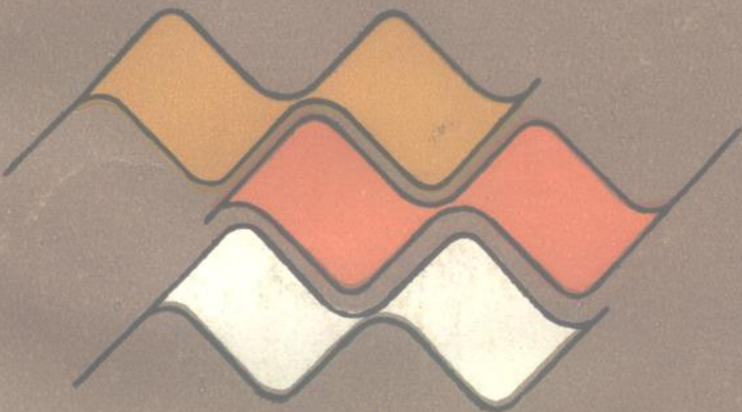
数学分析的概念与方法

王向东　熊道统主编



下册

上海科学技术文献出版社

数学分析的概念与方法

下　册

主编　王向东　熊道统

副主编　张永忠　李民安

上海科学技术文献出版社

数学分析的概念与方法

（下　册）

主　编：王向东　熊道统

副主编：张永忠　李民安

*

上海科学技术文献出版社出版发行

（上海市武康路2号）

全国新华书店经销

宜兴市第二印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印张 14.375　字数 347,000

1990年12月第1版　1990年12月第1次印刷

印数：1—4,000

ISBN 7-80513-565-7/O·45

定价：7.30元

《科技新书目》214-313

本书编者

（以姓氏笔画为序）

王向东	王善勤	车素兵	白延琴	任保献
关长铭	安枫灵	孙明锷	李文荣	李文亮
李民安	李秉友	李毅夫	苏子安	杜文霞
杨荣先	郑映畅	邵学广	陈汝栋	陈锦宽
张同德	张永忠	张炳汉	张晓岚	张富德
施庭训	徐大伟	高成修	梁本中	崔艳蓝
阎明刚	彭腾先	韩普宪	熊道统	魏　勇

目　　录

第四篇　多元函数微积分学

第五篇 无穷级数论

第六篇　广义积分

第十一章　多元函数微分学

多元函数与一元函数在微分学的概念、定理以及研究方法上有着密切联系，存在着许多共同点。所以，常常可把多元函数问题转化为一元函数问题来解决。另一方面，多元函数微分学虽然是一元函数微分学的自然推广，但是，应注意到多元函数与一元函数之间也存在着一些本质的差异，这些差异反映出多元函数的特殊性。因此，在学习多元函数微分学时，经常与一元函数微分学进行比较是大有益处的。

由于二元函数与更多元的函数之间没有本质的差别，因此，为叙述的方便，我们总是以二元函数为代表来讨论多元函数微分学。

§11.1　平面(空间)点集与多元函数

一　基本概念与定理

1. 平面点集

定义 11.1　将有序实数对(x, y)的集合

$$\{(x, y)\,|\,x\in R,\ y\in R\}$$

称为二维空间，记为R^2，而称二维空间R^2的子集为平面点集。显然，二维空间就是整个坐标平面，而平面点集就是坐标平面的子集。

定义 11.2　若$P_1(x_1, y_1)$与$P_2(x_2, y_2)$是R^2内任两点，则规定P_1与P_2的距离为：

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

评注　显然，二维空间R^2(坐标平面)是一维空间R(实数轴)的自然推广。同样，二维空间内两点间的距离公式也是R内任两点间距离公式的推广。

2. 邻域、内点和界点

定义 11.3 设点 $P(a, b)\in R^2$. 对于任给正数 r，称平面点集

$$\{(x, y)\mid\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$$

为点 $P(a, b)$ 的 r(圆形)邻域，记为 $U(P, r)$，又称平面点集

$$\{(x, y)\mid |x-a|<r, \ |y-b|<r\}$$

为点 $P(a, b)$ 的 r(方形)邻域，记为 $K(P, r)$.

