

全国初中数学联赛 试题详解

中国数学会普及工作委员会编

1984 - 1993

裴宗沪 主编

开明出版社

全国初中数学联赛试题详解

(1984—1993)

主编 裘宗沪

编者 刘玉翹

魏有德

开明出版社

(京)新登字 104 号

内 容 提 要

本书收录了 1984~1993 全国初中数学联赛试题,解答部分由中国数学会普及工作委员会副主任刘玉翘先生和魏有德先生在每届主办省、市、自治区数学会精心作出的试题解答的基础上执笔完成,某些试题附有多种精辟解答及其背景分析和评注,这是中国数学会首次公开初中联赛的试题和解答。

本书可供中学数学教师、初中生及各类初中数学竞赛参加者使用与参考。

全国初中数学联赛试题详解

裘宗沪 主编

开明出版社出版发行

(北京市海淀区车道沟八号)

北京外文印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

开本:787×1092 1/32 印张:4 字数:80 千字

1994 年 1 月北京第 1 版 1994 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:30,001—39,000

ISBN 7-80077-692-1/G·4.6 定价:2.50 元

前 言

1981年,中国数学会开始举办“高中数学联赛”,经过1981、1982、1983三年的实践,这一群众性的数学竞赛活动得到了全国广大中学师生欢迎,也得到了教育行政部门、各级科学技术协会、以及社会各阶层人士的肯定和支持。“试题所涉及的知识范围不超出现行教学大纲”这一命题原则,也得到了更多的理解和拥护,由此“高中数学联赛”已形成制度。同时,全国各地都提出了举行“初中数学联赛”的要求。1984年,中国数学会普及工作委员会商定,委托天津市数学会举办一次初中数学邀请赛,有14个省、市、自治区参加,当时条件较简陋,准备时间也较仓促,但天津数学会的同志,在南开大学数学系和天津师范大学数学系的大力支持下,极其认真负责地把这次活动搞得很成功,为后来举办“初中数学联赛”摸索了很多经验。当年11月,在宁波召开的中国数学会第三次普及工作会议时,一致通过了举办“初中数学联赛”的决定,并详细商定了一些具体办法,规定每年四月的第一个星期天举行“初中数学联赛”。会上湖北省数学会、山西省数学会、黑龙江省数学会分别主动承担了1985年、1986年、1987年的“初中数学联赛”主办单位,从此,“初中数学联赛”也形成了制度。

初中数学联赛原来不分一、二试。为了更好地贯彻“在普及的基础上不断提高”的方针,1989年7月,在济南召开的“数学竞赛命题研讨会”上,各地的代表商定,初中联赛也分两试进行,并对一、二试各种题型的数目,以及评分标准作出明确的规定,使初中联赛的试卷走向规范化。

中国数学会所举办的全国高中数学联赛、全国初中数学

联赛,以及小学数学奥林匹克,都是群众性的数学课外活动,是大众化、普及型的数学竞赛。高中联赛与全国中学生数学冬令营衔接,有“选拔”的作用,但初中联赛没有类似的作用,因此,更具有“面向大多数”的特点。目前,每年有12万名学生参加。为了让更多学生都能发挥他们的聪明才智,培养兴趣,充分发掘他们学习上的潜力,调动学习数学的积极性,我们力求让试题能够适合全国多数参赛学生。从1991年起,我们力求降低试题的难度。题目不难,又要有点意思,还要有竞赛气氛,要做到是不容易的。1993年,由内蒙古数学会主办初中联赛,内蒙古数学会主要负责人都参加了命题工作,对试题反复进行修改,在试题的通俗化上下了很大功夫,因此,试题很受称赞。

所谓“联赛”,就是各省、市、自治区联合举办,轮流做庄,大家提供试题,“联赛”充满着协作精神。从1984年至1993年这十年的试题,凝聚着全国许许多多数学工作者的心血,特别是主办单位更是认真负责,不辞辛劳,借此机会,我代表中国数学会普及工作委员会向所有为“初中数学联赛”作出努力和给予支持的同志表示崇高敬礼。

在每届主办省、市、自治区数学会精心作出的试题解答的基础上,由中国数学会普及工作委员会两位副主任:刘玉翘先生、魏有德先生执笔完成了这本试题集。这是中国数学会首次公开初中联赛的试题和解答。

缺点和错误恐怕难免,请广大读者不吝指教!

裴宗沪

1993年12月

目 录

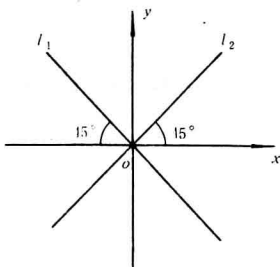
试 题 部 分

一九八四年	(3)
一九八五年	(7)
一九八六年	(12)
一九八七年	(16)
一九八八年	(20)
一九八九年	(23)
一九九〇年	(27)
一九九一年	(30)
一九九二年	(34)
一九九三年	(38)

解 答 部 分

一九八四年	(45)
一九八五年	(53)
一九八六年	(61)
一九八七年	(68)
一九八八年	(76)
一九八九年	(84)
一九九〇年	(91)
一九九一年	(99)
一九九二年	(107)
一九九三年	(111)

试 题 部 分



(D) $|x| - |y| = 0$;

(E) $x - |y| = 0$.

