成人高等教育基础学科练习丛书

高等代数纲要与练习

朴济贤　编

佳木斯市教育学院学报编辑部

前　言

广大成年学员在学习高等代数的过程中，往往感到抽象、难懂、抓不住重点。他们希望能有几本内容充实的参考书给予指导。为了满足他们的要求，特编写了这本书。

编者在多年给成年学员讲授高等代数的基础上，参考国内高等代数名著，编写了这部《高等代数学习指导》。在每章开头简单介绍了本章的主要概念、主要结果及主要方法，指出了重点内容与难点内容。并适当地说明了章与章的关系。在例题和习题的选配上，注意到了由简到繁，由具体到抽象的原则；力求做到典型性强、数量适宜，便于巩固。

本书共有三个部分：

1）多项式理论。第一章内容。

2）线性代数理论。从第二章到第八章内容。

3）代数基本概念。第九章内容。

由于编者水平有限，编写时间仓促，书中缺点错误在所难免，希望广大读者批评指正。

朴济贤

1985年3月于佳木斯市教育学院

目　录

第一章　一元多项式……………………………………（1）

§1　一元多项式的概念…………………………………（1）

§2　整除性………………………………………………（2）

§3　最大公因式…………………………………………（3）

§4　因式分解定理………………………………………（6）

§5　重因式………………………………………………（7）

§6　多项式函数…………………………………………（8）

§7　复系数与实系数多项式的因式分解……（10）

§8　有理系数多项式……………………………………（11）

第二章　行列式………………………………………（13）

§1　排列…………………………………………………（13）

§2　n阶行列式………………………………………（14）

§3　n阶行列式的性质……………………………（15）

§4　行列式的计算………………………………………（19）

§5　行列式按一行（列）展开…………………………（25）

§6　克兰姆法则…………………………………………（28）

第三章　线性方程组…………………………………（32）

§1　消元法………………………………………………（36）

§2　n维向量空间……………………………………（39）

§3　线性相关性…………………………………………（39）

§ 4　矩阵的秩 …………………………………………（41）
§ 5　线性方程组有解判别定理 …………………………（43）
§ 6　线性方程组解的结构 ……………………………（45）

第四章　矩阵 …………………………………………（49）

§ 1　矩阵的运算及其性质 ……………………………（50）
§ 2　矩阵乘积的行列式与秩 …………………………（54）
§ 3　矩阵的逆 …………………………………………（55）
§ 4　分块矩阵 …………………………………………（56）
§ 5 初等矩阵 …………………………………………（60）

第五章　二次型 ………………………………………（62）

§ 1　二次型的矩阵表示 ………………………………（63）
§ 2　标准形 ……………………………………………（64）
§ 3　规范型 ……………………………………………（68）
§ 4　正定二次型 ………………………………………（71）

第六章　线性空间 ……………………………………（74）

§ 1　集合、映射 ………………………………………（75）
§ 2　线性空间的定义与简单性质 ……………………（78）
§ 3　维数、基与坐标 …………………………………（82）
§ 4　基变换与坐标变换 ………………………………（88）
§ 5　线性子空间 ………………………………………（94）
§ 6　子空间的交与和 …………………………………（98）
§ 7　线性空间的同构 …………………………………（101）

第七章　线性变换 ……………………………………（102）

§1 线性变换的定义及其简单性质…………（104）
§2 线性变换的运算…………（106）
§3 线性变换的矩阵…………（109）
§4 特征值与特征向量…………（114）
§5 对角矩阵…………（116）

第八章 欧氏空间…………（120）

§1 定义与基本性质…………（121）
§2 标准正交基…………（124）
§3 正交变换…………（127）
§4 对称矩阵的标准形…………（128）

第九章 代数基本概念介绍…………（132）

§1 群的定义…………（132）
§2 子群…………（135）
§3 环与域…………（136）
§4 子环与子域…………（138）

习 题 解 答

第一章……………………………………………………（140）
第二章……………………………………………………（148）
第三章……………………………………………………（158）
第四章……………………………………………………（165）
第五章……………………………………………………（174）
第六章……………………………………………………（182）
第七章……………………………………………………（204）
第八章……………………………………………………（226）
第九章……………………………………………………（247）

