

■ Tom M. Apostol 著

■ 唐太明 译

■ 赵宏量 审校

# 解析数论导引

西南师范大学出版社

0156.4

570577

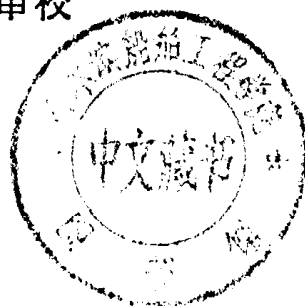
# 解析数论导引

---

Tom M. Apostol 著

唐太明 译

赵宏量 审校



西南师范大学出版社

1992

# 解析数论导引

Tom M. Apostol 著

唐太明 译

赵宏量 审校

---

西南师范大学出版社出版

(重庆 北碚)

新华书店重庆发行所经销

四川省内江新华印刷厂印刷

\*

升本787×1092 1/32 印张: 15.25 字数: 330千

1992年2月第一版

1992年2月第一次印刷

印数: 1—1000册

\*

ISBN 7—5621—0660—6/G·474

---

定价: 4.10元

# 前 言

本书根据Tom M·A Postol所著《解析数论导引》译成，保持了原书的风格和内容。它适宜于具有高等微积分知识基础，但并不要求具备数论预备知识的大学本科生或研究生使用。事实上，对本书来说，它的论述，可以说是完全不需要微积分知识的，然而对于水平较高的大学生学习本书也是十分有益的。

本书有目的地选择了具有一定广度和深度的课目，例如有的在华罗庚著《数论导引》中未加论证的，在此也作了证明；其中还列出了吸引历代专业和业余数学家的问题及其解法技巧等；在这里也进行了讨论，可能会使许多数学系学生产生特殊的兴趣。

本书的初稿由唐太明译出，在编辑加工中，由西南师大数学系赵宏量对照原文进行了审校和加工，并对全书作了统稿和技术处理。相信本书的出版会受到我国广大数学专业家和业余爱好者的欢迎，用它作为大学本科生和研究生的教材，也是十分相宜的。

编 审 者

1991年10

# 目 录

|                                   |        |
|-----------------------------------|--------|
| 历史介绍 .....                        | ( 1 )  |
| 第一章 算术基本定理 .....                  | ( 17 ) |
| 1.1 引言 .....                      | ( 17 ) |
| 1.2 整除性 .....                     | ( 18 ) |
| 1.3 最大公约数 .....                   | ( 19 ) |
| 1.4 素数 .....                      | ( 21 ) |
| 1.5 算术基本定理 .....                  | ( 22 ) |
| 1.6 素数倒数的级数 .....                 | ( 24 ) |
| 1.7 Euclid算法 .....                | ( 25 ) |
| 1.8 两个以上的数的最大公约数 .....            | ( 27 ) |
| 第一章习题 .....                       | ( 28 ) |
| 第二章 数论函数与Dirichlet乘积 .....        | ( 33 ) |
| 2.1 引言 .....                      | ( 33 ) |
| 2.2 Möbius函数 $\mu(n)$ .....       | ( 33 ) |
| 2.3 Euler函数 $\varphi(n)$ .....    | ( 34 ) |
| 2.4 $\varphi$ 与 $\mu$ 的相互关系 ..... | ( 36 ) |
| 2.5 $\varphi(n)$ 的一个乘积公式 .....    | ( 37 ) |
| 2.6 数论函数的Dirichlet乘积 .....        | ( 39 ) |
| 2.7 Dirichlet逆函数与Möbius反转公式 ..... | ( 41 ) |

