工程试验理论

GONGCHENG SHI
YAN LI LUN

安徽科学技术出版社

工程试验理论

程曙霞　编著

安徽科学技术出版社

（皖）新登字02号

责任编辑：田　斌
封面设计：赵　玄

工程试验理论

程曙霞　编著
安徽科学技术出版社出版
（合肥市九州大厦八楼）
邮政编码：230063
安徽省出版总社激光照排服务部照排
安徽省新华书店经销　　巢湖地区印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：12　字数：310 000
1992年5月第1版　　1992年5月第1次印刷
印数：1 150
ISBN 7－5337－0564－5/TK·1　　定价：8.90元

前　言

科学实验是一切自然科学的基础，也是科学理论的源泉。它的根本任务就是认识自然现象的客观规律，以便能动地改造客观世界。

诚然，科学实验的具体方法各式各样，途径也千差万别，但它们均需在某些基本理论的指导下，才能预期地完成。众所周知，任何科学实验总要定量地测定有关物理量，确定其精确度并寻求各物理量间本质上的联系，这就必须掌握误差理论及实验数据的数学处理方法；在实验中，被测定的物理量往往需要变换为易于测量、记录和分析的信号，同时要借助仪器去检测、分析并处理这些信号，这就必须了解测量系统的基本特性；任何实验总希望尽量减少参与实验的参变量的数目，以便提高效率，也总希望通过廉价简单的模型试验，去揭示复杂的物质现象的本质，这就必须掌握相似理论及因次分析原理；任何实验总要尽力控制试验因素，尽可能消除外界无关的变量对试验结果的影响，因此需要事先提出优化的试验方案，以便能用最少的试验工作量获取最大限度的有用的试验数据，这就必须掌握试验设计的数学方法。

总之，本书所阐述的工程试验的基本理论包括：误差理论及实

验数据处理方法;测量系统的基本特性;相似理论及因次分析原理以及试验设计的数学方法。虽然上述内容均已分别散见于各种专著之中,但为了给读者提供一个完整的、系统而又简明的介绍,便于他们能在较短的时间内学到这些知识,并用于解决实际的工程试验问题,编写这本书仍然是很有必要的。在编写过程中,参考了国内外有关书籍、资料和教材,其中部分内容从 1985 年秋季开始在中国科学技术大学工程热物理系硕士研究生及高年级本科生中讲授过,几年来,根据教学和科研实践,陆续作了增删与改写。

本书可作为高等院校理工科学生及研究生的教材,也可供教师、工程技术人员及科研人员阅读参考。

由于编者水平有限,难免有不妥之处,恳请读者批评指正。

编　　者

1989 年 2 月

目　　录

第一章 随机变量及其基本的处理方法

众所周知，即使使用完全相同的测量仪器，在完全相同的实验条件下，重复观测同一个物理量，每次测量的结果也决不会完全相同。这种测量的随机性可能是由于测量的随机误差的存在，也可能是起因于物理现象本身的随机性质。总之，提供给我们的测量结果是一些带有偶然性的随机量。对这些随机量进行处理和解释，寻找在偶然性掩盖下的规律性，就必须应用随机量的数学。这一章所阐述的是如何描写随机变量以及处理随机变量的基本方法。

第一节 随机变量

1.1.1 什么是随机变量

在一定试验条件下，某现象 A 可能发生，也可能不发生，并且只有发生或不发生这样两种可能性，我们将发生了现象 A 的事件称为随机事件 A。可以各用一个数来分别表示各个随机事件，称这个数为随机数，记为 x_i。随机事件的集合就是这些随机数的集合。它们构成了随机事件的函数，称这个函数为随机变量，记为 X。事实上，并非任何一种随机事件的函数都可以叫做随机变量。随机变量只是随机事件的单值实函数，随机变量所有可能值所对应的全部随机事件应该构成一个互斥事件的完备集。换言之，随机数出现

的概率就是相应于它的随机事件出现的概率；随机变量的值落入某个区间内的概率就是这个区间所对应的那些随机事件的和事件的概率。

如果随机变量的取值是不连续的，即它只能取有限个或可数个数值，则称这种类型的随机变量为离散型随机变量。例如，合格产品与废品的取值即是一例。如果随机变量可能的获取值布满某个区间或整个数轴，则称它为连续型随机变量。例如，测量中的随机误差，分子运动速度……等。

