

近代数学史纲

近代數學史綱

DAVID EUGENE SMITH 原著

曹丹文譯 楊哲明校閱

世界書局印行

序

譯者既譯 Cajori 氏初等數學史以後，
每欲進譯高等數學史，以餉學者。祇以吾
豫迭受時局影響，寢食難安，遲延未果。今
夏避地來滬，蟄居多暇，乃取 David Eugene
Smith 之近代數學史綱而譯之。此書言簡
意賅，舉凡近代高等數學之種類，概括引
述無遺，實便於初學。惟譯者無文，恐未能
恰合原著者之意趣，用疚疚於心耳。

民國十九年雙十節，

固始 曹丹文，在 上海。

例 言

一、我國數學名詞，尚未審定，譯書頗感困難，例如算學數學，各執一詞，互有理由，今姑名曰數學史，讀者諒之。

二、最小二乘式，有名爲最小二乘方者，竊以二乘二字，已含有二方之意，且僅名爲方，不足以表其術之意義，故改之。

三、集合式，有譯爲羣學者，稍嫌與人羣，動物羣相混，因改之。

四、書籍誌列舉之書，有德，法，……等文，原文譯文並列，以便讀者考證。

五、譯者學識淺陋，自知錯誤必多，尙祈海內外同志方家，惠賜改正，不勝感幸之至。

目 次

第一章	導 言	1
第二章	整數論	6
第三章	無理數與超越數	9
第四章	複虛數	11
第五章	四原術與伸展術	13
第六章	方程式論	16
第七章	代替式與集合式	21
第八章	行列式	24
第九章	有理齊次函數	26
第十章	微積分	30
第十一章	微分方程式	34
第十二章	無窮級數	38
第十三章	函數論	42
第十四章	適遇法及最小二乘式	50
第十五章	解析幾何	55
第十六章	近世幾何	59

第十七章	初等幾何	66
第十八章	非歐克里得幾何	68
第十九章	書籍誌	71
第二十章	一般之傾向	89
附錄	中西專名對照表	

第一章 導言

研究近代數學史時，即有兩個問題因之而起：(1) 數學一詞，將有若何之定義？(2) 近代二字，將有若何之意趣？換言之，即近代數學一語，將有若何之解釋？

本書之中，數學一詞，僅限於純粹科學之範圍，至於其分門別類之應用，不過偶而論及之。例如牛頓之於數學的物理，拉卜拉士之於天體的力學，拉果蘭吉及柯西之於波動論，抱愛生，法里亞，及柏色爾之於熱學，俱有偉大之貢獻，凡此種種，則屬於應用的數學之範圍。

所以，數理方面，對於一般之定理，述其特別之貢獻；無理數及超越數，述其樹立其科學的基礎之人；複虛數，述其發展近代之學理及致力於四原論及伸展論之人。至對於方程式論，僅述其重要之領袖學者數人，並略述其研究之所獲。因五次方程式之無普通解法，遂引伸而論及集合式及行列式之創設者高斯。代數之有此現象，而有理齊次函數論，便隨之以起。

微積分學之晚近進步，遂及於微分方程式及函數論，蓋除一簡單部分，關係適遇法者外，代數一門，將告完成焉。至幾何方面，凡於解析法及綜合法之園地，曾作晚近之展布，及其辛勤所獲，具特異之點者，亦擇要論述之。但本書之範圍不廣，致彼莘莘學者，攻研他種重要門類者，未遑論列，蓋本書目的所在，欲於數學之任何合理定義之下，適合高等價值，故不得不如此。

近代數學一語，無論如何，究無確切之定義。即就代數言，殊難名之為近代，蓋方程式論，雖承受十九世紀時加添重要學理之若干，而有理齊次函數論，則又為近今之新產物。初等幾何學亦然；十九世紀之上半，雖經勞巴奇士克及抱爾夜之探討，於此全科，曾放異彩。而晚近以來，對於三角之研求，亦頗多新增之學理。故近代數學史亦應稱之為舊數學之近代史，蓋各種學科，雖似近代之新產，而其根芽，早植於前世紀之中。