评注 圆形邻域与方形邻域没有本质区别，它们都是"在 P 点附近"这个几何直观形象的准确表述. 坐标平面上的两种邻域，在形式上与数轴上的邻域是一致的，数轴上一点的邻域是以该点为中心的开区间.

定义 11.4 设 E 是平面点集，P 是坐标平面上一点.

(1) 若存在 $r>0$，使 $U(P, r)\subset E$，则称 P 是 E 的内点.

(2) 若对任意 $r>0$，$U(P, r)$ 内既有 E 的点也有非 E 的点，则称 P 是 E 的界点. E 的所有界点的集合，称为 E 的边界.

(3) 若存在某个 $U(O, r)$，使 $E\subset U(O, r)$，则称 E 是有界集. 反之，称 E 是无界集.

评注 在内点的定义中，只要求"存在(某个)$r>0$"，而在界点的定义中，则要求"对于任意 $r>0$". 这两个条件切不可随意改动. 另外，平面点集 E 的内点必属于 E，而 E 的界点未必属于 E.

定义 11.5 若平面点集 E 的每一点都是它的内点，则 E 称为开集.

显然，前述的点 P 的两种邻域均为开集，它们都不包括边界.

3. 区域

定义 11.6 若平面点集 E，满足：

(1) 其中每一点都是内点(E 为开集)，

(2) 其内任两点都能用属于 E 的折线连接起来 (E 是连通集)，则称 E 是开区域.

若E是某开区域添加上它的边界所构成的集合，称E是闭区域。

在不必指明区域的开闭性或区域的开闭性很显然的时候，常简称为区域。

评注 1° 简言之，平面上的开区域就是连通开集，它比直线上的开区间要复杂得多。它可以有各种各样的形状。例如，平面点集

$$D_1=\{(x, y)\,|\,0<x<1,\ 0<y<x\},$$

$$D_2=\{(x, y)\,|\,0<y<x\},$$

$$D_3=\{(x, y)\,|\,x>0,\ y>0,\ x+y<1\},$$

都是开区域

2° 平面点集$D=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2<+\infty\}$就是全平面。因为全平面没有界点，所以，可以说$D$包含了全部界点，也可以说$D$不含界点。因此，可以认为，$D$是闭区域也是开区域。事实上，全平面$D$是唯一具有两重性的区域，此外再也找不到一个平面区域，它既是开的又是闭的。

3° 前面所定义的平面上点的邻域也是开区域，其中圆形邻域常称为"开圆盘"，加上边界常称为"闭圆盘"。

4. 坐标平面的连续性

为了讨论二元函数的极限与连续，需将直线的连续性推广到坐标平面上。

定理 11.1 （闭区域套定理）若$R_1, R_2, \cdots, R_n$是坐标平面上一列有界闭区域，且满足

(1) $R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}d(R_n)=0$

则平面上必存在唯一的点P_0，使$P_0\in R_n(n=1, 2, \cdots)$。

评注 闭区域套定理有着很强的几何直观性，它是闭区间套定理的自然推广，其中$d(R_n)$表示有界闭区域R_n的直径，即$d(R_n)=\sup\{|P-Q|\,|\,P, Q\in R_n\}$。

定义 11.7 设E是一个平面点集。若对于任意的$\varepsilon>0$，点P的ε邻域内都含有E的无穷多点，那么，点P叫做集E的聚

点。显然，集 E 的聚点 P 未必属于 E；任何区域的内点和界点都有可能是它的聚点。

定理 11.2 （聚点定理）若 E 是一个有界无穷点集，则 E 至少有一个聚点。

定义 11.8 设有一组（有限个或无限个）开区域的集 $\{S\}$，若 E 中每一点都至少在 $\{S\}$ 中某个区域内，则称开区域集 $\{S\}$ 覆盖了 E。

