线性平稳时间序列的自相关分析

安 鸿 志

目　　录

1 引 言 (1)
2 样本自协方差、自相关和偏相关函数的简单性质 (3)
3 样本值的各阶矩的性质 (6)
4 样本值的渐近分布 (11)
5 样本值的一致收敛速度 (23)

淮北煤炭师范学院学报编辑部

1988 年 5 月 10 日

前　　言

线性平稳时间序列的自相关分析，是时间序列分析中的最基本的内容之一。它包括自相关（或自协方差）函数和偏相关函数的估计，以及这些估计的各种渐近性质，比如，各阶矩的渐近性质，渐近正态分布和一致收敛速度等。到八十年代初，对这些内容的研究，已达到比较成熟的阶段。在这篇综合性文章中，作者将系统地介绍在这领域中的近代结果，其中也包括自己的某些成果。在这篇文章里，不仅为读者提供了比较完整的理论结果，而且介绍了许多有用的技巧和方法。这些内容是研究时间序列分析中大样本理论的基础。

应广大同行们的要求，我们把1988年第1，2两期学报上发表的该文的抽印本合订成册发行。由于水平和印刷条件的限制，不妥之处在所难免，望方家指正。

淮北煤炭师范学院学报编辑部

1988 年 4 月 10 日

第9卷第1期　　淮北煤师院学报　　Vol.9 No.1
JOURNAL OF
1988年3月　　HUAIBEI COAL TEACHERS COLLEGE　　March 1988

线性平稳序列的自相关分析

安鸿志

（中国科学院应用数学研究所）

摘　　要

本文的目的在于，对于线性平稳时间序列的样本、自协方差、自相关和偏相关函数的渐近性质，给出一个比较系统的描述。以下内容将是被论及到的，上述样本函数的矩的性质，渐近正态分布，强相容性和几乎处处收敛的速度等。我们将给出在上述诸方面的某些重要的新的成果，这些结果都是在时间序列分析的文献中被建立起来的，与此同时，我们还对其中比较深的结果给出详细的数学推导。文中的绝大部分内容，都曾做为硕士研究生的时间序列课程的一部分被使用过。

关键词： 线性平稳时间序列；样本自协方差、自相关和偏相关函数；样本函数的矩；渐近正态分布；几乎处处收敛；几乎处处收敛的速度。

1　引　言

所谓线性平稳序列，系指

$$x(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\varepsilon(t-j)\qquad \alpha_0=1,\ \sum\alpha_j^2<\infty \tag{1}$$

其中$\varepsilon(t)$是i.i.d的平稳列，且$E\varepsilon(t)=0$，$E\varepsilon^2(t)=\sigma^2$。但是，我们可使用以下更强的假定

$$x(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\varepsilon(t-j)\qquad \alpha_0=1,\sum|\alpha_j|<\infty \tag{2}$$

其中$\varepsilon(t)$如前所述。

在近代的时间序列分析中，我们将要给出的一些主要定理，都能推广到平稳鞅差过程，即用条件：

$$E[\varepsilon(t)|F_{t-1}]=0,\qquad E[\varepsilon^2(t)|F_{t-1}]=\sigma^2\qquad a.s.$$

代替对$\varepsilon(t)$为i.i.d的假定。有的时候，上式中的第二条限制也可以去掉。注意，第二条性质是比较强的限制。由于推广到鞅差列的情况时，涉及比较多的，较新的离散鞅的极限理论，因此，在本讲义中暂时放弃这一推广。

在我们的讲义中，根据平稳序列$x(t)$的有穷样本$x(1)$，$x(2)$，…，$x(N)$，估计其自协方差函数列$\gamma(k)=Ex(t)x(t+k)$采用以下公式

$$\hat{\gamma}(k)=\hat{\gamma}(-k)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}x(t)x(t+k)\qquad k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{3}$$

1987年11月20日收到来稿。

在此，我们把$Ex(t)=0$当做已知值，而不采用

$$\hat{\gamma}(k)=\hat{\gamma}(-k)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}[x(t)-\overline{X}][x(t+k)-\overline{X}]$$

式中$\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}x(t)$。后者属于带回归项的时间序列分析理论。根据不太复杂的推论，我们将要证明的主要结果，对于$Ex(t)=m\neq0$，和用后一式$\hat{\gamma}(k)$时，也都成立。本文也不去逐一叙述。

另外，本文不用以下估计

$$\hat{\gamma}^{*}(k)=\frac{1}{N-k}\sum_{t=1}^{N-k}x(t)x(t+k)\qquad k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{3'}$$

其原因将在下文中论述

按照自相关函数$\rho(k)$的定义，我们自然采用估计$\hat{\rho}(k)$为

$$\hat{\rho}(k)=\hat{\gamma}(k)/\hat{\gamma}(0)\qquad k=1,2,\cdots,N-1$$

如果$\hat{\gamma}(0)=0$时，应当说$\hat{\rho}(k)$没有定义。关于在什么条件下$\hat{\rho}(k)$有定义，将在下一节讨论。

按照偏相关函数的定义，自然地取

$$\hat{\phi}(k)=\hat{\Gamma}_{k}^{-1}\hat{b}_{k} \tag{4}$$

式中

$$\hat{\Gamma}=\begin{pmatrix}\hat{\gamma}(0) & \cdots & \hat{\gamma}(k-1)\\ \vdots & \hat{\gamma}(0) & \vdots\\ \hat{\gamma}(k-1) & \cdots & \hat{\gamma}(0)\end{pmatrix}\qquad \hat{b}_{k}=\begin{pmatrix}\hat{\gamma}(1)\\ \vdots\\ \hat{\gamma}(k)\end{pmatrix}$$

$$\hat{\phi}(k)=(\hat{\varphi}_{k1},\hat{\varphi}_{k2},\cdots,\hat{\varphi}_{kk})$$