|      |                                     |        |
|------|-------------------------------------|--------|
| 2.8  | Mangoldt函数 $\Lambda(n)$ .....       | ( 43 ) |
| 2.9  | 积性函数 .....                          | ( 45 ) |
| 2.10 | 积性函数与Dirichlet乘积 .....              | ( 46 ) |
| 2.11 | 完全积性函数的逆函数 .....                    | ( 48 ) |
| 2.12 | Liouville函数 $\lambda(n)$ .....      | ( 50 ) |
| 2.13 | 除数函数 $\sigma_a(n)$ .....            | ( 51 ) |
| 2.14 | 广义卷积 .....                          | ( 52 ) |
| 2.15 | 形式幂级数 .....                         | ( 54 ) |
| 2.16 | 数论函数的Bell级数 .....                   | ( 57 ) |
| 2.17 | Bell级数与Dirichlet乘积 .....            | ( 58 ) |
| 2.18 | 数论函数的导数 .....                       | ( 59 ) |
| 2.19 | Selberg等式 .....                     | ( 61 ) |
|      | <b>第二章习题</b> .....                  | ( 61 ) |
| 第三章  | 数论函数的平均值 .....                      | ( 69 ) |
| 3.1  | 引言 .....                            | ( 69 ) |
| 3.2  | 大O符号, 函数的渐近等式 .....                 | ( 70 ) |
| 3.3  | Euler求和公式 .....                     | ( 71 ) |
| 3.4  | 几个基本渐近公式 .....                      | ( 73 ) |
| 3.5  | $d(n)$ 的平均阶 .....                   | ( 75 ) |
| 3.6  | 除数函数 $\sigma_a(n)$ 的平均阶 .....       | ( 79 ) |
| 3.7  | $\varphi(n)$ 的平均阶 .....             | ( 81 ) |
| 3.8  | 对于由原点可见的格点分布的应用 .....               | ( 82 ) |
| 3.9  | $\mu(n)$ 与 $\Lambda(n)$ 的平均阶 .....  | ( 85 ) |
| 3.10 | Dirichlet乘积的部分和 .....               | ( 86 ) |
| 3.11 | 对 $\mu(n)$ 与 $\Lambda(n)$ 的应用 ..... | ( 87 ) |
| 3.12 | Dirichlet乘积的部分和的另一个等式 .....         | ( 91 ) |

|                                                                  |         |
|------------------------------------------------------------------|---------|
| 第三章习题 .....                                                      | ( 92 )  |
| 第四章 素数分布的几个基本定理 .....                                            | ( 99 )  |
| 4.1 引言 .....                                                     | ( 99 )  |
| 4.2 Chebyshev函数 $\psi(x)$ 与 $\theta(x)$ .....                    | ( 100 ) |
| 4.3 联系 $\theta(x)$ 与 $\pi(x)$ 的关系式 .....                         | ( 102 ) |
| 4.4 素数定理的几个等价形式 .....                                            | ( 105 ) |
| 4.5 $\pi(n)$ 与 $p_n$ 的一些不等式 .....                                | ( 100 ) |
| 4.6 Shapiro Tauberian定理 .....                                    | ( 113 ) |
| 4.7 Shapiro定理的应用 .....                                           | ( 117 ) |
| 4.8 部分和 $\sum_{n \leq x} \left(\frac{1}{p}\right)$ 的一个渐近公式 ..... | ( 119 ) |
| 4.9 Möbius函数的部分和 .....                                           | ( 121 ) |
| 4.10 素数定理初等证明的简概 .....                                           | ( 130 ) |
| 4.11 Selberg渐近公式 .....                                           | ( 131 ) |
| 第四章习题 .....                                                      | ( 133 ) |
| 第五章 同余式 .....                                                    | ( 143 ) |
| 5.1 同余的定义与基本性质 .....                                             | ( 143 ) |
| 5.2 剩余类与完全剩余系 .....                                              | ( 147 ) |
| 5.3 一次同余式 .....                                                  | ( 149 ) |
| 5.4 简化剩余系与Euler-Fermat定理 .....                                   | ( 152 ) |
| 5.5 模 $p$ 的多项式同余式, Lagrange定理 .....                              | ( 154 ) |
| 5.6 Lagrange定理的应用 .....                                          | ( 155 ) |
| 5.7 一次同余式组, 中国剩余定理 .....                                         | ( 157 ) |
| 5.8 中国剩余定理的应用 .....                                              | ( 159 ) |
| 5.9 模是素数方幂的多项式同余式 .....                                          | ( 161 ) |
| 5.10 交叉分类原理 .....                                                | ( 164 ) |