定理 11.3 （有限覆盖定理）若开区域集 $\{S\}$ 覆盖了某个有界闭区域 D，则从 $\{S\}$ 中选出有限个开区域就能覆盖 D。

评注 上述定理 11.1—11.3 都反映了坐标平面的连续性，它们都是实数连续性相应定理的自然推广．要多作对照、加深理解．因为坐标平面上的点没有序的概念，所以在坐标平面上没有与描述实数连续性的确界定理、单调有界数列存在极限定理相应的定理。

5. n 维空间 R^n

定义 11.9 将 n 个有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in R^1, i=1, 2, \cdots, n\}$$

称 n 维空间，记为 R^n，其中每一个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点，$x_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 称为该点的第 i 个坐标。

n 维空间 R^n 是实数集 R 与二维空间 R^2 的自然推广，因此可类似地定义两点间的距离，进而定义点的邻域、内点、界点、边界及 R^n 中的开区域、闭区域等概念，并能证明描述 R^n 连续性的相应定理。

6. 多元函数

定义 11.10 设 A 是 n 维空间 R^n 的非空子集，若对 A 中任意点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，按照对应关系 f 都对应 R 中唯一的数 y，则称对应关系 f 是定义在数集 A 上的 n 元函数，记为

$$f: A \longrightarrow R \text{ 或 } y=f(P) \text{ 或 } y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

数集 A 称为函数 f 的定义域，函数值的集合称为函数 f 的值域，记为 $f(A)$。

评注 二元函数和二元以上的函数统称多元函数，以后重点讨论二元函数。二元函数 $z=f(x, y)$的图象一般应是三维空间的曲面，当然有时比较复杂，但可以帮助我们思考某些问题。至于 n 元函数 $z=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)(n>2)$的"图象"没有直观形象，但也可以设想为 R^{n+1} 空间中的一个"超"曲面。

二 方法与例题分析

1. 关于平面点集

例1 证明：点 P 的圆形邻域必存在点 P 的方形邻域，反之亦然。

证明 设点 $P(a, b)$的圆形邻域为

$$U(P, r)=\{(x, y)\mid(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$$

取方形邻域

$$K\left(P, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)=\left\{(x, y)\ \middle|\ |x-a|<\frac{r}{\sqrt{2}},\ |y-b|<\frac{r}{\sqrt{2}}\right\}$$

容易看出：对任意$(x, y)\in K\left(P, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$，总有，

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2 \quad \text{所以}$$

$$K\left(P, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)\subset U(P, r)$$

反之，同法可证。

例2 证明：适合条件 $y>x^2$ 的全部点 (x, y) 所成的集合 E 是开的。

证明 任取一点 $P(a, b)\in E$，令 $\alpha=b-a^2>0$，考虑 $P(a, b)$ 的一个 ε 邻域 $U(P, \varepsilon)$：

$$(x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2$$

对 $U(P, \varepsilon)$内的一切点，(x, y)都有 $|x-a|<\varepsilon$, $|y-b|<\varepsilon$.利用

$$a^2=x^2-2a(x-a)-(x-a)^2$$

要使

$$y>b-\varepsilon=a^2+\alpha-\varepsilon$$

$$=x^2-2a(x-a)-(x-a)^2+\alpha-\varepsilon$$
$$>x^2+\alpha-2\varepsilon|a|-\varepsilon^2-\varepsilon>x^2$$

只要取 $\varepsilon=\min\{1, \alpha/(2|a|+2)\}$，这样 $U(P, \varepsilon)\subset E$，从而证得 E 为开集。

例 3 满足下列条件的一切点 (x, y) 所构成的平面点集，具有前面所述的哪些性质？

(1) $x^2+y^2\leqslant 1$,　　(2) $x^2-y\geqslant 0$,

(3) $x<-2$,　　(4) $xy>0$.

解 (1) 有界的闭区域，边界是 $x^2+y^2=1$.

(2) 无界闭区域，边界是抛物线 $y=x^2$.

(3) 无界区域，边界是直线 $x=-2$.

(4) 无界开集（不连通），边界是直线 $x=0$, $y=0$.