其中$\{\hat{\varphi}_{kk}\}$为偏相关序列的估计。上式中诸量，当以$\gamma(k)$代替$\hat{\gamma}(k)$时，相应的值为真值，不言自明，它们是$\phi(k)$，Γ_{k}和b_{k}，且有

$$\phi(k)=\Gamma_{k}^{-1}b_{k} \tag{5}$$

同样，关于$\hat{\Gamma}_{k}$的可逆性也在下一节讨论。

上述的各种估计量，均称为相应之量的样本值，比如$\hat{\gamma}(k)$称为样本自协方差函数。

关于$\phi(k)$和$\hat{\phi}(k)$存在着熟知的逆推公式：（如见〔1〕第二章§2,p.61）

$$\begin{cases}\phi_{11}=\rho(1)\\ \varphi_{k+1\,k+1}=[\rho(k+1)-\sum_{j=1}^{k}\rho(k+1-j)\varphi_{kj}][1-\sum_{j=1}^{k}\rho(j)\phi_{kj}]^{-1}\\ \phi_{k+1,j}=\phi_{kj}-\phi_{k+1,k+1}\phi_{k,k+1-j}\qquad j=1,2,\cdots,k\end{cases} \tag{6}$$

上式对$\hat{\phi}(k)$也对，即将上式诸量均用$\hat{\rho}(k)$、$\hat{\phi}_{kj}$等代替。这里不再重新写出。

在〔1〕中我们看到，平稳自回归滑动平均序列（简称ARMA）序列）是特殊的线性平稳序列，所以，本讲义的主要结果对这些序列当然适用。一般地说，这些结果也是时间序列分析中的基础性的结果，尤其是在时域分析中，它们的作用更为重要。在这里，我们并不去讨论它们的作用，也不去统计ARMA模型。但是，在下文中要提到ARMA序列的定义和一些最简单的表达形式，今列举如下。

ARMA（p，q）序列x（t）满足以下模型：

$$x(t)-\varphi_1 x(t-1)-\varphi_2 x(t-2)-\cdots-\varphi_p x(t-p)=\varepsilon(t)-\theta_1\varepsilon(t-1)-\cdots-\theta_q\varepsilon(t-q) \qquad (7)$$

式中$\varepsilon(t)$为i.i.d的平稳列，$E\varepsilon(t)=0$，$E\varepsilon^2(t)=\sigma^2$，而且

$$1-\sum_{j=1}^{p}\varphi_j z^j\neq 0, \qquad 1-\sum_{j=1}^{q}\theta_j z^j\neq 0, \qquad 对一切|z|\leqslant 1,$$

从而x（t）可以表达成$\varepsilon(t)$的无穷线性和的形式

$$x(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j\varepsilon(t-j), \qquad \varphi_0=1, \qquad |\varphi_j|\leqslant ae^{-\beta j}$$

式中a和β是正常的。系数φ_j由以下恒等式决定，

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j z^j=\left(1-\sum_{j=1}^{q}\theta_j z^j\right)\left(1-\sum_{j=1}^{p}\varphi_j z^j\right)^{-1}$$

或者

$$\left(1-\sum_{j=1}^{p}\varphi_j z^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j z^j\right)=\left(1-\sum_{j=1}^{q}\theta_j z^j\right)$$

由此可见，当$p>0$，且$\varphi_p\neq 0$时，系数φ_j永远不会在某个j_0以后全为零值。

1　样本自协方差、自相关和偏相关函数的简单性质

首先讨论样本自协方差函数列$\hat{\gamma}(k)$的某些简单性质。按照$\hat{\gamma}(k)$的定义（3）式知

$$\sum_{k=-N+1}^{N-1}\hat{\gamma}(k)e^{ik\lambda}=\frac{1}{N}\left|\sum_{s=1}^{N}x(s)e^{is\lambda}\right|^2=2\pi I(\lambda)\geqslant 0 \quad a.s. \qquad (1.1)$$上

式中I（λ）称为x（t）的周期图，它是频域分析中的重要统计量。（1.1）式明确表达了样本自协方差函数列与I（λ）的关系。为了进一步分析$\hat{\gamma}(k)$的性质，不妨令

$$\hat{\gamma}(k)=0 \qquad 当|k|\geqslant N$$

于是

$$I(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{\gamma}(k)e^{ik\lambda}$$

我们知道，对于线性平稳序列而言，只要$\sum|\gamma(k)|<\infty$，则x（t）的谱密度必连续，且

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma(k)e^{ik\lambda}$$

由此可见，$I(\lambda)$是$f(\lambda)$的一种统计估计量。由（1）式可知，$\hat{\gamma}(k)$ $k=0,1,2,\cdots$为一非负定序列，因为对任意实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k a_j \hat{\gamma}(k-j)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k a_j \int_{-\pi}^{\pi} I(\lambda) e^{i(k-j)\lambda} d\lambda$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} I(\lambda)\left|\sum_{j=1}^{n} a_j e^{ij\lambda}\right|^2 d\lambda \geqslant 0$$

又依定义知，$\hat{\gamma}(k)=\hat{\gamma}(-k)$。这些事实说明，序列$\hat{\gamma}(k)$（$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）是一个自协方差函数列。但是，对于在前言中提到的$\hat{\gamma}^*(k)$，它就不具有上述的非负定性。

上面论述了$\hat{\gamma}(k)$的非负定性，即对任何n，

$$\hat{\Gamma}_n=\begin{pmatrix} \hat{\gamma}(0) & \cdots & \hat{\gamma}(n-1) \\ \vdots & \hat{\gamma}(0) & \vdots \\ \hat{\gamma}(n-1) & \cdots & \hat{\gamma}(0) \end{pmatrix} \geqslant 0 \qquad \text{a.s.}$$

但是，对于（2）式所决定平稳序列$x(t)$，只要$\sigma^2>0$，由它的自协方差函数列$\gamma(k)$所构成的Γ_n总是满秩的，从而

$$\Gamma_n=\begin{pmatrix} \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \vdots & \gamma(0) & \vdots \\ \gamma(n-1) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix} > 0$$

这样人们自然希望$\hat{\Gamma}_n>0$成立，至少也应当在几乎处处的意义下成立。我们分析$\hat{\Gamma}_n>0$成立的条件。令

$$Z_n=\begin{pmatrix} x(1), & x(2), & \cdots, & x(N), & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & x(1), & x(2), & \cdots, & x(N), & 0, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & x(1), & x(2), & \cdots, & x(N) \end{pmatrix}_{n\times(N+\cdots}$$

并用X_n^{τ}表示X_n的转置，于是

$$\hat{\Gamma}_n=\frac{1}{N}X_n X_n^{\tau}\geqslant 0 \qquad \text{a.s.} \tag{1.2}$$

