $\varphi(C^{\sup}_{[a,b]})\subset C^{\sup}_{[a,b]}$,就是说,随着$f\in C^{\sup}_{[a,b]}$,也有$\varphi(f)\in C^{\sup}_{[a,b]}$.

对于固定的 f, $\varphi(f)$ 是一个 $s\in[a,b]$的函数. 因为K对于一切 $s\in[a,b]$, 是连续的, 又积分是一个连续泛函, 就推得: $\varphi(f)$对于一切$s\in[a,b]$是连续的.

问题 9*:

设E与F是两个线性赋范空间. 设 $\mathbf{L}(E,F)$是一切从E到F的连续线性映射组成的集合. 试证:

a) 记 $f,g\in\mathbf{L}(E,F)$, $\lambda\in\mathbf{R}$, 又$(f+g): x\to f(x)+g(x)$, $\lambda\cdot f: x\mapsto\lambda\cdot f(x)$, 那末 $\mathbf{L}(E,F)$是一个向量空间.

b) 线性映射 $f: E\to F$ 在E中是连续的, 当且仅当存在一个常数 $a\geqslant 0, a\in\mathbf{R}$, 有 $\|f(x)\|_F\leqslant a\|x\|_E$.

c) 若 M_f 是使得 $\|f(x)\|_F\leqslant a\|x\|_E$ 成立的所有常数 a 组成的集合, 那末设$\|f\|_L=\inf M_f$. 试证: $\|f\|_L=\sup\limits_{\|x\|_E\leqslant 1}\|f(x)\|_F$, 又 $\|f\|_L$ 是在 $\mathbf{L}(E,F)$ 中的一个范数.

d)** 当 F 是完备的，那末 $L(E,F)$ 是一个完备赋范空间.

e) 试证：在特殊情形 $E=\boldsymbol{R}^n$, $F=\boldsymbol{R}^m$, 在 $\boldsymbol{R}^n$ 与 $\boldsymbol{R}^m$ 中各选取一个基之后，$L(E,F)$ 的每一个元素用一个矩阵 A 来表征，而且有

$$\|f\|_L=\|A\|=\max_{i=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\right\},$$

对 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^n$ 所选取的范数是 $\|x\|_E=\max_{i=1}^{n}\{|x_i|\}$. 对于 $\boldsymbol{R}^m$ 的类似.

解:

a) 因为 E 与 F 是向量空间，就立刻得到断言(验证向量空间的诸公理!).

b) α) 给一个 $a\in\boldsymbol{R}$, 且 $a\geqslant 0$, 又 $\|f(x)\|\leqslant a\|x\|$. 设 x_0 是 E 的任意一个元素(为了简单起见，范数的下标在这里省略了.)

对于 $\|x-x_0\|<\dfrac{\varepsilon}{a}$, 当 $a\neq 0$, 又对于一切 $x\in E$, 当 $a=0$ 时，都有 $\|f(x)-f(x_0)\|=\|f(x-x_0)\|\leqslant a\|x-x_0\|<\varepsilon$. 所以，$f$ 是连续的.

β) 如果 f 在 E 中是连续的，那末，特别地，在 $x=0$ 处也是连续的. 这就是说，对于 $\varepsilon=1$, 存在一个 δ, 当 $\|x\|<\delta$ 时，有 $\|f(x)\|<1$. 如果现在选取一个任意的 $x\in E$, $x\neq 0$. 那末有 $z=\dfrac{\delta x}{2\|x\|}\in U_\delta(0)$, 即 $\|z-0\|=\|z\|<\delta$, 所以 $1\geqslant\|f(z)\|=\left|\dfrac{\delta}{2\|x\|}\right|\|f(x)\|$, 即 $\|f(x)\|\leqslant\dfrac{2}{\delta}\|x\|=a\cdot\|x\|$, 其中 $a\in\boldsymbol{R}_+$.

c) 因为 f 是连续的，按照 b) 存在一个固定的常数 $a\geqslant 0$. 此外，M_f 是以 $0\in\boldsymbol{R}$ 为下界的，所以存在 $\inf M_f$.

α) $\|f\|_L=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|f(x)\|$. 对于每一个 $a\in M_f$ 以及每一个 x, 特别地, 对于 $\|x\|\leqslant 1$, 有 $\|f(x)\|\leqslant a$, 所以也有 $\|f(x)\|\leqslant\|f\|_L$, 就是说, $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|f(x)\|\leqslant\|f\|_L$.