今流覽法人之數學書籍¹誌（1893年在巴黎出版），共七十一頁，一大部分列舉數學之近代科目，或

1. Index du Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques.

研究德人之數學進行年鑑¹，凡二十六²冊，近來年達千餘頁，專記此學之進行，而作若此之簡括引述，實使人感覺到不滿意。

今日數學各門之基礎，多置於十七及十八世紀之時。狄士加特發明解析幾何，法而馬助成整數論，哈里堯致力於代數，巴士加爾研攻幾何及數學的物理，牛頓與來本之創設微分學，共同合作，十七世紀之名，因之不朽。及至十八世紀，自爲一大肆活動時期。瑞士之尤拉及柏老尼一家，巴黎之德來母伯，拉果蘭吉，及拉卜拉士，德國之拉母柏特，俱提倡牛頓之大發明，而推廣其理論及應用。繼此活動以後，微分學，數學新增之理論，世遂深信之而不疑，蓋其基礎，初未鞏固，實有待於後來者之勤勉建設也。

至於原理之熱烈研究，各門必需界限之確認，算學知識之廣播，應用算學之開始擴大，皆十九世紀之事。科學學校之設立，科學雜誌之刊行，大學科學講席之添置，頗具特殊勢力。巴黎之設立藝術學校（1794—

1. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

2. 現不止此數

5), 卜拉哥 (1806), 維也納 (1815) 柏林 (1820) 加爾魯海 (1825) 等多城之設立同類學校,對於幾何之大復興,厥功實非淺鮮.迨十九世紀之中葉,此等學校招致數學大家,羣聚其地,風聲所播,感化特深,因之治里西,加爾魯海,木里西,得來士屯等城,遂成爲數學之中心.

1796年,藝術學校雜誌¹之第一冊出世.1826年,柯來雷之純粹及應用數學雜誌²出世.閱十年,里敖非雷始刊理論及應用算學雜誌³,以後來薩爾及約爾丹繼續其業.1839年,劍橋大學數學雜誌⁴出世,1846年,乃併爲劍橋與道林算學雜誌.他種定期刊物,有功於數學知識之推廣者,茲擇要引述於次:數學年報⁵ (1842),哥魯納特之數學彙錄⁶ (1843),塔達里力之數學與物理年刊⁷ (1850),司努米爾可之數學與物理定期刊⁸

1. Journal de l'E'cole Polytechnique.

2. Journal für die reine und angewandte Mathematik.

3. Journal de Mathématiques pures et appliquées.

4. Cambridge Mathematical Journal.

5. Nouvelles Annales de Mathématiques.

6. Archiv der Mathematik.

7. Annali di Scienze Matematiche e Fisiche.

8. Zeitschrift für Mathematik und Physik.

(1856), 數學季刊¹ (1857), 巴達哥里力之數學雜誌² (1863), 數學年刊³ (1869), 數學公報⁴ (1870), 美洲數學雜誌⁵ (1878), 數學動作雜誌⁶ (1882), 及數學年鑑⁷ (1884). 此外尙有新刊,目的相同,應附於此,即數學家之紹介⁸ (1894), 及重要兩年刊,即前述之數學進行年鑑,及德意志數學社年報⁹是也.

除學校與雜誌之感化力外,應加以多數學會之感化力,因其所出記錄,風靡一時,且規模日宏,籌備之工作,完全而具永久之性質.

前所述原理之研究,實爲十八世紀時未能注意微分學新術及卡得式幾何的應用之自然結果.凡關

-
1. Quarterly Journal of Mathematics.
 2. Giornale di Matematiche.
 3. Mathematische Anualen.
 4. Bulletin des Sciences Mathématiques.
 5. American Journal of Mathematics.
 6. Acta Mathematica.
 7. Anuals of Mathematics.
 8. L'Intermédiaire des Mathématiciens.
 9. Jahresbericht der dentschen Mathematiker-Vereinigung.