第一章　一元多项式

我们学习本章时要着重学好多项式整除理论和求根方面的理论。包括因式分解的理论。

基本结论有：

1、带余除法定理，　2、辗转相除法定理，

3、因式分解唯一性定理，　4、代数基本定理。

基本方法有：

1、带余除法，　2、综合除法，　3、辗转相除法，

4、判断重因式法，　5、关于整系数多项式在有理数域上不可约的艾森斯坦因判别法，

6、求整系数多项式有理根的方法。

本章的重点是多项式的因式分解理论。

弄清：整除、互素、不可约等概念、性质、定理及它们之间区别与联系。

§1　一元多项式的概念及其运算

我们要学好多项式的运算及定律。要注意零多项式与零多次项式的区别。

习　题

1、证明：

1）$deg\ (f(x)\pm g(x))\leq max\ (deg f(x),\ deg g(x))$

2）$deg\ (f(x)\cdot g(x))\ = deg f(x) + deg g(x)$

其中 $f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$

2、证明，$f(x)\cdot g(x)=0$的充分必要条件是$f(x)=0$或$g(x)=0$

3、若$u(x)\cdot f(x)=u(x)\cdot g(x)$，且$u(x)\neq 0$．则$f(x)=g(x)$。

§2　整除性

本节要学好整除的定义及其常用性质。

用整除的定义及其性质判断一个多项式能否整除另一个多项式要注意：

1）被除式的次数低于除式的次数，则不能整除。

2）被除式是单项式，而除式是多项式，则不能整除。

3）零次多项式能整除任意多项式，反之，能整除任意多项式的多项式一定是零次多项式。

4）只有零多项式能被任意多项式所整除。

例1、设$f(x)$，$g(x)$和$h(x)$都是实系数多项式，证明：如果$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，那么，$f(x)=g(x)=h(x)$。

证明：如果$g(x)$，$h(x)$都等于零，则$f(x)=0$，命题成立。

如果$g(x)$与$h(x)$中至少有一个不等于零，故$x\cdot g^2(x)+xh(x)\neq 0$，从而$f^2(x)\neq 0$，容易看出$xg^2(x)+x\cdot h^2(x)$的次数为奇数，而$f^2(x)$的次数为偶数，因此$g(x)=h(x)=0$于是$f^2(x)=0$，从而$f(x)=0$

例2、证明：$x\mid f^K(x)$的充分必要条件是$x\mid f(x)$。

证明：充分性：$\because x\mid f(x)$，当然$x\mid f^K(x)$。

必要性：假若$x\nmid f(x)$，$f(x)$的常数项必不为0。

设其常数项为$a_0\neq 0$，于是$f^K(x)$的常数项为a_0^K。显然$x\mid f^K(x)-a_0^K$，但$x\nmid a_0^K$，故$x\mid f(x)$。

习　题

4、用$g(x)$除$f(x)$，求商$q(x)$与余式$r(x)$。

1）$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$

$g(x)=x^2-3x+1$

2）$f(x)=x^3-3x^2-x-1$

$g(x)=3x^2-2x+1$

3）$f(x)=3x^4-2x^3-x+1$

$g(x)=3x^2-x+2$

4）$f(x)=x^4-2x+5$

$g(x)=x^2-x+2$

5、m，p，q适合什么条件时，有

1）$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$

2）$x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$

6、试决是a，b使

1）x^4+3x^2+ax+b能被x^2-2x+4整除。

2）ax^4+bx^3+1能被x^2-1整除。

§3、最大公因式

带余除法是整除理论的基础，而辗转相除法解决了任意两个多项式的最大公因式的存在性，同时提供了求出最大公因式的一个有效办法。求最大公因式是本节的重点，而用最大公因式的重要定理和整除理论证明有关命题是本节的难点。遇到难处时，要与整数的有关理论进行对照，会得到启发。

例3、求$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$，$g(x)=x^3+x^2-x-1$的最大公因式。

解：

$$
\begin{array}{r|l|r|l}
-\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & x^3+x^2-x-1 & x^4+x^3-3x^2-4x-1 & x \\
 & x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x & x^4+x^3-x^2-x & \\
\cline{2-3}
 & -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1 & -2x^2-3x-1 & \frac{8}{3}x+\frac{4}{3} \\
 & -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4} & -2x^2-2x & \\
\cline{2-3}
 & -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} & -x-1 & \\
 & & -x-1 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore\ (f(x),g(x))=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$

即 $(f(x),g(x))=x+1$

例4、求$u(x)$，$v(x)$使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

已知：$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$，

$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$

解：$\because f(x)=1\cdot g(x)+(x^3-2x)$

$g(x)=(x+1)(x^3-2x)+(x^2-2)$

$x^3-2x=x(x^2-2)$

$$
\begin{aligned}
\therefore x^2-2 &= g(x)-(x+1)(x^3-2x)\\
&= g(x)-(x+1)(f(x)-g(x))\\
&= g(x)-(x+1)f(x)+(x+1)g(x)\\
&= (-x-1)f(x)+(x+2)g(x)
\end{aligned}
$$