|                                                   |         |
|---------------------------------------------------|---------|
| 5.11 简化剩余系的分解性 .....                              | ( 168 ) |
| <b>第五章习题</b> .....                                | ( 169 ) |
| <b>第六章 有限Abel群及其特征</b> .....                      | ( 173 ) |
| 6.1 定义 .....                                      | ( 173 ) |
| 6.2 群和子群的例 .....                                  | ( 174 ) |
| 6.3 群的基本性质 .....                                  | ( 174 ) |
| 6.4 子群的结构 .....                                   | ( 176 ) |
| 6.5 有限Abel群的特征 .....                              | ( 179 ) |
| 6.6 特征群 .....                                     | ( 181 ) |
| 6.7 特征的正交关系式 .....                                | ( 182 ) |
| 6.8 Dirichlet特征 .....                             | ( 184 ) |
| 6.9 含有Dirichlet特征的和 .....                         | ( 187 ) |
| 6.10 对于实的非主特征 $\chi$ , $L(1, \chi)$ 不等于零<br>..... | ( 189 ) |
| <b>第六章习题</b> .....                                | ( 192 ) |
| <b>第七章 算术级数里素数的Dirichlet定理</b><br>.....           | ( 197 ) |
| 7.1 引言 .....                                      | ( 197 ) |
| 7.2 形如 $4n-1$ 与 $4n+1$ 的素数的Dirichlet定理<br>.....   | ( 198 ) |
| 7.3 Dirichlet定理的证明方案 .....                        | ( 199 ) |
| 7.4 引理7.4的证明 .....                                | ( 202 ) |
| 7.5 引理7.5的证明 .....                                | ( 204 ) |
| 7.6 引理7.6的证明 .....                                | ( 206 ) |
| 7.7 引理7.8的证明 .....                                | ( 206 ) |
| 7.8 引理7.7的证明 .....                                | ( 207 ) |



|                                |                                                                  |         |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------|---------|
| 7.9                            | 算术级数里素数的分布.....                                                  | ( 208 ) |
| <b>第七章习题</b> .....             |                                                                  | ( 210 ) |
| <b>第八章 周期数论函数与Gauss和</b> ..... |                                                                  | ( 213 ) |
| 8.1                            | 模 $k$ 的周期函数 .....                                                | ( 213 ) |
| 8.2                            | 周期数论函数的有限Fourier级数的存在性<br>.....                                  | ( 214 ) |
| 8.3                            | Ramanujan和及其推广 .....                                             | ( 217 ) |
| 8.4                            | 和 $S_k(n)$ 的乘法性质.....                                            | ( 220 ) |
| 8.5                            | 与Dirichlet特征相伴的Gauss和.....                                       | ( 223 ) |
| 8.6                            | 具有非零Gauss和的Dirichlet特征.....                                      | ( 225 ) |
| 8.7                            | 诱导模与本原特征.....                                                    | ( 226 ) |
| 8.8                            | 诱导模的进一步的性质.....                                                  | ( 228 ) |
| 8.9                            | 特征的前导子.....                                                      | ( 231 ) |
| 8.10                           | 本原特征与可分的Gauss和 .....                                             | ( 232 ) |
| 8.11                           | Dirichlet特征的有限Fourier级数 .....                                    | ( 233 ) |
| 8.12                           | 本原特征部分和的Pólya不等式 .....                                           | ( 234 ) |
| <b>第八章习题</b> .....             |                                                                  | ( 236 ) |
| <b>第九章 二次剩余与二次互反律</b> .....    |                                                                  | ( 241 ) |
| 9.1                            | 二次剩余.....                                                        | ( 241 ) |
| 9.2                            | Legendre符号及其性质 .....                                             | ( 243 ) |
| 9.3                            | $\left(\frac{-1}{p}\right)$ 与 $\left(\frac{2}{p}\right)$ 的值..... | ( 245 ) |
| 9.4                            | Gauss引理 .....                                                    | ( 247 ) |
| 9.5                            | 二次互反律.....                                                       | ( 251 ) |
| 9.6                            | 互反律的应用.....                                                      | ( 254 ) |
| 9.7                            | Jacobi符号.....                                                    | ( 256 ) |