答 ()

5. 方程 $x^2 + 1984513x + 3154891 = 0$

(A) 没有实数根;

(B) 有整数根;

(C) 有正数根;

(D) 两根的倒数和小于 -1 ;

(E) 以上结论都不对.

答 ()

6. $\triangle ABC$ 的三条外角平分线相交成一个 $\triangle LMN$, 则 $\triangle LMN$

(A) 一定是直角三角形; (B) 一定是钝角三角形;

(C) 一定是锐角三角形; (D) 不一定是锐角三角形;

(E) 一定不是锐角三角形.

答 ()

7. 已知方程 $2x^2 + kx - 2k + 1 = 0$ 的两实根的平方和为 $\frac{29}{4}$, 则 k 的值为

(A) 3;

(B) -11 ;

(C) 3 或 -11 ;

(D) 11;

(E) 以上结论都不对.

答 ()

8. 一个两位数, 交换它的十位数字与个位数字所得的两

位数是原来数的 $\frac{7}{4}$ 倍,则这样的两位数有

- (A) 1 个; (B) 2 个;
(C) 4 个; (D) 无数多个;
(E) 0 个. 答 ()

9. 半径为 13 和半径为 5 的两个圆相交,圆心距为 12,则这两圆公共弦长为

- (A) $3\sqrt{11}$; (B) $\frac{65}{6}$;
(C) $4\sqrt{6}$; (D) 10;
(E) 以上结论都不对. 答 ()

10. 下列哪一个数一定不是某个自然数的平方(其中 n 为自然数)

- (A) $3n^2-3n+3$; (B) $4n^2+4n+4$;
(C) $5n^2-5n-5$; (D) $7n^2-7n+7$;
(E) $11n^2+11n-11$. 答 ()

二、试推导出一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的求根公式.

三、已知: $A=6\lg p+\lg q$, 其中 p, q 为质数, 且满足 $q-p=29$.

求证: $3 < A < 4$.

四、已知: 如图,

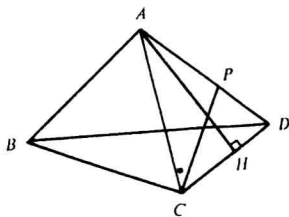
$AB=BC=CA=AD$,

$AH \perp CD$ 于 H ,

$CP \perp BC$ 交 AH 于 P .

求证: $\triangle ABC$ 的面积

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} AP \cdot BD.$$



五、在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AC=1$, $AB=c$, $\triangle ABC$ 的外接圆半径长 $R \leq 1$. 求证: $\cos A < c \leq \cos A + \sqrt{3} \sin A$.

六、有两种重量(设分别为 p 与 q , 且 $p > q$)的球五个, 涂红、白、黑三种颜色, 其中, 两个红球重量不同; 两个白球重量也不同; 一个黑球不知它的重量是 p 还是 q . 由于从外形上不能确定球的轻重, 请你用一台无砝码的天平(只能比较轻重, 不能称出具体重量)称两次, 将 5 个球的轻重都区分出来. 试叙述你的称球办法, 并说明理由.

提示: 用天平称球比较重量的结果, 可用等号或不等号表示.

一九八五年

一、选择题

本题共有 6 个小题。每一个小题都给出了以 (A)、(B)、(C)、(D) 为代号的四个答案, 其中只有一个答案是正确的. 请将正确的答案用代号填在各小题的括号内.

1. 设 $ABCD$ 为圆内接四边形, 现在给出四个关系式

(1) $\sin A = \sin C$; (2) $\sin A + \sin C = 0$;

(3) $\cos B + \cos D = 0$; (4) $\cos B = \cos D$.

其中总能成立的关系式的个数是

(A) 一个; (B) 两个;

(C) 三个; (D) 四个.

答 ()

2. 若 n 是大于 1 的整数, 则

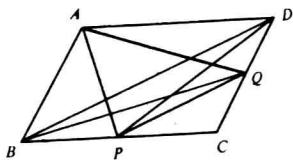
$p = n + (n^2 - 1)^{\frac{1 - (-1)^n}{2}}$ 的值

(A) 一定是偶数; (B) 一定是奇数;

(C) 是偶数但不是 2; (D) 可以是偶数也可以是奇数.

答 ()

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中, P 为 BC 的中点, 过 P 作



BD 的平行线交 CD 于 Q , 连 PA 、 PD 、 QA 、 QB , 则图中与 $\triangle ABP$ 面积相等的三角形, 除 $\triangle ABP$ 外还有

- (A) 三个; (B) 四个;
(C) 五个; (D) 六个.