总之，随机变量是试验科学所要处理的对象，它不同于算术、代数与数学分析中所处理的量，后者在一定条件下取某个确定的数值，而前者在一定条件下可能取无限多个可能值，它是以一定的可能性取这些数值的。因而，随机变量不是一个数，而是具有一定概率分布的一堆数。

1.1.2 如何描述随机变量

只用一个单独的数值显然不能代表一个随机变量，即使列举出随机变量的全部可能值，仍然不能算是完全地描述了一个随机变量。完整地掌握一个随机变量，必须了解它取各种可能值的概率，即必须了解随机变量的概率分布。

随机变量 X 的概率分布可以用分布函数 $P(X)$ 来表示。分布函数在 x 处的值，等于随机变量 X 取值小于或等于 x 这样一个随机事件的概率，记为 $P_r(X\leqslant x)$：

$$P(x)\equiv P_r(X\leqslant x) \tag{1.1}$$

显然，任何一个分布函数都必须满足

$$P(x=-\infty)=0, P(x=\infty)=1 \tag{1.2}$$

离散型随机变量 X 只能取可数的数值 $x(x=x_1,x_2,\cdots\cdots)$。除了分布函数外还可以用概率函数 $p(x)$ 来描述它的概率分布。概率函数在某一点 x 处的值等于随机变量 X 取值 x 的概率，即

$$p(x) \equiv P_r(X=x) \tag{1.3}$$

由分布函数和概率函数的定义，它们之间有下列关系：

$$P(x)=\sum_{x_i \leqslant x} p(x_i) \tag{1.4}$$

式中 $\sum\limits_{x_i \leqslant x}$ 表示对所有满足 $x_i \leqslant x$ 的 x_i 求和，

$$p(x_i)=P(x_i)-P(x_{i-1}) \tag{1.5}$$

并且

$$\sum_x p(x)=P(x=\infty)=1 \tag{1.6}$$

式中 $\sum\limits_x$ 表示对所有可以取的 x 值求和。

类似地，对于连续型随机变量 X，可以定义概率密度函数

$$p(x) \equiv \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.7}$$

下面的式子可以说明概率密度函数的意义：

$$P_r(x<X \leqslant x+\mathrm{d}x)=\mathrm{d}P(x)=p(x)\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

上面的等式应该从极限的意义来理解，即

$$p(x)=\lim_{\triangle x \to 0} \frac{P_r(x<X \leqslant x+\triangle x)}{\triangle x} \tag{1.9}$$

概率密度函数在某一点的值是随机变量在该点的概率密度，随机变量的值落入该点附近一个无限小区间内的概率，等于该点的概率密度和区间长度的乘积。

概率密度函数和分布函数的关系还可以写成

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\mathrm{d}x \tag{1.10}$$

且有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x=P(x=\infty)=1 \tag{1.11}$$

式(1.6)和(1.11)叫做归一化条件，任何概率函数或概率密度函数都必须满足归一化条件。

概率密度函数曲线是一条连续曲线，密度曲线图在横轴上任

何一点左边曲线下的面积就是分布函数在该点的值。由于归一化条件，密度曲线下的总面积为 1，分布函数曲线是一条单调上升到 1 的曲线，见图 1.1。

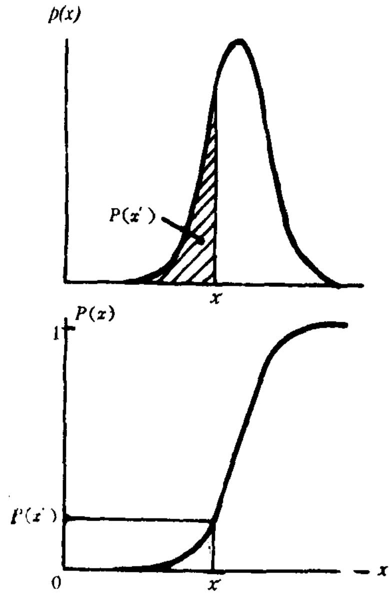

图 1.1　连续型随机变量的概率密度函数和分布函数

已知一个随机变量 X 的概率密度函数或分布函数，就可以计算 X 的值落入某一区间$[a,b]$内的概率，即随机事件在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 的概率是

$$\begin{aligned} P_r(a\leqslant X\leqslant b) &= P(x=b)-P(x=a) \\ &= \int_a^b p(x)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.12}$$