当 $\|f\|_L=0$, 没有什么要证明的.

现在设 $\|f\|_L>0$. 按照集合 M_f 的定义, 对于每一个 $0<b<\|f\|_L$, 存在一个 $x\in E$, $x\neq 0$, 使得 $\|f(x)\|>b\|x\|$. 记 $z=\dfrac{x}{\|x\|}$, 有 $\|z\|=1$, 而且 $\|f(z)\|>b\cdot\dfrac{\|x\|}{\|x\|}=b$. 这就是说, $b\leqslant\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|f(x)\|$, 所以, $\|f\|_L\leqslant\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|f(x)\|$.

β) $\|f\|_L=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|f(x)\|$ 是一个范数: 由于 $\|f(x)\|\geqslant 0$, 所以 $\|f\|_L\geqslant 0$. 对于 $f=0\in \boldsymbol{L}(E,F)$, 就对于一切 $x\in E$, 有 $f(x)=0$, 所以, 也有 $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|f(x)\|=0$. 反过来, 设 $\|f\|_L=0$: 于是, 对于 $x\neq 0$, 有 $f(x)=\|x\|\cdot f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)=\|x\|\cdot 0=0$, 所以 $f=0\in\boldsymbol{L}$. 由于 $\|\lambda\cdot f(x)\|=|\lambda|\cdot\|f(x)\|$, 也有 $\|\lambda\cdot f\|_L=|\lambda|\cdot\|f\|_L$. 最后, 如果 $f=g+h$, 那末有 $\|f(x)\|\leqslant\|g(x)\|+\|h(x)\|$, 所以, 也有 $\|f\|_L\leqslant\|g\|_L+\|h\|_L$.

d) 这里要证明, 一个柯西叙列关于范数 $\|f\|_L$ 收敛于一个线性连续极限函数.

α) 设 f_n 是一个在 $\boldsymbol{L}(E, F)$ 中的柯西叙列. 对于每一个 $\varepsilon>0$, 存在一个 $n(\varepsilon)$, 使得当 $n, m>n(\varepsilon)$, 有 $\|f_m-f_n\|_L<\varepsilon$. 所以, 按照 c), 对于一切 $x\in E$ 且 $\|x\|\leqslant 1$, 就对一切 m, $n>n(\varepsilon)$, 也有 $\|f_m(x)-f_n(x)\|<\varepsilon$. 所以, $f_n(x)$ 是一个在 F 中的柯西叙列, 而且, 由于 F 的完备性, 收敛于一个元素 $v(x)\in F$. 对于任意的 $x\in E$, 可以如此指定一个 $\lambda\in\boldsymbol{R}$, 使得 $x=\lambda z$, 且 $\|z\|\leqslant 1$. 这就是说, $f_n(x)=\lambda f_n(z)$ 趋于极限值 $v(x)=\lambda v(z)$. 现在来证明这个极限映射的线性性质: 由 $f_n(x+y)=f_n(x)+f_n(y)$ 以及问题 3b), 就

得到 $v(x+y)=v(x)+v(y)$. 类似的考虑，得到 $v(\lambda x)=\lambda\cdot v(x)$.

β）要证明极限函数 v 的连续性：对于 $\|x\|\leqslant 1$ 又 $m,n>n(\varepsilon)$，从 $\|f_m(x)-f_n(x)\|<\varepsilon$，就得到，特别地，$\|v(x)-f_n(x)\|\leqslant\varepsilon$，所以，当 $\|x\|\leqslant 1$ 时，有 $\|v(x)\|\leqslant\|f_n\|+\varepsilon$. 于是，按照 b) 与 c)，v 是连续的. 由 α)，当 $n>n_0$ 时，有 $\|v-f_n\|_L<\varepsilon$，这就是说，f_n 按范数 $\|\ \ \|_L$ 的意义收敛于 v.

e）对于 $E=\boldsymbol{R}^n$，$F=\boldsymbol{R}^m$，关于 $\boldsymbol{R}^n$ 与 $\boldsymbol{R}^m$ 中的固定的基，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$ 中的每一个元素一一对应于一个矩阵 A. 余下还要证明

$$\|f\|_L=\max_{i=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\right\}.$$

对于 $\boldsymbol{R}^n$，在这里指定的范数是 $\|x\|=\max\limits_{i=1}^{n}\{|x_i|\}$，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$. 于是，断言就是 $\|f\|_L=\sup\{\max\limits_{j=1}^{m}\{|a_jx|\}$，其中上确界是就满足 $\max\limits_{i=1}^{n}\{|x_i|\}\leqslant 1$ 的 x 来讨论的. 这里，a_j 是矩阵 A 的行向量.