於無窮級數,數目原理之有理數無理數,及複虛數,極限定理,繼續性,函數,無窮量,無窮小量,此種發展,皆得見之.但十九世紀之工作,遠逾於此.嘗創設重要之新科目,於理論應用,兩多便利.就中據最上位置,當推柯西,黎曼,歪亞士塔拉所創設之函數論,而繼以畫法幾何,投影幾何,集合式論,有理齊次函數論,及行列式論等等.

十九世紀,自然爲一分類時期.開始之初,人於數學,物理,天文各科,欲作明白之總括,若拉果蘭吉,拉卜拉士,告士諸人是.但此新世紀之已臨,忙吉,加納脫,旁色來脫,司台納,改勞愛,亞伯爾及亞考比,雖欲區分數學之各門,奈其間種種關係,歷久莫明.因此一端,晚近以來,常見反動之現象,故於函數論,及集合式論,而混合之傾向,又覺顯著.

第二章 整數論

整數論素爲希臘人所珍重.十六及十七世紀,經菲台,巴孩底買西里亞及法而馬之特別研究,乃得復興.迨十八世紀,尤拉及拉果蘭吉嘗致力於此,及其末季,經里近得及告士之精研,此科始具科學形勢.告士

之算術論¹，始可名之爲近代之數目論，且此科分爲兩部，其一討論整數，屬於此者，(1)素數式，符合式，餘數式，及倒數定律，(2)形狀論，其二則討論複虛數焉。

十九世紀之多數學者，頗孜孜於素數之理，但所得結果，屬於片段的，而非一般的。齊比齊夫 (1850) 首先考得兩定數之間，確定素數之數之法，饒有價值。黎曼 (1859) 於一定數之內，求素數之數之極限，則亦示一著名之公式。

符合式論，可謂始於告士之算術論，彼引入 $a \equiv b \pmod{c}$ 記號，對此一科，盡力探討。1847年，齊比齊夫 印行一俄文書，論述此科，而法蘭西之色來特，考求更進，以促成此理之顯著。

對於整數論，里近得以前之先哲之偉績，既已擇要引述，並附以根本及著名之建設，而基本定理，二次餘數之倒數律，則當歸之於里近得。尤拉嘗用歸納法發明此律，昭示於世，里近得則於其數論²一書 (1798) 之特例，首先證明之。告士之於尤拉及里近得，各不相謀，約於1795年，發現此律，並首先示以一般之證明，其

1. Disquisitiones Arithmeticae.

2. Théorie des Nombres.

他有功於此科者，尚有柯西，此世紀法蘭西數學家之最優者；有狄里西來特，其數理演講集¹，得底肯所編輯，實一名作；有亞考比，嘗引用有普通性的記號；有里敖非雷，柴來而，愛生士坦，孔買而，及克郎來克，告士皆推廣此理至於三次四次之倒數，亞考比亦然，並與孔買而首先證明三次之倒數律。

告士用兩項平方式以表數，柯西，庖印沙 (1845)，來伯士克 (1859, 1868)，及海而買，於此科俱有增益。愛生士坦於四項平方式之理，爲一領袖，且與司密士於一般式之理，有長足之進步。司密士於四項平方式，嘗作完全之分類，並推廣告士之實平方式而至複虛數。蓋用 4, 5, 6, 7, 8 項平方之和以表數，促進其理者爲愛生士坦，完成其理者爲司密士。

狄里西來特爲德意志對於整數論最熱烈工作家之一，並在一德意志大學首先演講整數論，其建樹之中，嘗推廣法而馬之定理 $x^n + y^n = z^n$ ，此理尤拉與里近得曾證明 $n=3, 4$ 而合，狄里西來特則證明 $x^5 + y^5 \neq az^5$ 。晚近法蘭西著作家之中，有抱來爾，抱印加雷，著作多而有價值；有坦納雷，及司提爾夜，德意志首領著