依$x(t)$的平稳性可知，$\hat{\Gamma}_n>0$（a.s.成立）的充分必要条件是：$P(x(1)=0)=0$。同时这也是$\hat{\gamma}(0)>0$的充要条件。从$\hat{\rho}(k)$和$\hat{\phi}_{kk}$的定义知，$\hat{\Gamma}_n>0$和$\hat{\gamma}(0)>0$(a.s.)又是保证$\hat{\rho}(k)$和$\hat{\phi}_{kk}$依概率为1地有意义的充要条件。因此，我们将介绍以下的定理。

定理1.1 设x（t）为满足（2）式的平稳序列，那么，如果（2）式中的α_j有无穷多个为非零值，则必有$P(x(t)=0)=0$；如果（2）式中的$\varepsilon(t)$的分布函数是连续的，无论α_j的值如何，也必有$P(x(t)=0)=0$。

证明 定理的前半部分是〔4〕中定理2的推论，定理的后半部分是〔4〕中定理1的推论。

上述定理告诉我们，对于ARMA（p，q）序列x（t），当$p>0$，$|\varphi_p|\neq 0$时，其分布总为连续，从而$P(x(t)=0)=0$，当x（t）为均值非零的ARMA（p，q）序列时，$\hat{\gamma}(k)$采用引言中（3）式下边的公式定义时，用本定理的结果，也可以获得$\hat{\gamma}(0)>0$，$\hat{\Gamma}_n>0$（a.s.）的结果。这里我们略去详细的讨论。

下面讨论$\hat{\rho}(k)$，$\hat{\phi}_{kk}$的样本性质。定理1.1只给出了$P(x(0)=0)=0$的充分条件，所以在以下的定理中，我们还是以$P(x(t)=0)=0$为前提条件。首先，在$P(x(t)=0)=0$的条件下，$\hat{\rho}(k)$的定义总有意义，而且易见

$$|\hat{\rho}(k)|\leqslant 1 \qquad \text{a.s.} \tag{1.3}$$

依前述论证，还有

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}(1) & \cdots & \hat{\rho}(n) \\ \hat{\rho}(1) & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \hat{\rho}(1) \\ \hat{\rho}(n) & \cdots & \hat{\rho}(1) & 1 \end{pmatrix}>0 \qquad \text{a.s.} \tag{1.4}$$

关于$\hat{\phi}(k)$的性质，有以下定理。

定理1.2 若x（t）为平稳线性序列，而且$P(x(t)=0)=0$，那么，

$$|\hat{\phi}_{kj}|<2^{k-1} \qquad j=1,2,\cdots,k-1 \qquad \text{a.s.} \tag{1.5}$$

$$|\hat{\phi}_{kk}|<1 \qquad \text{a.s.} \tag{1.6}$$

证明 在定理条件下，$\hat{\Gamma}_k>0$（a.s.）。于是

$$0<\det\hat{\Gamma}_k=\det\begin{pmatrix}\hat{\gamma}(0) & \hat{b}_{k-1}^{\tau} \\ \hat{b}_{k-1} & \hat{\Gamma}_{k-1}\end{pmatrix}=\det\hat{\Gamma}_{k-1}\ \det(\hat{\gamma}(0)-\hat{b}_{k-1}^{\tau}\hat{\Gamma}_{k-1}^{-1}\hat{b}_{k-1})$$

再由$\det\hat{\Gamma}_{k-1}>0$知，对每个$k>1$，

$$\hat{\gamma}(0)-\hat{b}_{k-1}^{\tau}\hat{\Gamma}_{k-1}^{-1}\hat{b}_{k-1}>0 \quad \text{a.s.}$$

等价地有

$$1-\sum_{j=1}^{k}\hat{\rho}(j)\hat{\varphi}_{kj}>0 \qquad \text{a.s.} \qquad k\geqslant 1,$$

利用引言中的公式（6），计算

$$\left[1-\sum_{j=1}^{k}\widehat{\rho}(j)\widehat{\varphi}_{kj}\right]^2-\left[\widehat{\rho}(k+1)-\sum_{j=1}^{k}\widehat{\rho}(k+1-j)\widehat{\varphi}_{kj}\right]^2$$

$$=\left[1-\sum_{j=1}^{k}\widehat{\rho}(j)\widehat{\varphi}_{kj}\right]\left\{\left[1-\sum_{j=1}^{k}\widehat{\rho}(j)\widehat{\varphi}_{kj}\right]-\widehat{\varphi}_{k+1\ k+1}\left[\widehat{\rho}(k+1)-\sum_{j=1}^{k}\widehat{\rho}(k+1-j)\widehat{\varphi}_{kj}\right]\right\}$$

$$=\left[1-\sum_{j=1}^{k}\widehat{\rho}(j)\widehat{\varphi}_{kj}\right]\left[1-\widehat{\varphi}_{k+1\ k+1}\widehat{\rho}(k+1)+\sum_{j=1}^{k}\widehat{\rho}(j)(\widehat{\varphi}_{k+1\ k+1}\widehat{\varphi}_{k\ k+1-j}-\widehat{\varphi}_{kj})\right]$$

$$=\left[1-\sum_{1}^{k}\widehat{\rho}(j)\widehat{\varphi}_{kj}\right]\left[1-\sum_{j=1}^{k+1}\widehat{\rho}(j)\widehat{\varphi}_{k+1\ j}\right]>0\qquad a.s.$$

从而有

$$\left[1-\sum_{1}^{k}\widehat{\rho}(j)\widehat{\varphi}_{kj}\right]^2>\left[\widehat{\rho}(k+1)-\sum_{1}^{k}\widehat{\rho}(k+1-j)\widehat{\varphi}_{kj}\right]^2\qquad a.s.$$

此式意味着

$$|\widehat{\varphi}_{kk}|<1\qquad a.s.\qquad k\geqslant 1\tag{1.7}$$

现在证明定理的其余部分。对$k=1$,

$$|\widehat{\varphi}_{kj}|\leqslant 2^{k-1}\qquad a.s.\qquad j=1,\tag{1.8}$$

显然成立。对$k=2$,

$$|\widehat{\varphi}_{k1}|=|\widehat{\varphi}_{11}-\widehat{\varphi}_{22}\widehat{\varphi}_{11}|\leqslant|\widehat{\varphi}_{11}|+|\widehat{\varphi}_{22}||\widehat{\varphi}_{11}|$$
$$<1+1=2=2^{2-1}\qquad a.s.$$