当 $|x_i|\leqslant 1$，即 $\|x\|\leqslant 1$ 时，就有 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ji}x_i\right|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ji}x_i|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ji}|$，所以也有 $\max\limits_{j=1}^{n}\left|\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ji}x_i\right|\leqslant\max\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ji}|$，就是说，$\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|f(x)\|\leqslant\max\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ji}|$. 可是另一方面也有 $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|f(x)\|\geqslant\max\limits_{j=1}^{m}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ji}|\right\}$. 因为最大值对于特定的标号 $k(1\leqslant k\leqslant m)$ 是达得到的，于是设 $x_0=(\mathrm{sign}a_{K1}, \mathrm{sign}a_{K2}, \cdots, \mathrm{sign}a_{Kn})$. 对于 $f\neq 0$，有 $\|x_0\|$

$=1$, 而且$\| f(x_0) \| = \sum_{i=1}^{n} |ak_i|$. 当 $f=0$, 断言是平凡的.

问题 10*:

试证: 区间$[a,b]$不可能连续可逆地映上单位圆.

解:

1) 从单位圆E的参数表达式$X(t)=\binom{\cos t}{\sin t}$, 立刻推得, 整个的圆与具有端点(没有端点)的圆弧是圆的仅有的连通闭(开)子集合M. 对于圆E本身, 断言是清楚的. 设$M \subset E$且$M \neq E$. 于是至少存在一个$t_0 \in \mathbf{R}$, 使得$X(t_0) \in E \backslash M$. 此外, 有$M \subset X((t_0, t_0+2\pi))$, 又$X$在它上面是可逆的, 而且双向连续的; 这就是说, M在$(t_0, t_0+2\pi)$中的原象是连通的, 所以是一个区间, 即M必须是一个弧, 反之也然.

2) 设Y: $[a, b] \to E$是一个映上E的可逆连续映射. 记$\alpha \in (a, b)$, $Y_\alpha[a, \alpha] \subset \mathbf{R} \to Y_\alpha([a, \alpha]) \subset E$是一个连续双侧映射, 它把紧致集合$[a, \alpha]$映上$Y_\alpha([a, \alpha])$. 这就是说, Y_α^{-1}也是连续的, 即Y_α是一个同胚映射.

$Y_\alpha([a, \alpha])$是一个$\neq E$的闭圆弧, 端点是$Y_\alpha(a)$与$Y_\alpha(\alpha)$. 对于圆的上述参数表达式$X(t)$, 可以用$Y_\alpha(a)=X(t_a)$与$Y_\alpha(\alpha)=X(t_\alpha)$这样来确定$t_a$与$t_\alpha$且$|t_a - t_\alpha| < 2\pi$, 使得$Y([a, \alpha]) = X([t_a, t_\alpha])$或者$X([t_\alpha, t_a])$. 让$\alpha$指向$b$地取遍区间$[a, b]$上的点, 那末$t_\alpha$单调地变化着, 又由于$t_a \leqslant t_\alpha < t_a + 2\pi$, 或者$t_a \geqslant t_\alpha > t_a - 2\pi$, 存在着$T = \lim\limits_{\alpha \to b} t_\alpha \leqslant t_a + 2\pi \, (\geqslant t_a - 2\pi)$. 如果竟然有$T < t_a + 2\pi \, (> t_a - 2\pi)$, 那末, 由于$X$与$Y$的连续性, 集合$Y([a, b]) = X([t_a, T])$就不可能是整个的圆. 这就是矛盾. 另一方面, 如果$T = T_a + 2\pi \, (= t_a - 2\pi)$, 那末就有$Y([a, b]) = X([t_a, t_a + 2\pi])$, 就是说, $Y(a) = Y(b)$. 这个等号就与Y的可逆性相矛盾.