|                                       |                                               |         |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------|---------|
| 9.8                                   | 对Diophantu方程的应用 .....                         | ( 260 ) |
| 9.9                                   | Gauss和与二次互反律 .....                            | ( 262 ) |
| 9.10                                  | 二次Gauss和的互反律 .....                            | ( 267 ) |
| 9.11                                  | 二次互反律的另一个证明 .....                             | ( 274 ) |
| <b>第九章习题</b> .....                    |                                               | ( 275 ) |
| <b>第十章 原根</b> .....                   |                                               | ( 279 ) |
| 10.1                                  | 数的次数 $\text{mod } m$ , 原根 .....               | ( 279 ) |
| 10.2                                  | 原根与简化剩余系 .....                                | ( 280 ) |
| 10.3                                  | 对 $\alpha \geq 3$ , 模 $2^\alpha$ 的原根不存在 ..... | ( 281 ) |
| 10.4                                  | 对奇素数 $P$ , 模 $P$ 的原根存在 .....                  | ( 283 ) |
| 10.5                                  | 原根与二次剩余 .....                                 | ( 284 ) |
| 10.6                                  | 模 $p^\alpha$ 的原根存在 .....                      | ( 284 ) |
| 10.7                                  | 模 $2p^2$ 的原根存在 .....                          | ( 287 ) |
| 10.8                                  | 其他情况下原根不存在 .....                              | ( 288 ) |
| 10.9                                  | 模 $m$ 的原根的个数 .....                            | ( 289 ) |
| 10.10                                 | 指数的计算 .....                                   | ( 291 ) |
| 10.11                                 | 原根与Dirichlet特征 .....                          | ( 296 ) |
| 10.12                                 | 模 $p^\alpha$ 的实值Dirichlet特征 .....             | ( 299 ) |
| 10.13                                 | 模 $p^\alpha$ 的本原Dirichlet特征 .....             | ( 300 ) |
| <b>第十章习题</b> .....                    |                                               | ( 302 ) |
| <b>第十一章 Dirichlet级数与Euler乘积</b> ..... |                                               | ( 307 ) |
| 11.1                                  | 引言 .....                                      | ( 307 ) |
| 11.2                                  | Dirichlet级数绝对收敛的半平面 .....                     | ( 308 ) |
| 11.3                                  | 由Dirichlet级数定义的函数 .....                       | ( 309 ) |
| 11.4                                  | Dirichlet级数的乘积 .....                          | ( 312 ) |
| 11.5                                  | Euler乘积 .....                                 | ( 314 ) |