定理也成立。利用引言中（6）式和（1.7）,用归纳法可证明

$$|\widehat{\varphi}_{kj}|<2^{k-1}\qquad a.s.\qquad j=1,2,\cdots,k-1。$$

定理证毕。

2　样本值的各阶矩的性质

本节我们研究前一节的各类样本值的误差量的各阶矩的渐近性质。在本讲义中，常用“～”表示样本值与相应真值的差值，比如$\widetilde{\gamma}(k)=\widehat{\gamma}(k)-\gamma(k)$，$\widetilde{\rho}(k)=\widehat{\rho}(k)-\rho(k)$等等。类似的量，不再一一加以说明，在下文中不言自明。

首先讨论$\widehat{\gamma}(k)$的各阶矩。

定理2.1　若$x(t)$为由（2）式决定的线性平稳序列，而且$E\varepsilon^2(t)=\sigma^2<\infty$那么

$$E\,\widehat{\gamma}(k)=\gamma(k)-\frac{k}{N}\gamma(k)\tag{2.1}$$

$$E\,|\widetilde{\gamma}(k)|\longrightarrow 0\qquad \text{当}N\to\infty\text{时},\tag{2.2}$$

证明　定理的第一式是显然的。现在证明第二式。我们只证明$k=0$的情况，其它情况类似。易见

$$\widehat{\gamma}(0)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_i\alpha_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{i,j}]$$

式中$\delta_{i,j}=0$当$i\neq j$，$\delta_{i,i}=1$。由此可知

$$E|\widehat{\gamma}(0)|\leqslant\sum_{i,j=0}^{\infty}|\alpha_i\alpha_j|E\frac{1}{N}\left|\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{i,j}]\right|$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j^2\ E\frac{1}{N}\left|\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon^2(t-j)-\sigma^2]\right|+\sum_{i\neq j}^{\infty}\alpha_i\alpha_j\ E\frac{1}{N}\left|\sum_{t=1}^{N}\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)\right|$$

$$=\frac{1}{N}E\left|\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon^2(t)-\sigma^2]\right|\left(\sum_{0}^{\infty}\alpha_j^2\right)+S(N)$$

上式的S（N）表示前式的第二项求和，其中第一项所给出的形式是利用平稳性得到 的。

现在令$\xi_t=\varepsilon^2(t)-\sigma^2$，依$E\varepsilon^2(t)<\infty$知，$E|\xi_t|<\infty$。用截尾技巧，令

$$\overline{\xi}_t=\begin{cases}\xi_t & \text{当}|\xi|\leqslant M\\ 0 & \text{当}|\xi|>M\end{cases}$$

又令$\widetilde{\xi}_t=\xi_t-\overline{\xi}_t$， 于是

$$E\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\{\varepsilon(t)-\sigma^2\}\leqslant\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}E|\widetilde{\xi}_t|+\frac{1}{N}E\left|\sum_{t=1}^{N}\overline{\xi}_t\right|$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}E|\widetilde{\xi}_1|+E\frac{1}{N}\left|\sum_{t=1}^{N}\overline{\xi}_t\right|$$

$$=E|\overline{\xi}_1|+E\frac{1}{N}\left|\sum_{t=1}^{N}\overline{\xi}_t\right|$$

利用控制收敛定理和强大数律，以及$E\xi_t=E\overline{\xi}_t+E\widetilde{\xi}_t=0$可得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}E\left|\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t)-\sigma^2]\right|\leqslant E|\widetilde{\xi}_1|+\lim_{N\to\infty}E\frac{1}{N}\left|\sum_{1}^{N}\overline{\xi}_t\right|$$

$$=E|\widetilde{\xi}_1|+E\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left|\sum_{1}^{N}\overline{\xi}_t\right|$$

$$=E|\widetilde{\xi}_1|+|E\overline{\xi}_1|=E|\widetilde{\xi}_1|+|E\widetilde{\xi}_1|\leqslant 2E|\widetilde{\xi}_1|$$

由于$E|\xi_1|<\infty$，故尔取M适当大可知$E|\widetilde{\xi}_1|$任意小，于是由上式可知

$$E\frac{1}{N}\left|\sum_{1}^{N}(\varepsilon^2(t)-\sigma^2)\right|\to 0\qquad\text{当}N\to\infty\text{时，}$$

当$i\neq j$时，

$$E\left|\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)\right|\leqslant\left\{\frac{1}{N^2}\sum_{t=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}E\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)\varepsilon(s-i)\varepsilon(s-j)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{N^2}N\sigma^4\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sigma^2}{\sqrt{N}}$$

由此立刻得到

$$E|\tilde{\gamma}(0)|\to 0 \qquad \text{当}N\to\infty\text{时，}$$

定证2.2 在定理2.1的条件下，若$E\varepsilon^4(t)=\mu_4<\infty$，那么

$$E\tilde{\gamma}(n)\tilde{\gamma}(m)=\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\gamma(k+n)\gamma(k+m)+\gamma(k+n)\gamma(k-m)]+\frac{1}{N}\frac{\mu_4-3\sigma^4}{\sigma^4}\gamma(n)\gamma(m)$$

$$+O\left(\frac{1}{N}\right) \tag{2.3}$$

证明从略。这是熟知的Bartlett公式（如见[2]）

定理2.3 在定理2.1的条件下，若$E\varepsilon^{4b}(t)=\mu_{4b}<\infty$，（b是某一正整数）。那么，

$$E|\tilde{\gamma}(n)|^k=O(N^{-\frac{k}{2}})\ \text{当}k<2b+1 \tag{2.4}$$

又若$P(x(t)=0)=0$，则还有

$$E|\tilde{\rho}(n)|^k=O(N^{-\frac{k}{2}}) \qquad \text{当}k<2b+1 \tag{2.5}$$

证明 先对$k=2m$，$n=0$的情况证明（2.4）式。此时

$$\tilde{\gamma}(0)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j^2\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)-\sigma^2]+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{\infty}\alpha_i\alpha_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)$$

$$=S_1(N)+S_2(N) \tag{2.6}$$

上式中$S_1(N)$和$S_2(N)$分别代表中式的两项求和。

令

$$\xi_i(t)=\varepsilon^2(t-i)-\sigma^2$$

$$y_i(t)=\sum_{s=1}^{t}\xi_i(S)$$

F_t为使$\varepsilon(s-i)$（$s\leqslant t$）可测的最小σ域。易见，$y_i(t)$对F_t而言是鞅列。依Burkholder不等式（如见[6]11.2，定理1，p.384）。

