解析数论导引

Tom M·Apostol 著
唐太明 译
赵宏量 审校

西南师范大学出版社

解析数论导引

Tom M·Apostol 著
唐太明 译
赵宏量 审校

西南师范大学出版社
1992

解析数论导引

Tom M·Apostol著

唐太明 译

赵宏量 审校

西南师范大学出版社出版

（重庆 北碚）

新华书店重庆发行所经销

四川省内江新华印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张：15.25 字数：330千

1992年2月第一版 1992年2月第一次印刷

印数：1—1000册

*

ISBN 7—5621—0660—6/G·474

定价：4.10元

前　　言

本书根据Tom M·APostol所著《解析数论导引》译成，保持了原书的风格和内容。它适宜于具有高等微积分知识基础，但并不要求具备数论预备知识的大学本科生或研究使用。事实上，对本书来说，它的论述，可以说是完全不需要微积分知识的，然而对于水平较高的大学生学习本书也是十分有益的。

本书有目的选择了具有一定广度和深度的课目，例如有的在华罗庚著《数论导引》中未加论证的，在此也作了证明；其中还列出了吸引历代专业和业余数学家的问题及其解法技巧等；在这里也进行了讨论，可能会使许多数学系学生产生特殊的兴趣。

本书的初稿由唐太明译出，在编辑加工中，由西南师大数学系赵宏量对照原文进行了审校和加工，并对全书作了统稿和技术处理。相信本书的出版会受到我国广大数学专业家和业余爱好者的欢迎，用它作为大学本科生和研究生的教材，也是十分相宜的。

编　审　者

1991年10

目　录

历 史 介 绍

数论是数学的一个分枝，它研究整数的性质，

1，2，3，4，5，…

叫做计数数，或者正整数.

正整数无疑是人类的第一个数学创造，假如人们没有计数的能力，那简直是很难想象的，至少在一个有限的范围内．历史的记载证明，早在公元前5700年，古代的沙麦朗(Sumerina)人就有一部历书，所以他们一定掌握了一些算术知识.

公元前2500年沙麦朗人产生了一个以60为基的数系，他们早于巴比伦人成为有熟练计算能力的人．巴比伦人的墓碑中发现有精心制作的数学表格，其日期可追溯至公元前2000年.

当古代文化发展到一定水平时，人们有空闲时间去思考周围的事物，一些人开始去探索周围自然界与数的性质，这种好奇心发展为数字神秘主义或者数字学．甚至在今天，比如3、7、11和13这些数字仍是考虑运气好或坏的予兆.