1. Vorlesungen über Zahlentheorie.

作家之中，有克郎來克，孔買而，色林，巴哈曼，及得底肯。奧大利亞之司桃爾次之數理演講集¹（1885—86），及英倫馬太的數理論²（第一集，1892），為一般著作中之最有價值者，而吉納西，西爾維士台，及哥來暇，亦於此理有所增補。

第三章 無理數與超越數

十六世紀始承認負數，整數與分數，十七世紀始見小數，其記數法與近世數學家普通所用者全同，繼此百年，始見虛數為狄毛弗雷及尤拉工作之利器，十九世紀，乃完成複虛數之理，分無理數為代數的與超越的，證明超越數之存在，並促進無理數之理為科學格式，自歐克里得以來，此理殆久隱未顯也。1872年歪亞士塔拉之理始行世（門人考薩克印行），孩雷（柯來雷雜誌74期），坎陶（年刊第5期），及得底肯之理，先後刊行。1869年，買雷始攻之點與孩雷同，但引述此理，通指1872年歪亞士塔拉之法，為平切雷所完成（1880），而得底肯之法，經其以後之致力（1888），及坦

1. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik.

2. Theory of Numbers.

納雷新近之認可 (1894), 加增價值不少。歪亞士塔拉, 坎陶, 及 孩雷 置其定理之基礎於無窮小數, 而 得底肯 置其定理之基礎於實數之剖分, 即剖分一切有理數爲兩類, 而各具特性。此科蓋嘗得 歪亞士塔拉, 克郎來克 (柯來雷雜誌 101 期), 及 買雷 的贊助。

連分數密切於無理數 (1613 年 加塔笛 曾致力於此), 曾受 尤拉 之注意, 十九世紀之初, 經 拉果蘭吉 之記錄, 遂大著名。而其他名貴之貢獻, 則成於 圖魯肯 米拉 (1837), 孔次 (1857), 來母克 (1870), 及 均台而 (1872), 拉木士 (1855) 首聯合此科於行列式, 結果所得, 遂於連分數的行列式之理, 與 孩雷, 莫比亞, 均台而 後得之貢獻相聯屬, 狄里西來特 亦於此一般之理有所增補, 一若多數著作家於此科之應用然。

克郎來克 始分辨超越數異於代數的無理數, 拉母伯 嘗證明 (1761) π 爲無理數, 而 e^n (n 爲有理數) 亦爲無理數, 蓋一久待證明之理, 里近得 完成 拉母伯 之證明, 並示 π 非有理數之平方根, 里敖非雷 (1840) 證明 e 或 e^2 俱非整二次方程式之根, 但超越數之存在, 爲 里敖非雷 首先所確定 (1844, 1851), 後 坎陶 相繼證明之 (1873), 海而買 (1873) 首先證明 e 爲超越數,

林得曼 (1882) 根據海而買之所得,證明 π 亦爲超越數。林得曼之證明經歪亞士塔拉 (1885) 化爲簡單,經西爾伯特 (1893) 化爲更簡,後經哈韋次及告而丹乃化爲初等的格式。

第四章 複虛數

複虛數之理之令人注意,可謂在十六世紀意大利代數家承認虛根之時。十七世紀,狄士加特分別實根與虛根之不同,十八世紀,狄毛弗雷及尤拉乃盡力研究之。狄毛弗雷 (1730) 因發明著名之公式 $(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos n\phi + i \sin n\phi$, 而尤拉則發明 $\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$ 焉 (1748)。

複虛數之幾何意義,因待研究,而其結果,能令複虛數之理,得一顯明之進步。1685年,瓦里士之代數簡編¹,始有複虛數圖解之觀念。至十八世紀,坤 (1750) 及歪色爾 (約 1795) 於近今之理,乃有確切之改進。歪色爾之作,始載於 1799 年考彭哈根學校之雜誌²,非常明潔完全,即較之晚近之作,未能多讓。彼尙致力於球

1. De Algebra tractatus.

2. Proceedings of the Copenhagen Academy.