X 的值落入区间$[a,b]$内的概率 $P_r(a\leqslant X\leqslant b)$，叫做随机变量 X 在区间$[a,b]$内的概率含量，也就是 X 在$[a,b]$区间内的概率密度曲线下的面积。

通常，将随机变量 X 具有概率（密度）函数 $p(x)$，说成随机变量 X 服从分布 $p(x)$，简记为

$$X \sim p(x) \tag{1.13}$$

如果随机变量 Y 是随机变量 X 的函数，即

$$y=f(x)$$

则 Y 的概率密度函数 $p(y)$ 可以由 X 的概率密度函数 $p(x)$ 导出。下列定理证明了这一点。

定理 1.1　如果 y 是随机变量 Y 的取值，x 是随机变量 X 的取值，X 与 Y 之间成单调函数 $y=f(x)$ 的关系，并且 $Y\sim p(y)$，$X\sim p(x)$，则

$$p(y)=\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|p(x(y)) \tag{1.14}$$

证：若 $y=f(x)$ 是单调增函数，则由数学分析知它的反函数 $x=g(y)$ 也必是单调增函数。显然，当且仅当事件 $X<x=g(y)$ 发生时，事件 $Y<y$ 才发生，可见随机变量 Y 的分布函数 $P(y)$ 为

$$\begin{aligned}P(y)&=P_r[Y<y]=P_r[X<x=g(y)]\\&=\int_{-\infty}^{g(y)}p(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

上式两边对 y 求导，则

$$p(y)=p(g(y))g'(y)=p(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

同理可证，若 $y=f(x)$ 是单调减函数，则当且仅当 $X>x=g(y)$ 发生时，$Y<y$ 才发生，于是

$$\begin{aligned}P(y)&=P_r[Y<y]=P_r[X>x=g(y)]\\&=\int_{g(y)}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$p(y)=-p(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

这时 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}<0$，可见，无论 $y=f(x)$ 是单调增函数还是减函数，均有

$$p(y)=\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|p(x)$$

如果 $y=f(x)$ 不是单调函数，如图 1.2 所示。

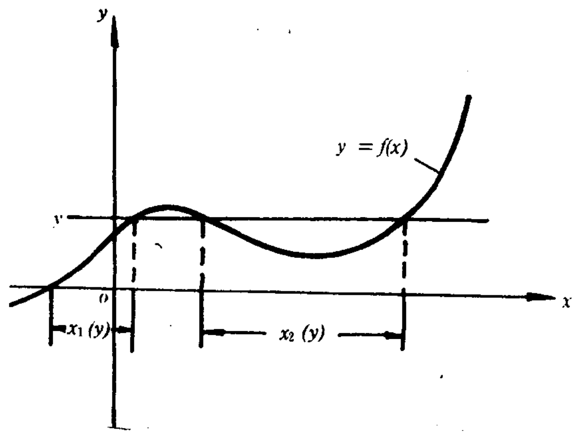

图 1.2　$y=f(x)$ 非单调函数

显然，因事件 $Y<y$ 当且仅当互不相容事件 $X\in x_1(y)$，$X\in x_2(y)$，$X\in x_3(y)\cdots$ 之一发生时才发生，这里 $X\in x_i(y)$，$i=1,2\cdots\cdots$，表示随机变量 X 落在区间 $x_i(y)$ 内。按概率加法定理，我们有

$$\begin{aligned}P(y)=P_r[Y<y]&=\sum_i P_r[X\in X_i(y)]\\&=\sum_i\int_{x_i(y)}p(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故
$$p(y)=\sum_i\left|\frac{\mathrm{d}x_i(y)}{\mathrm{d}y}\right|p[x_i(y)]\tag{1.15}$$

1.1.3　随机变量分布的数字特征量

随机变量有各种各样不同形式的分布。显然，要从随机变量的观测数据求出分布函数是困难的，但计算出具有共同定义的随机变量分布的数字特征量却是方便的。这些特征量的定义与随机变

量的分布形式无关，它包括数学期望值，方差及协方差。

（一）数学期望

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $p(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称该积分为 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x \tag{1.16}$$