故$u(x)=-x-1$，$v(x)=x+2$

习　题

7、求$f(x)$与$g(x)$的最大公因式。

1）$f(x)=x^5+x^4-x^3-2x-1$

$g(x)=3x^4+2x^3+x^2+2x-2$

2）$f(x)=x^4-4x^3+1$

$g(x)=x^3-3x^2+1$

3）$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$

$g(x)=x^3+x^2-x-1$

4）$f(x)=x^4-10x^2+1$

$g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$

8、求$u(x)$，$v(x)$使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x), g(x))$：

1）$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$．

$g(x)=3x^2+10x^2+2x-3$．

2）$f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$．

$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$．

3）$f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$，

$g(x)=x^2-x-1$。

4）$f(x)=3x^3-2x^2+x+2$，

$g(x)=x^2-x+1$。

9、证明：

$(f(x)h(x), g(x)h(x))=(f(x), g(x))h(x)$

（$h(x)$的首项系数为1）

10、如果$f(x)$，$g(x)$不全为0，证明：

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right)=1$$

11、证明：如果$f(x)$，$g(x)$不全为零，且$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$，那么

$$(u(x),v(x))=1$$

12、证明：如果$(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，那么$(f(x),g(x)h(x))=1$

13、设$f_1(x)$，$f_2(x)\cdots$，$f_m(x)$；$g_1(x)$，$\cdots g_n(x)$都是多项式，且$(f_i(x),g_j(x))=1$ $(i=1,2,\cdots,m,$ $j=1,2,\cdots,n)$，求证：

$$(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_m(x),\ g_1(x)\cdot g_2(x)\cdots g_n(x))=1.$$

14、证明：如果$(f(x),g(x))=1$，那么，$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$

§4 因式分解定理

本节介绍了不可约多项式的定义及其性质，在此基础上证明了因式分解唯一性定理。只从理论上给出了把一个多项式分解为不可约因式之积的可能性与唯一性，但从计算上并没给出具体方法。

习　题

15、试求以下各题的最大公因式。

1）$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ 与 $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$

2）$(x^3-1)(x^2-2x+1)$与$(x^2-1)^3$

16、证明：若$f^2(x)\mid g^2(x)$，则$f(x)\mid g(x)$

17、在有理数域上分解以下多项式为不可约因式的乘积

1）$3x^2+1$，

2）x^2-2x^2-2x+1

18、分别在复数域实数域和有理数域上分解多项式 x^4+1 为不可约因式的乘积。

§5 重因式

本节的主要内容是判断一个多项式是否有重因式的方法。

例5、试决定系数 a，使 -1 是多项式

$$f(x)=a^5-ax^2-ax+1$$

的二重或三重以上的重根。

实际上，若 -1 是 $f(x)$ 的重根，其重数是大于等于2，则 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 所得余式必为0，而 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 可以连续两次用综合除法，以 $x+1$ 去除 $f(x)$，再以 $x+1$ 去除其商来实现。再令其余式为0，从而解出 a 值。

解：将 $f(x)$ 除以 $x+1$

$$-1\ \begin{array}{|cccccc} 1 & 0 & 0 & -a & -a & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1-a & 1 & 0 \end{array}$$

故 $f(x)=(x+1)(x^4-x^3+x^2-(1+a)x+1)$

$$=(x+1)\ q_1(x)$$

再将 $q_1(x)$ 除以 $x+1$

$$-1\ \begin{array}{|ccccc} 1 & -1 & 1 & -(1+a) & 1 \\ \hline 1 & -2 & 3 & -4-a & 5+a \end{array}$$