$$E|y_i(N)|^{2m}=E\left|\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon^2(t-i)-\sigma^2]\right|^{2m}\leqslant K_mE\left(\sum_{s=1}^{N}\xi_i^2(s)\right)^m$$

$$=K_m\sum_{s_1,s_2,\cdots,s_m=1}^{N}E[\xi_i^2(s_1)\xi_i^2(s_2)\cdots\xi_i^2(s_m)]$$

$$\leqslant K_m\sum_{s_1,s_2,\cdots,s_m=1}^{N}[E\xi_i^{2m}(s_1)E\xi_i^{2m}(s_2)\cdots E\xi_i^{2m}(s_m)]^{1/m}$$

$$=K_mN^m\cdot E\xi_0^{2m}(1)=K_mE[\varepsilon^2(1)-\sigma^2]^{2m}N^m$$

$$=C_mN^m$$

式中K_m，C_m为与m有关的常数。由此可知

$$E\left\{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon^2(t-i)-\sigma^2]\right\}^{2m}=E[\frac{1}{N}y_i(N)]^{2m}\leqslant C_m N^{-m}$$

从而

$$ES_1^{2m}(N)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{2m}=0}^{\infty}\alpha_{i1}\alpha_{i2}\cdots\alpha_{i2m}E[\frac{1}{N^{2m}}y_{i1}(N)y_{i2}(N)\cdots y_{i2m}(N)]$$

$$\leqslant(\sum_{i=0}^{\infty}|\alpha_i|)^{2m}\frac{1}{N^{2m}}Ey_0^{2m}(N)$$

$$=C_m(\sum_0^{\infty}|\alpha_j|)^{2m}\cdot N^{-m}=O(N^{-m}) \tag{2.7}$$

同理可证明：

$$E\,S_2^{2m}(N)=O(N^{-m}) \tag{2.8}$$

利用（2.6）（2.7）（2.8）式可得

$$E\tilde{\gamma}(0)^{2m}\leqslant\{(ES_1^{2m}(N))^{1/2m}+(ES_2^{2m}(N))^{1/2m}\}^{2m}=O(N^{-m})$$

对于$n\neq0$的情况，证明基本相同。对于$k=2m+1$的情况，易见

$$E|\tilde{\gamma}(k)|^k=E|\tilde{\gamma}(k)|^{2m+1}\leqslant[E(\tilde{\gamma}(k))^{2m}E\tilde{\gamma}(k)^{2m+2}]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant O(N^{\frac{-m}{2}})O(N^{\frac{-m-1}{2}})=O(N^{\frac{-k}{2}})$$

最后，根据条件$P(x(t)=0)=0$知$|\hat{\rho}(k)|\leqslant1$（a.s.），再根据

$$\tilde{\rho}(n)=\hat{\rho}(n)-\rho(n)=\frac{\hat{\gamma}(n)}{\hat{\gamma}(0)}-\frac{(\gamma n)}{\gamma(0)}=\frac{\hat{\gamma}(n)}{\hat{\gamma}(0)}-\frac{\hat{\gamma}(n)}{\gamma(0)}+\frac{\hat{\gamma}(n)}{\gamma(0)}-\frac{\gamma(n)}{\gamma(0)}$$

$$=\frac{1}{\gamma(0)}[\tilde{\gamma}(n)-\hat{\rho}(n)\tilde{\gamma}(0)]$$

$$\leqslant\frac{1}{\gamma(0)}[|\tilde{\gamma}(n)|+|\tilde{\gamma}(0)|] \tag{2.9}$$

由上式和（2.4）式立刻知（2.5）式成立。

定理2.4 在定理2.1的条件下，若$P(x(t)=0)=0$，$E\varepsilon^8(t)<\infty$，则对任意$0<n\leqslant m<\infty$有，

$$E\tilde{\rho}(n)\tilde{\rho}(m)=\frac{1}{N}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\{\rho(l+n)\rho(l+m)+\rho(l+n)\rho(l-m)+2\rho^2(l)\rho(n)\rho(m)$$

$$-2[\rho(n)\rho(l)\rho(l-m)+\rho(m)\rho(l)\rho(l-n)]\}+0(\frac{1}{N}) \tag{2.10}$$

证明 注意用（2.9）式可得

$$\tilde{\rho}(n)=\frac{1}{\gamma(0)}[\tilde{\gamma}(n)-\hat{\rho}(n)\tilde{\gamma}(0)]=\frac{1}{\gamma(0)}[\tilde{\gamma}(n)-\rho(n)\tilde{\gamma}(0)]-\frac{1}{\gamma(0)}\tilde{\rho}(n)\tilde{\gamma}(0)$$

$$\tilde{\rho}(m)=\frac{1}{\gamma(0)}[\tilde{\gamma}(m)-\rho(m)\tilde{\gamma}(0)]-\frac{1}{\gamma(0)}\tilde{\rho}(m)\tilde{\gamma}(0)$$

由此可知

$$E\tilde{\rho}(n)\tilde{\rho}(m)=\frac{1}{\gamma(0)^2}\{E\,\tilde{\gamma}(n)\,\tilde{\gamma}(m)-\rho(n)\,E\tilde{\gamma}(0)\tilde{\gamma}(m)$$

$$-\rho(m)E\tilde{\gamma}(0)\,\tilde{\gamma}(n)+\rho(n)\rho(m)E\,\tilde{\gamma}(0)\,\tilde{\gamma}(0)\}$$

$$-\frac{1}{\gamma(0)^2}\{E\,\tilde{\gamma}(n)\,\tilde{\rho}(m)\,\tilde{\gamma}(0)+\cdots+E\tilde{\rho}(m)\,\tilde{\gamma}(n)\,\tilde{\gamma}(0)\,\tilde{\gamma}(0)\}\qquad(2.11)$$