答 ()

4. 函数 $y = 1 - |x - x^2|$ 的图象大致形状是

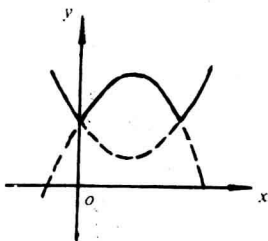


图 1

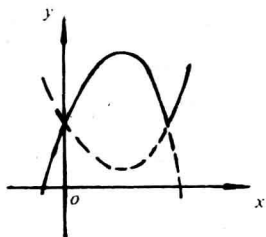


图 2

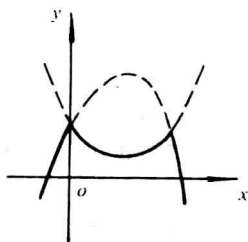


图 3

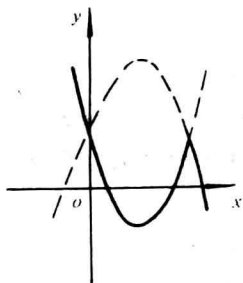


图 4

- (A) 图 1 中的实线部分;
(B) 图 2 中的实线部分;

(C) 图 3 中的实线部分;

(D) 图 4 中的实线部分.

答 ()

5. $[x]$ 表示取数 x 的整数部分, 例如 $[\frac{15}{4}] = 3$ 等, 若

$$y = 4 \left(\frac{x + [u]}{4} - \left[\frac{x + [u]}{4} \right] \right), \text{ 且当}$$

$$x = 1, 8, 11, 14 \text{ 时, } y = 1;$$

$$x = 2, 5, 12, 15 \text{ 时, } y = 2;$$

$$x = 3, 6, 9, 16 \text{ 时, } y = 3;$$

$$x = 4, 7, 10, 13 \text{ 时, } y = 0.$$

则表达式中的 u 等于

(A) $\frac{x+2}{4};$

(B) $\frac{x+1}{4};$

(C) $\frac{x}{4};$

(D) $\frac{x-1}{4}.$

答 ()

6. 如图, 在等腰 $\triangle ABC$ 的中, CD 是底边 AB 上的高, E 是腰 BC 的中点, AE 交 CD 于 F , 现在给出三条路线:

(a) $A \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A;$

(b) $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow A;$

(c) $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A;$

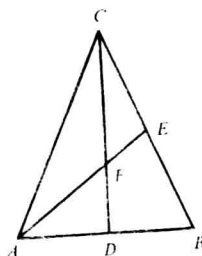
设它们的长度分别为 $L(a), L(b),$

$L(c)$, 那么下列三种关系式:

$L(a) < L(b), L(a) < L(c),$

$L(b) < L(c)$ 中, 一定能够成立的个数是

(A) 0 个; (B) 1 个; (C) 2 个; (D) 3 个.



答 ()

二、填空题

请将正确的结果填入“_____”格内。

1. 设 $a-b=2+\sqrt{3}$, $b-c=2-\sqrt{3}$, 则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值为_____.

2. 设方程 $x^2-402x+k=0$ 的一根加 3, 即为另一根的 80 倍, 那么 $k=_____$.

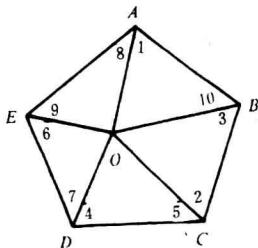
3. 有甲、乙、丙三种货物, 若购甲 3 件, 乙 7 件, 丙 1 件, 共需 3.15 元; 若购甲 4 件, 乙 10 件, 丙 1 件, 共需 4.20 元. 现在购甲、乙、丙各 1 件共需_____元.

4. 不等式 $42x^2+ax<a^2$ 的解为_____.

5. 已知 $x(x\neq 0, \pm 1)$ 和 1 两个数, 如果只许用加法、减法, 1 作被除数的除法三种运算(可以使用括号), 经过六步算出 x^2 , 那么计算的表达式是_____.

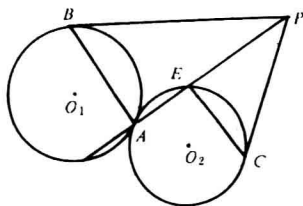
6. 在正实数集上定义一个运算 $*$, 其规则为: 当 $a\geq b$ 时, $a*b=b^a$; 当 $a<b$ 时, $a*b=b^2$. 根据这个规则, 方程 $3*x=27$ 的解是_____.

三、如图, O 为凸五边形 $ABCDE$ 内一点, 且 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$, $\angle 7=\angle 8$,



求证: $\angle 9$ 与 $\angle 10$ 相等或互补.

四、如图 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 外切于 A ，半径分别为 r_1 和 r_2 ； PB 、 PC 分别为两圆的切线， B 、 C 为切点； $PB : PC = r_1 : r_2$ ；又 PA 交 $\odot O_2$ 于 E 点。求证： $\triangle PAB \sim \triangle PEC$ 。



五、有一长、宽、高分别为正整数 m 、 n 、 r ($m \leq n \leq r$) 的长方体，表面涂上红色后切成棱长为 1 的正方体，已知不带红色的正方体个数与两面带红色的正方体个数之和，减去一面带红的正方体个数得 1985。求 m 、 n 、 r 的值。