|                                                                   |                                       |         |
|-------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|---------|
| 11.6                                                              | Dirichlet级数收敛的半平面 .....               | ( 317 ) |
| 11.7                                                              | Dirichlet级数的解析性质 .....                | ( 320 ) |
| 11.8                                                              | 具有非负系数的Dirichlet级数 .....              | ( 323 ) |
| 11.9                                                              | Dirichlet级数表示为Dirichlet级数的指数<br>..... | ( 325 ) |
| 11.10                                                             | Dirichlet级数的平均值公式 .....               | ( 328 ) |
| 11.11                                                             | Dirichlet级数系数的一个积分公式 .....            | ( 331 ) |
| 11.12                                                             | Dirichlet级数部分和的一个积分公式<br>.....        | ( 332 ) |
| <b>第十一章习题</b> .....                                               |                                       | ( 338 ) |
| <b>第十二章 函数<math>\zeta(s)</math>与<math>L(s, \chi)</math></b> ..... |                                       | ( 343 ) |
| 12.1                                                              | 引言 .....                              | ( 343 ) |
| 12.2                                                              | gamma函数的性质 .....                      | ( 344 ) |
| 12.3                                                              | Hurwitz zeta函数的积分表示 .....             | ( 345 ) |
| 12.4                                                              | Hurwitz zeta函数的围道积分表示 .....           | ( 348 ) |
| 12.5                                                              | Hurwitz zeta函数的解析开拓 .....             | ( 351 ) |
| 12.6                                                              | $\zeta(s)$ 与 $L(s, \chi)$ 的解析开拓 ..... | ( 352 ) |
| 12.7                                                              | $\zeta(s, a)$ 的Hurwitz公式 .....        | ( 353 ) |
| 12.8                                                              | Riemann zeta函数的函数方程 .....             | ( 357 ) |
| 12.9                                                              | Hurwitz zeta函数的函数方程 .....             | ( 359 ) |
| 12.10                                                             | L-函数的函数方程 .....                       | ( 361 ) |
| 12.11                                                             | 求 $\zeta(-n, a)$ 的值 .....             | ( 364 ) |
| 12.12                                                             | Bernoulli数与Bernoulli多项式的性质<br>.....   | ( 366 ) |
| 12.13                                                             | $L(0, \chi)$ 的公式 .....                | ( 369 ) |
| 12.14                                                             | 用有限和逼近 $\zeta(s, a)$ .....            | ( 370 ) |

|                       |                                                                                        |         |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 12.15                 | $ \zeta(s, a) $ 的不等式                                                                   | ( 373 ) |
| 12.16                 | $ \zeta(s) $ 与 $ L(s, \chi) $ 的不等式                                                     | ( 376 ) |
| <b>第十二章习题</b>         |                                                                                        | ( 377 ) |
| <b>第十三章 素数定理的解析证明</b> |                                                                                        | ( 385 ) |
| 13.1                  | 证明的方案                                                                                  | ( 385 ) |
| 13.2                  | 引理                                                                                     | ( 387 ) |
| 13.3                  | $\frac{\Psi_1(x)}{x^2}$ 的围道积分表示                                                        | ( 391 ) |
| 13.4                  | 直线 $\sigma=1$ 附近 $ \zeta(s) $ 与 $ \zeta'(s) $ 的上界                                      | ( 394 ) |
| 13.5                  | 在直线 $\sigma=1$ 上 $\zeta(s)$ 不为零                                                        | ( 396 ) |
| 13.6                  | $\left  \frac{1}{\zeta(s)} \right $ 与 $\left  \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right $ 的不等式 | ( 398 ) |
| 13.7                  | 素数定理证明的完成                                                                              | ( 400 ) |
| 13.8                  | $\zeta(s)$ 的无零点区域                                                                      | ( 403 ) |
| 13.9                  | Riemann假设                                                                              | ( 406 ) |
| 13.10                 | 对除数函数的应用                                                                               | ( 407 ) |
| 13.11                 | 对Euler函数的应用                                                                            | ( 412 ) |
| 13.12                 | 特征和的Pólya不等式的推广                                                                        | ( 416 ) |
| <b>第十三章习题</b>         |                                                                                        | ( 417 ) |
| <b>第十四章 分拆</b>        |                                                                                        | ( 423 ) |
| 14.1                  | 引言                                                                                     | ( 423 ) |
| 14.2                  | 分拆的几何表示                                                                                | ( 427 ) |
| 14.3                  | 分拆的生成函数                                                                                | ( 427 ) |
| 14.4                  | Euler五边形数定理                                                                            | ( 431 ) |
| 14.5                  | Euler五边形数定理的组合证明                                                                       | ( 435 ) |
| 14.6                  | $P(n)$ 的Euler递推公式                                                                      | ( 438 ) |