2. 多元函数的定义域与值域

例 4 求函数 $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$ 的定义域。

解 定义域为

$$x^2+y^2-z^2<-1$$

这是以双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 为边界的两个不连通部份。

例 5 求函数 $z=\ln[x\ln(y-x)]$ 的定义域。

解 由对数函数性质，应有

$$x\ln(y-x)>0$$

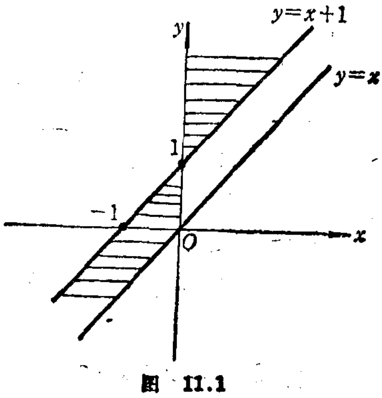


图 11.1

于是有

$$\begin{cases} x>0 \\ y-x>1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x<0 \\ 0<y-x<1 \end{cases}$$

这便构成函数的定义域(如图 11.1 所示)。

例 6 求函数 $z=\cos\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$ 的定义域与值域。

解 定义域为 $x\neq 0$, 而值域为 $0<z\leqslant 1$ 。

3. 求函数关系

例 7 已知 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\quad(x>0)$

求函数 $f(x)$。

解 因 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$, 当令 $u=\dfrac{y}{x}$ 时

有 $f(u)=\sqrt{1+u^2}$, 故所函数为 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

例 8 已知 $f\left(x+y,\ \dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 求 $f(x,y)$。

解 令 $u=x+y,\ v=\dfrac{y}{x}$

所以 $x=\dfrac{u}{1+v},\ y=\dfrac{uv}{1+v}$

故 $f(u,v)=\dfrac{u^2(1-v)}{1+v}$, 从而 $f(x,y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$。

习题 11.1

1. 满足下列条件的一切点 (x,y,z) 所构成的 R^3 中点集具有前述的哪些性质?

(1) $x^2+y^2+z^2>2$, (2) $x^2+y^2\geqslant 1$

2. 证明: 平面点集 $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 的每一个点均为内点。对于点集 $\overline{E}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$, 结论对否? 为什么?

3. 指出下列函数的定义域和值域:

(1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$ (2) $z=\sqrt{x\sin y}$

(3) $z=\sqrt{-x^3-y^3}$ (4) $z=\arccos\ln(x+y)$

4. 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，若当 $y=1$ 时有 $z=x$，求函数 f 与 z。

§11.2 二元函数的极限与连续

一 基本概念与定理

1. 二元函数的极限

定义 11.11 设 $f(x, y)$ 在区域 D 上定义，$P(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或界点。如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意点 $Q(x, y)\in D$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，且 $P\neq Q$ 时，有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

则称 A 是函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的极限。记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A, \text{ 或 } Q\to P,\ f(Q)\to A$$

评注 1° 显然，定义中的"$|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, $P\neq Q$"也可改为"$P(x_0, y_0)$的圆形邻域：$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$"两种表达方式等价。

2° 定义中的点 $P(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或界点。这就是说函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 可以没有定义，也就是说极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在与否与 $f(x, y)$ 在 $P(x_0, y_0)$ 处的情况无关，这与一元函数的极限极限概念是相同。例如，函数 $f(x, y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 无定义，但根据定义可以证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$。

3° 由定义可见，极限 $\lim\limits_{Q\to P} f(Q)=A$ 意味着当点 $Q(x, y)$ 以任意方式（直线、曲线、折线等）趋于点 $P(x_0, y_0)$ 时，函数 $f(x, y)$ 都以 A 为极限，所以又称为"完全极限"。于是，可以得到下面的结论。

"若点 Q 以某种方式趋于点 P，函数极限不存在，则极限 $\lim\limits_{Q\to P} f(Q)$ 不存在；

若点 Q 以两种方式趋于点 P，函数的极限值不相等，则极限