显然数学期望值是随机变量概率密度曲线面积的重心位置。随机变量围绕期望值取值。对于单峰对称的密度曲线，期望值就是曲线峰值的位置，利用这个直观概念，则对于具有正态分布的随机变量的期望值应有 $E(X)=\mu$。

对于离散型随机变量，则

$$E(X)=\sum_{x} xp(x) \tag{1.17}$$

显然，数学期望具有如下运算规则：

(1)设 C 为常数，则　　$E(C)=C$　　(1.18)

(2)设 X 是随机变量，C 是常数，则

$$E(CX)=CE(X) \tag{1.19}$$

(3)设 X 与 Y 是任意两个随机变量，则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \tag{1.20}$$

这一性质可推广到任意有限个随机变量的和的情况。

(4)设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，则

$$E(X\times Y)=E(X)\times E(Y) \tag{1.21}$$

这一性质可推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情况。

（二）方差

设 X 是一个随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称 $E\{[X-E(X))]^2\}$ 为 X 的方差，记为 $\sigma^2(X)$，即

$$\sigma^2(X)=E\{[X-E(X)]^2\} \tag{1.22}$$

根据概率论中的有关定理，可以证明若已知连续型随机变量 X 的

概率密度为 $p(x)$，则

$$\sigma^2(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[X-E(X)]^2 p(x)\mathrm{d}x \tag{1.23}$$

方差具有如下运算规则：

(1)设 C 为常数，则

$$\sigma^2(C)=0 \tag{1.24}$$

(2)设 C 为常数，X 是一个随机变量，则

$$\sigma^2(CX)=C^2\sigma^2(X) \tag{1.25}$$

(3)设 X、Y 是两个随机变量，且相互独立，则

$$\sigma^2(X+Y)=\sigma^2(X)+\sigma^2(Y) \tag{1.26}$$

这个规则可以推广至任意有限个随机变量的情况。

不难理解，期望值和方差的数值可以对随机变量分布的位置和分布宽度给出一个粗略的描绘，虽然它们不可能严格地确定随机变量的分布。

（三）协方差和相关系数

对于二维随机变量 (X,Y)，除了讨论 X 与 Y 的数学期望和方差外，还需讨论描述 X 与 Y 之间相互关系的数字特征——协方差和相关系数。称量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 为随机变量 X 与 Y 的协方差，记为

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)]\times[Y-E(Y)]\} \tag{1.27}$$

而

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \tag{1.28}$$

被称为随机变量 X 与 Y 的相关系数或标准协方差。

协方差具有如下运算规则：

(1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$。 (1.29)

(2) $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$（式中 a,b 为常数）。 (1.30)

(3) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$。 (1.31)

显然，当 X 与 Y 相互独立时，

$$Cov(X,Y)=0 \tag{1.32}$$

于是 $\rho_{XY}=0$，这时，称 X 与 Y 不相关，可见，当 X 与 Y 相互独立时，它们必定不相关。

此外，利用上述期望值，方差及协方差的有关运算规则，可以证明下列定理。

定理 1.2　若 C 是常数，则

$$E[(X-C)^2]=\sigma^2(X)+[C-E(X)]^2 \tag{1.33}$$

证

$$E[(X-C)^2]=E\{[X-E(X)]^2+[C-E(X)]^2 -2[X-E(X)]\times[C-E(X)]\}$$

由于 $[X-E(X)]$ 与 $[C-E(X)]$ 相互独立，故

$$E[(X-C)^2]=\sigma^2(X)+(C-E(X))^2$$

特别地，当 $C=0$，则

$$\sigma^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \tag{1.34}$$

定理 1.3　若 X 和 Y 是两个随机变量，则

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y) \tag{1.35}$$

证

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\ &= E[XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)] \\ &= E[XY]-E(X)E(Y) \end{aligned}$$

1.1.4　随机变量的特征函数

随机变量 x[1] 的特征函数 $\varphi_x(t)$ 被定义为

$$\varphi_x(t)=E(e^{itx}) \qquad (i=\sqrt{-1})$$

对于连续型随机变量，则有

---

[1] 从现在起，不再区分 X 与 x，x 既可代表一个随机变量，又可代表随机变量的一个取值。