上式中第二项的每个加项都至少含有三个因子，由定理2.3知，第二项是 $O(N^{-3/2})$阶的。仅举一例如下：

$$E\,\tilde{\gamma}(n)\,\tilde{\rho}(m)\,\tilde{\gamma}(0)\leqslant\{E[\,\tilde{\gamma}(0)\,\tilde{\gamma}(n)\,]^2E\tilde{\rho}^2(m)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant(E\tilde{\gamma}^4(0)E\tilde{\gamma}^4(n))^{\frac{1}{4}}(E\tilde{\rho}^2(m))^{\frac{1}{2}}$$

$$=O(N^{-1})O(N^{-\frac{1}{2}})=O(N^{-\frac{3}{2}})$$

再用定理2.2的结果代入（2.11）式的首项，不难验明（2.10）式成立

现在，再补充两点说明。首先，在正态情况下，(2.3)式的第二项为零，因为此时$\mu_4=3\sigma^4$。但是，无论正态与否，（2.10）式总适用。还须指出，（2.11）式成立的前提条件$P(x(t)=0)=0$和$E\varepsilon^8(t)<\infty$，虽然可以放宽一些，但是却不能没有。条件$\Sigma|\alpha_j|<\infty$可以适当放宽，这些细微的讨论，不去一一列举。

最后，简单讨论一下$\tilde{\phi}(k)$的各阶矩。与讨论$\tilde{\rho}(n)$时一样，此时有

$$\tilde{\phi}(k)=\hat{\phi}(k)-\phi(k)=\hat{\Gamma}_k^{-1}\hat{b}_k-\Gamma_k^{-1}b_k$$

$$=\hat{\Gamma}_k^{-1}\hat{b}_k-\Gamma_k^{-1}\hat{b}_k+\Gamma_k^{-1}\hat{b}_k-\Gamma_k^{-1}b_k$$

$$=\Gamma_k^{-1}[\tilde{b}_k-\tilde{\Gamma}_k\hat{\phi}(k)]$$

$$=\Gamma_k^{-1}[\tilde{b}_k-\tilde{\Gamma}_k\phi(k)]-\Gamma_k^{-1}\tilde{\Gamma}_k\tilde{\phi}(k)$$

$$=\Gamma_k^{-1}H_k\tilde{d}_k-\Gamma_k^{-1}\tilde{\Gamma}_k\tilde{\phi}(k)\qquad(2.12)$$

式中

$$d_k^{\tau}=(\tilde{\gamma}(0),\tilde{\gamma}(1),\cdots,\tilde{\gamma}(k))$$

H_k是$k\times(k+1)$阶矩阵，其元素由恒等式

$$\tilde{b}_k-\tilde{\Gamma}_k\phi(k)=H_k\tilde{d}_k$$

唯一决定。若令

$$H_k=(h_{jl})_{\substack{0\leq l\leq k\\1\leq j\leq k}},$$

易验明：

$$h_{j0}=-\varphi_{kj}\qquad j=1,2,\cdots,k$$

再记　$\varphi_{k0}=-1$，$\varphi_{ks}=0$，对$s<0$和$s>k$，则又有

$$h_{jl}=\varphi_{k\,j-l}-\varphi_{k\,j+l}\qquad j=1,2,\cdots,k\qquad =1,2,\cdots,k$$

总结上述可得定理2.5如下：

定理2.5　在定理2.4的条件下，有

$$\mathbf{E}\widetilde{\phi}(k)\widetilde{\phi}^{\tau}(k)=\Gamma_k^{-1}H_k\mathbf{E}(\widetilde{d}_k\widetilde{d}_k^{\tau})H_k^{\tau}\Gamma_k^{-1}+0(N^{-1})\tag{2.13}$$

式中$\mathbf{E}\widetilde{d}_k\widetilde{d}_k^{\tau}$的元素可由定理2.2给出。

关于$\widetilde{\phi}(k)$的高价矩的性质，依（2.12）式和定理1.2知，定理2.3的后半部分对$\widetilde{\phi}(k)$也适用。这里不再用定理形式给出。

3　样本值的渐近分布

在这一小节里，我们讨论各类样本值的渐近正态分布性质。首先讨论$\widetilde{\gamma}(0)$，$\widetilde{\gamma}(1)$，…，$\widetilde{\gamma}(n)$的联合分布的渐近正态性。为此须要引进有限步依赖的平稳序列概念。

定义3.1　随机序列$\{x(t)\}$称为m步依赖的，如果$r+m<s$时，$\{\cdots x(r-2),x(r-1),x(r)\}$与$\{x(s),x(s+1),\cdots\}$是相互独立的。

如果$x(t)$是二阶平稳序列，且为m步依赖的，$\mathbf{E}x(t)=0$，$\mathbf{E}x^2(t)=r(0)<\infty$，我们令

$$\Lambda=\mathbf{E}x^2(t+m)+2\sum_{s=1}^{m}\mathbf{E}x(t+m-s)x(t+m)$$

于是，对$n>m$时有

$$\mathbf{E}\left[\sum_{s=1}^{n}x(s+t)\right]^2=\mathbf{E}\left[\sum_{s=1}^{n-1}x(s+t)+x(n+t)\right]^2$$

$$=\mathbf{E}\left[\sum_{s=1}^{n-1}x(s+t)\right]^2+\Lambda=\cdots$$

$$=\mathbf{E}\left[\sum_{s=1}x(s+t)\right]^2+(n-m)\Lambda\tag{3.1}$$

引理3.1　若随机变量序列ξ_n的分布收敛于分布$F(x)$；η_n依概率趋于常数a，那么

〈i〉　$\xi_n\pm\eta_n$的分布收敛于$F(x\mp a)$；

〈ii〉　$\xi_n\eta_n$的分布收敛于$F(x/a)$；　　（当$a>0$时）；

$\xi_n\eta_n$的分布收敛于$1-F(x/a)$；　　（当$a<0$时，而且$F(\bar{x})$为连续的）；

〈iii〉ξ_n/η_n的分布收敛于$F(ax)$　　（当$a>0$时）

ξ_n/η_n的分布收敛于$1-F(ax)$　　（当$a>0$时，且$F(x)$为连续的）。

证明从略（如参见〔1〕附录§2引理3，p.292）。

引理3.2　设X_n为随机矢量序列，其分布收敛于多维正态分布$N(0,G)$；η_n依概率收敛于常数$a>0$，那么，η_nX_n的分布收敛于正态$N(0,a^2G)$。

证明从略（如参见〔1〕附录§2推论，p.293）。

定理3.1　设$\xi(t)$为m步依赖的二阶平稳序列，且$\mathbf{E}\xi(t)=0$，那么

$$\xi_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\xi(t)\sim N(0,A) \tag{3.2}$$