从此得

$$q_1(x)=(x+1)(x^3-2x^2+3x-(4+a))+(5+a)$$

$$=(x+1)\ q_2(x)+r_2(x)$$

令余式 $r_2(x)=5+a=0$，得 $a=-5$，于是

$$f(x)=(x+1)^2\ (x^3-2x^2+3x+1)$$

$$= (x+1)^2 q_2(x)$$

这样，$a=-5$即为-1至少是$f(x)$的二重根的条件，但-1不是$f(x)$的三重根。因为将$q_2(x)$除以$x+1$，即有

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -5 \end{array}$$

所得余式（为-5）不为0。

习 题

19、判断下列多项式有无重因式

1）$f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

2）$f(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+1$

20、求t值使

$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$有重因式。

21、求多项式

x^3+px+q有重根的条件

22、证明：

$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 不能有重根。

23、如果$(x-1)^2 \mid Ax^4+Bx^2+1$，求A，B。

§6 多项式函数

本节的主要内容是定义多项式根的基础上提出了多项式的根与多项式整除的关系。即 c为$f(x)$的根的充分必要条件是$x-c$整除$f(x)$。

例6、判断5是否多项式

$f(x)=3x^5-224x^3+742x^2+5x+50$

的根？如果是的话，是几重根？

解：因为

$f(5)=3\times5^5-224\times5^3+742\times5^2+5\times5+50$

$5^2(3\times5^3-224\times5+724+1+2)=0$

因此5是$f(x)$的根。

$f'(x)=15x^4-672x^2+1484x+5$

$f'(5)=15\times5^4-672\times5^2+1484\times5+5=0$

$f''(x)=15\times4x^3-672\times2x+1484$

$f''(5)=15\times4\times5^3-672\times2\times5+1484\neq0$ 所以2是$f(x)$的2重根。

习　题

24、用综合除法求商$q(x)$，余式$r(x)$：

1）$f(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+8$，$g(x)=x-1$

2）$f(x)=2x^5-5x^3-8x$，　　$g(x)=x+3$

3）$f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10$，$g(x)=2x-4$

25、试决定a，b，使得

1）$f(x)=x^3-3x^2+4x+a$除以$x-2$所得余数为3；

2）$f(x)=2x^3+3x^2+bx-1$除以$x+3$所得余数为-4；

3）$f(x)=2x^3-3x^2+ax+b$除以$x+1$所得余数为7。

26、试决定a，b，使

$x^2-x-2\mid x^4-ax^3+2x^2+bx-2$

27、试决定a，b，使

$(x-1)^2\mid ax^4+bx^3+1$

28、已知一个二次三项式除以$x-1$所得余数是3；除以$x-2$所得余数是6；除以$x+2$所得余等是18，求这个

二次三项式。

§7 复系数与实系数多项式的因式分解

本节由代数基本定理，介绍了两个重要定理，复系数多项式因式分解定理和实系数多项式因式分解定理。

例7、求x^4+1在复数域和实数域上的标准分解式。

解：由$x^4+1=0$，得$x^4=-1$从而

$$x=cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\cdot sin\ \frac{\pi+2k\pi}{4}$$，有四个根：

$$\varepsilon_0=cos\frac{\pi}{4}+i\cdot sin\ \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (1+i)$$

$$\varepsilon_1=cos\frac{3\pi}{4}+i\ sin\ \frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$\varepsilon_2=cos\frac{5\pi}{4}+i\ sin\ \frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (-1-i)$$

$$\varepsilon_3=cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot sin\ \frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (1-i)$$

故，$x^4+1=(x-\varepsilon_0)\cdot(x-\varepsilon_1)\cdot(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)$，（在复数域上）

$$x^4+1=[x^2-(\varepsilon_0+\varepsilon_3)x+1]\cdot[x^2+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)x+1]$$
$$=(x^2-\sqrt{2}x+1)\ (x^2-\sqrt{2}x+1)，$$

（在实数域上）

习　题

29、把下列各题分别在实数域上和复数域上分解成不可约因式的乘积

1）$f(x)=2x^2+2$

2）$f(x)=x^3-2x^2-2x+1$

3）$f(x)=x^3-19x+30$

4）$f(x)=x^3+x^2+4x+4$

5）$f(x)=x^4-2x^2-2$

6）$f(x)=x^4-4x^2+x+2$

7）$f(x)=x^6+27$

30、试就以下所给出的根做出最低次数的实系数多项式：

1）二重根1，单根2，3及$1+i$

2）二重根$2-3i$

3）二重根i，单根$-1-i$

31、已知$1-i$是方程

$x^4-4x^3+5x^2-2x-2=0$的一个根。解此方程。

32、给出实系数四次多项式在实数域上所有不同类型的标准分解式。

33、求x^n-1在复数域上的标准分解式。

§8、有理系数多项式

本节着重学好求整系数多项式全部有理根的方法和在有理数上不可约的艾森斯坦因判别法。我们应用艾森斯坦因判别法很容易看到在有理数域上有任意次的不可约多项式。

例8、求方程$2x^4-x^3-2x-3=0$的有理根。

解：有理根可能是±1，±3，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{3}{2}$，但由于$f(1)=0$所以$x=1$是此方程的根。

例9、证明$f(x)=x^3-5x+1$在有理数域上不可约。

证明：用反证法证明。如果$f(x)$在有理数域上可约，