|                     |                      |         |
|---------------------|----------------------|---------|
| 14.7                | $P(n)$ 的上界 .....     | ( 439 ) |
| 14.8                | Jacobi三重积等式 .....    | ( 442 ) |
| 14.9                | Jacobi等式的推论 .....    | ( 445 ) |
| 14.10               | 生成函数的对数微分 .....      | ( 446 ) |
| 14.11               | Ramanujan的分拆等式 ..... | ( 449 ) |
| <b>第十四章习题</b> ..... |                      | ( 450 ) |
| 参考文献目录 .....        |                      | ( 457 ) |
| 特殊符号索引 .....        |                      | ( 469 ) |

## 历史介绍

数论是数学的一个分枝，它研究整数的性质，

$1, 2, 3, 4, 5, \dots$

叫做计数数，或者正整数。

正整数无疑是人类的第一个数学创造，假如人们没有计数的能力，那简直是很难想象的，至少在一个有限的范围内。历史的记载证明，早在公元前5700年，古代的沙麦朗(Sumerina)人就有一部历书，所以他们一定掌握了一些算术知识。

公元前2500年沙麦朗人产生了一个以60为基的数系，他们早于巴比伦人成为有熟练计算能力的人。巴比伦人的墓碑中发现有精心制作的数学表格，其日期可追溯至公元前2000年。

当古代文化发展到一定水平时，人们有空闲时间去思考周围的事物，一些人开始去探索周围自然界与数的性质，这种好奇心发展为数字神秘主义或者数字学。甚至在今天，比如3、7、11和13这些数字仍是考虑运气好或坏的予兆。

系统地研究数以前至少有5000年，数字是用于保存记录和商业交往。第一个科学地对整数进行研究，即数论的真正起源，通常认为是希腊人。大约在公元前600年，毕达哥拉斯

(Pythagoras) 和他的门徒们对整数做过较彻底的研究, 他们最早以各种方法对整数进行分类:

偶数: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

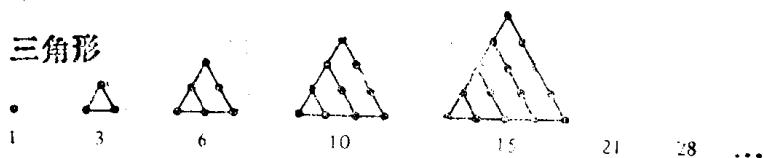
奇数: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

素数: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

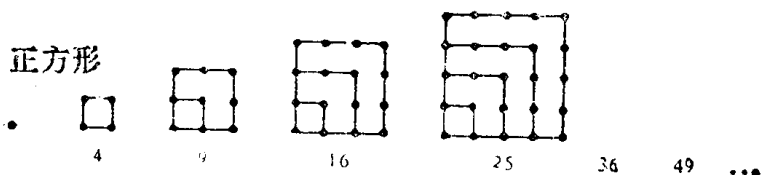
复合数: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, ...

素数是仅有约数 1 和自身的大于 1 的整数. 除去 1 既不是素数也不是复合数以外, 不是素数的整数称为复合数.

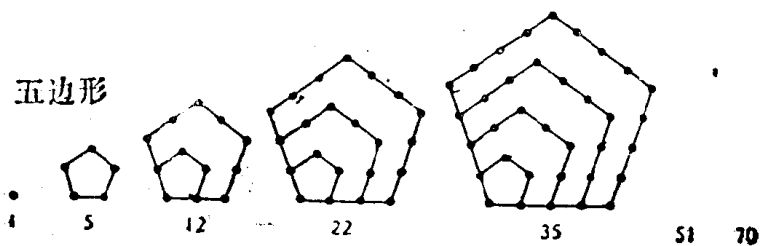
### 三角形



### 正方形



### 五边形

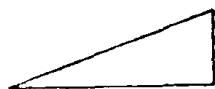


(图1.1)