证明 记$K_n=[n^{1/5}]$，$L_n=[n/k_n]$，这里$[\cdot]$表示取整数部分。为了简化记号，用K，L分别代替K_n，L_n易见

$$n=K\cdot L+r$$

这里的r也与n有关，但是$0\leqslant r<k$。令

$$S_n=\sum_{t=1}^{n}\xi(t)=\sum_{j=1}^{k}\xi(j)+\sum_{j=1}^{k}\xi(k+j)+\cdots+\sum_{j=1}^{k}\xi((L-1)k+j)+\sum_{j=1}^{n-LK}(LK+j)$$

不妨设$K>m$（因为$K\to\infty$）。又记

$$\sum_{j=1}^{k}\xi(ik+j)=\sum_{j=1}^{k-m}\xi(ik+j)+\sum_{j=k-m+1}^{k}\xi(ik+j)=u_i(n)+v_i(n) \tag{3.3}$$

式中$u_i(n)$，$v_i(n)$分别代表式中的两个求和项。于是

$$S_n=\sum_{i=0}^{L-1}u_i(n)+\sum_{i=0}^{L-1}v_i(n)+\sum_{t=L\cdot K+1}^{n}\xi(t)$$

$$=S_n'+V_n+T_n \tag{3.4}$$

式中S_n'，V_n，T_n分别代表上式的三个求和项。

易见，

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{n}}V_n\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{L-1}EV_i^2(n)=n^{-1}\cdot L\cdot Ev_1^2(n)$$

$$=n^{-1}\cdot L\cdot E\Big(\sum_{j=1}^{m}\xi(j)\Big)^2=O(n^{-1}\cdot n^{4/5})\to 0$$

从而$\frac{1}{\sqrt{n}}V_n$也依概率趋于零，依引理3.1知，V_n项不影响$\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$的渐近分布。依同样推理可知，T_n也是如此。于是，只须证明$\frac{1}{\sqrt{n}}S_n'$有渐近正态分布$N(0,A)$。

注意

$$\frac{1}{\sqrt{K\cdot L}}S_n'=\sum_{i=0}^{L-1}u_i(n)\Big/\sqrt{K\cdot L}=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{i=0}^{L-1}u_i(n)\Big/\sqrt{K}$$

式中$u_i(n)/\sqrt{K}$对不同的i为相互独立，相同分布的随机变量。为了证明S_n'的中心极限定理成立，只须验证$u_i(n)/\sqrt{K}$满足Lindeberger条件。即对任给的$\varepsilon>0$，验证

$$\sum_{i=0}^{L-1}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}x^2dF_i(x)=L\int_{|x|\geqslant\varepsilon}x^2dF_i(x)$$

$$=L\cdot E\left(\frac{u_0(n)}{\sqrt{KL}}\right)^2 I\left[\left|\frac{u_0(n)}{\sqrt{K\cdot L}}\right|\geqslant\varepsilon\right]\to 0 \qquad \text{当}n\to\infty \tag{3.5}$$

式中$I[\cdot]$表示示性函数，F_i表示$u_i(n)/\sqrt{K\cdot L}$的分布函数。下面往证上式成立。

$$L\cdot E\left(\frac{u_0(n)}{\sqrt{KL}}\right)^2 I\left[\left|\frac{u_0(n)}{\sqrt{K\cdot L}}\right|\geqslant\varepsilon\right]$$

$$=\frac{1}{K}E\{(\sum_{j=1}^{k-m}\xi(j))^2 I[|\sum_{j=1}^{k-m}\xi(j)|\geqslant\sqrt{K\cdot L}\varepsilon]\}$$

$$=\frac{1}{K}\sum_{i=1}\sum_{j=1}^{k-m}E\{\xi(i)\xi(j)I[|\sum_{j=1}^{k-m}\xi(j)|\geqslant\sqrt{K\cdot L}\varepsilon)\} \tag{3.6}$$

对于（3.6）式中$i=j$的求和项，利用ξ（t）的平稳性和m步依赖性可得

$$\frac{1}{K}\sum_{i=}\sum_{j=1}^{k-m}E\xi^2(i)I[|\sum_{j=1}^{k-m}\xi(j)|\geqslant\sqrt{K\cdot L}\varepsilon]$$

$$\leqslant\frac{1}{K}\sum_{i=m+1}^{k-2m}E\xi^2(i)I[|\sum_{j=1}^{k-m}\xi(j)|\geqslant\sqrt{K\cdot L}\varepsilon]+\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{m}E\xi^2(i)+\frac{1}{K}\sum_{i=k-2m+1}^{k-m}E\xi^2(i)$$

$$=\frac{1}{K}\sum_{i=m+1}^{k-2m}E\xi^2(i)\{I[|\sum_{j=i-m}^{i+m}\xi(j)|\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon]+I[|\sum_{j=1}^{i-m-1}\xi(j)|\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon]$$

$$+I[|\sum_{j=i+m+1}^{k-m}\xi(j)|\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon]\}+O(\frac{1}{K})$$

$$=\frac{1}{K}(K-3m)E\xi^2(m+1)I[|\sum_{j=1}^{2m}\xi(j)|\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon]$$

$$+\frac{1}{K}\sum_{i=m+1}^{k-2m}E\xi^2(1)\quad P(|\sum_{j=1}^{i-m+1}\xi(j)|\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon)$$

$$+\frac{1}{K}\sum_{i=m+1}^{k-2m}E\xi^2(1)P(|\sum_{j=i+m+1}^{k-m}\xi(j)|\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon)+O(\frac{1}{K})$$

$$\leqslant E\xi^2(m+1)I[|\sum_{i=1}^{2m}\xi(j)|\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon]$$

$$+\frac{1}{K}\xi^2(1)\sum_{i=m+1}^{k-2m}\cdot E(\sum_{j=1}^{i-m+1}\xi(j))^2(\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon)^{-2}$$

$$+\frac{1}{K}E\xi^2(1)\sum_{i=m+1}^{k-2m}E(\sum_{j=i+m+1}^{k-m}\xi(j))^2(\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon)^{-2}+O(\frac{1}{K}) \tag{3.7}$$