系统地研究数以前至少有5000年，数字是用于保存记录和商业交往．第一个科学地对整数进行研究，即数论的真正起源，通常认为是希腊人．大约在公元前600年，毕达哥拉斯

（Pythagoras）和他的门徒们对整数做过较彻底的研究，他们最早以各种方法对整数进行分类：

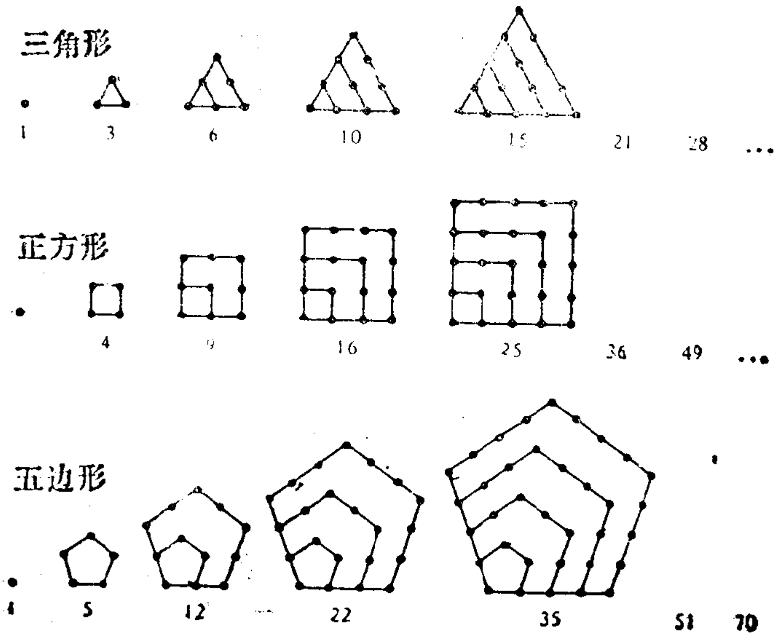
偶数：2，4，6，8，10，12，14，…

奇数：1，3，5，7，9，11，13，15，…

素数：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97，…

复合数：4，6，8，9，10，12，14，15，16，18，20，….

素数是仅有约数1和自身的大于1的整数．除去1既不是素数也不是复合数以外，不是素数的整数称为复合数．



（图1.1）

Pythagoras还把数与几何图形联系起来，他创建了多边形数的思想：三角形数，正方形数，五边形数，等等．当然用三角形，正方形，五边形等图形上的点表示数时，这些几何名称的由来是显然的，如图1.1所示．

另一个与几何图形的联系来自著名的Pythagoras定理（我国称为勾股定理——译者），它说明，在任何一个直角三角形里，斜边长的平方是两直角边长的平方和（参看图1.2）．Pythagoras感兴趣的是边长都是整数的直角三角形，如图1.3那样的三角形现在称为Pythagoras三角形，对应的表示边长的三个数(x，y，z)称为Pythagoras三数组．

（图1.2）

由大约在公元前1700年的巴比伦墓碑中发现有Pythagoras的一个大表格，其中一些数字相当的大．Pythagoras第一个给出了确定无穷多个三数组的方法，用现代的记号可表述如下：

令n是任一大于1的奇数，并令

$$x=n,\quad y=\frac{1}{2}(n^2-1),\quad z=\frac{1}{2}(n^2+1).$$

这样产生的三数组(x，y，z)始终是z＝y＋1的Pythagoras三数组，下面有一些例子：

x	3	5	7	9	11	13	15	17	19
y	4	12	24	40	60	84	112	144	180
z	5	13	25	41	61	85	113	145	181

此外，还有其他一些Pythagoras三数组，例如：

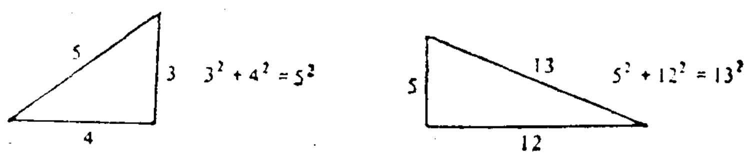
x	8	12	16	20
y	15	35	63	99

z   17   37   65   101

在这些例子里，$z=y+2$. Plato（公元前430—349年）发现了一个确定所有这些三数组的方法，用现代的记号可写为公式：

$$x=4n,\ y=4n^2-1,\ z=4n^2+1.$$

大约在公元前300年，在数学史上发生一件重大事件，Euclid基本原理、一个包含有13卷书的书集发表了，它把数学由数字学转变为演绎推理学. Enclid是第一个把数学事实和这些事实的严格证明一起给出的人.



（图1.3）

13卷书中有3卷是专门介绍数论的（卷Ⅶ、Ⅸ和Ⅹ）. 在卷Ⅸ里Euclid证明了有无穷多个素数存在. 他的证明在现代的课堂里仍在讲授. 在卷Ⅹ里 他给出了得到全部Pythagoras三数组的一个方法，虽然他没有给出他的方法的任何证明. 这个方法可概括为公式

$$x=t(a^2-b^2),\ y=2tab,\ z=t(a^2+b^2),$$

其中t，a和b是任意正整数，满足$a>b$，a与b互素，a与b一奇一偶.

Euclid还对Pythagoras提出的另一个问题——找出所有的完全数作出了重要贡献. 数6叫做一个完全数，因为$6=1+2+3$，即6等于它的所有的真因子的和（即所有小于6的因数的和）. 另一个完全数是28，因为$28=1+2+4+7$