Pythagoras还把数与几何图形联系起来，他创建了多边形数的思想：三角形数，正方形数，五边形数，等等。当然用三角形，正方形，五边形等图形上的点表示数时，这些几何名称的由来是显然的，如图1.1所示。

另一个与几何图形的联系来自著名的Pythagoras定理（我国称为勾股定理——译者），它说明，在任何一个直角三角形里，斜边长的平方是两直角边长的平方和（参看图1.2）。Pythagoras感兴趣的是边长都是整数的直角三角形，如图1.3那样的三角形。

现在称为Pythagoras三角形，对应的表示边长的三个数 $(x, y, z)$ 称为Pythagoras三数组。



$$x^2 + y^2 = z^2$$

(图1.2)

由大约在公元前1700年的巴比伦墓碑中发现有Pythagoras的一个大表格，其中一些数字相当的大。Pythagoras第一个给出了确定无穷多个三数组的方法，用现代的记号可表述如下：

令 $n$ 是任一大于1的奇数，并令

$$x=n, \quad y=\frac{1}{2}(n^2-1), \quad z=\frac{1}{2}(n^2+1).$$

这样产生的三数组 $(x, y, z)$ 始终是 $z=y+1$ 的Pythagoras三数组，下面有一些例子：

|   |   |    |    |    |    |    |     |     |     |
|---|---|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| x | 3 | 5  | 7  | 9  | 11 | 13 | 15  | 17  | 19  |
| y | 4 | 12 | 24 | 40 | 60 | 84 | 112 | 144 | 180 |
| z | 5 | 13 | 25 | 41 | 61 | 85 | 113 | 145 | 181 |

此外，还有其他一些Pythagoras三数组，例如：

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| x | 8  | 12 | 16 | 20 |
| y | 15 | 35 | 63 | 99 |

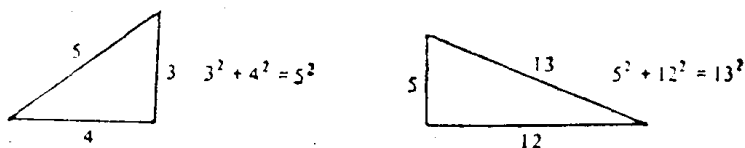


$$z \quad 17 \quad 37 \quad 65 \quad 101$$

在这些例子里， $z = y + 2$ 。Plato（公元前430—349年）发现了一个确定所有这些三数组的方法，用现代的记号可写为公式：

$$x = 4n, \quad y = 4n^2 - 1, \quad z = 4n^2 + 1.$$

大约在公元前300年，在数学史上发生一件重大事件，Euclid基本原理、一个包含有13卷书的书集发表了，它把数学由数字学转变为演绎推理学。Euclid是第一个把数学事实和这些事实的严格证明一起给出的人。



(图1.3)

13卷书中有3卷是专门介绍数论的（卷Ⅶ、Ⅷ和Ⅹ）。在卷Ⅷ里Euclid证明了有无穷多个素数存在。他的证明在现代的课堂里仍在讲授。在卷Ⅹ里他给出了得到全部Pythagoras三数组的一个方法，虽然他没有给出他的方法的任何证明。这个方法可概括为公式

$$x = t(a^2 - b^2), \quad y = 2tab, \quad z = t(a^2 + b^2),$$

其中 $t$ ， $a$ 和 $b$ 是任意正整数，满足 $a > b$ ， $a$ 与 $b$ 互素， $a$ 与 $b$ 一奇一偶。

Euclid还对Pythagoras提出的另一个问题——找出所有的完全数作出了重要贡献。数6叫做一个完全数，因为 $6 = 1 + 2 + 3$ ，即6等于它的所有真因子的和（即所有小于6的因数的和）。另一个完全数是28，因为 $28 = 1 + 2 + 4 + 7$