再用$\xi(t)$是m步依赖的，又是平稳的，且$E\xi^2(1)<\infty$，易见

$$E[\sum_{j=i+m+1}^{k-m}\xi(j)]^2=O(K)\qquad \text{对}i\text{是一致成立，} \tag{3.8}$$

从而又有

$$(3.7)\text{式右边}\leqslant E\xi^2(m+1)I[|\sum_{j=1}^{2m}\xi(j)|\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon]+O(\frac{1}{L})+O(\frac{1}{K})$$

又由

$$E\xi^2(m+1)I\left[\left|\sum_{j=1}^{2m}\xi(j)\right|\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon\right]\leqslant E\xi^2(m+1)<\infty,$$

则

$$E\xi^2(m+1)I\left[\left|\sum_{j=1}^{2m}\xi(j)\right|\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{K\cdot L}\varepsilon\right]\to 0 \quad 当n\to\infty$$

从而

(3.7)式右边$\leqslant o(1)+O\left(\frac{1}{K}\right)+O\left(\frac{1}{L}\right)\to 0 \quad$ 当$n\to\infty$

对于(3.6)式中满足$0<|i-j|<2m$求和项,同样可以证明类似结果。

最后，为要证明(3.6)式右边趋于零，还须指出，(3.6)式中对$|i-j|>2m$ 的求和趋于零值。这是从以下事实得出的，用许瓦兹不等式和(3.8)式可得

$$\left|E\xi(i)\xi(j)I\left[\left|\sum_{\tau=1}^{k-m}\xi(\tau)\right|\geqslant\sqrt{K\cdot L}\varepsilon\right]\right|$$

$$\leqslant\left\{E\xi^2(i)\xi^2(j)\,EI\left[\left|\sum_{\tau=1}^{k-m}\xi(\tau)\right|\geqslant\sqrt{K\cdot L}\varepsilon\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=O(1/\sqrt{L}) \tag{3.9}$$

注意，在(3.6)式右边的求和中，满足$|i-j|>2m$ 的项不超过$(K-m)^2$ 项。根据(3.9)式，这些项的总和具有以下的阶数

$$\frac{(k-m)^2}{K}O(1/\sqrt{L})=O(k/\sqrt{L})=O\left(\frac{n^{1/5}}{n^{2/5}}\right)$$
$$=O(n^{-1/5})\to 0$$

综上所述，无论$i-j=0$，$0<|j-i|\leqslant 2m$，还是$|i-j|>2m$ 的情况，(3.6)式中的求和都趋于零，于是

$$\frac{1}{\sqrt{K\cdot L}}S_n'\sim N(0,\ A)$$

其中

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{L\cdot K}\sum_{i=0}^{L-1}Eu_i^2(n)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{K}Eu_0^2(n)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{K}E\left[\sum_{j=1}^{k-m}\xi(j)\right]^2$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left\{E\left[\sum_{j=1}^{m}\xi(j)\right]^2+(K-2m)A\right\}\frac{1}{K}$$

又由

$$\frac{K\cdot L}{n}=1+\frac{r}{n}\to 1,$$

和引理3.1知

$$\frac{1}{n}S_n'\sim N(0,\ A)$$

定理证毕。

定理3.2 设$x(t)$为由(2)式给出的线性平稳序列，而且$\alpha_j=0$对$j\geqslant q$，即

$$x(t)=\sum_{j=0}^{q}\alpha_j\varepsilon(t-j)$$

如果$E\varepsilon^4(t)=\mu_4<\infty$，那么，对任意正态数n，

$$\sqrt{N}\left(\tilde{\gamma}(0),\tilde{\gamma}(1),\cdots,\tilde{\gamma}(n)\right)^{\tau}\sim N(0,G)$$

其中G的元素为

$$g_{ij}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\gamma(l+i)\gamma(l+j)+\gamma(l+i)\gamma(l-j)\right]+\frac{\mu_4-3\sigma^4}{\sigma^4}\gamma(i)\gamma(j)$$

$$i,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n \qquad (3.10)$$

证明 令t_0，t_1，…，t_n为$n+1$个实数，且

$\xi(t)=t_0[x^2(t)-\gamma(0)]+t_1[x(t)x(t+1)-\gamma(1)]+\cdots+t_n[x(t)x(t+n)-\gamma(n)]$显然，$\xi(t)$是$q+n$步依赖的平稳序列，且$E\,\xi(t)=0$，$E\xi^2(t)<\infty$。利用前一定理知，

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=1}^{N}\xi(t)\sim N(0,A_{\ell})$$

其中

$$A_{\ell}=E\xi^2(t+m)+2\sum_{s=1}^{m}\xi(t+m-S)\xi(t+m)=E\xi^2(t)+2\sum_{j=1}^{m}\xi(t)\xi(t+j)$$

这里$m=q+n$于是

$$A_{\ell}=E\left[\xi(t)\sum_{j=-m}^{m}\xi(t+j)\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}t_it_jg_{ij},$$

其中

$$g_{ij}=\sum_{l=-m}^{m}E\left[x(t)x(t+i)-\gamma(i)\right]\left[x(t+l)x(t+l+j)-\gamma(j)\right]$$

利用$x(t)$的有限滑动平均性，按照定理 2.2 的证明步骤，容易验证g_{ij}满足（3.10）式。（只须将$x(t)$的表达式代入上式，并整理后可得。）

现在，检查

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=1}^{N}\xi(t)-\sqrt{N}\sum_{i=0}^{n}t_i\tilde{\gamma}(i)=R_N$$

的极限性质。为此，我们暂时考虑$\xi(t)$中的第l的加项，即

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=1}^{N}\left[x(t)x(t+l)-\gamma(l)\right]=\sqrt{N}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-l}\left[x(t)x(t+l)-\gamma(l)\right]$$

$$+\sqrt{N}\cdot\frac{1}{N}\sum_{t=N-l+1}^{N}\left[x(t)x(t+l)-\gamma(l)\right]$$

$$=\sqrt{N}\left[\hat{\gamma}(l)-\gamma(l)\right]+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=N-l+1}^{N}x(t)x(t+l)$$

于是，以此代入R_N，可得

$$R_N=\frac{1}{\sqrt{N}}\left\{\sum_{t=N}^{N}t_1x(t)x(t+l)+\sum_{t=N-1}^{N}t_2x(t)x(t+2)+\cdots+\sum_{t=N-n+1}^{N}t_nx(t)x(t+n)\right\}$$