

数学教育的 现代发展

郑毓信 著

shuxue

jiaoyu

de

xiandai

fazhan



江苏教育出版社



474982

数学教育的现代发展

郑毓信 著



474982

江苏教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学教育的现代发展/郑毓信编著. - 南京: 江苏教育出版社, 1999. 10

ISBN 7-5343-3605-8

I. 数… II. 郑… III. 数学-教育-研究
IV. 01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 36876 号

数学教育的现代发展

郑毓信 著

责任编辑 王建军

出版发行: 江苏教育出版社

(南京马家街 31 号, 邮政编码: 210009)

网 址: <http://www.edu-publisher.com>

经 销: 江苏省新华书店

照 排: 南京展望照排印刷有限公司

印 刷: 常熟市第六印刷厂

(常熟市赵市镇南, 邮政编码: 215518)

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 9.125 字数 222 000

1999 年 10 月第 1 版 1999 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—1 500 册

ISBN 7-5343-3605-8

G·3290 定价: 11.80 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误, 可向承印厂调换

苏教版图书邮购一律免收邮费。邮购电话: 025-3211774, 邮购地址: 南京市马家街 31 号, 江苏教育出版社发行科。盗版举报电话: 025-3300420、3303538。提供盗版线索者我社给与奖励。

前言：一个哲学工作者的 数学教育情结

自 1989 年以来，笔者撰写了不少数学教育的论文。一个哲学系的教授，如此关心数学教育，应当说不是一件十分常见的事，然而，以下的几点理由也许会表明这并非偶然的心血来潮，而在一定程度上可以被看成是一个合理的发展。

首先，无可否认的是，这反映了一定的个人兴趣或取向：在进入南京大学前，笔者曾长期在中学担任数学教师，也正是从那个时候起，自己对于数学教育养成了一种特殊情感。由于这是一种带有较强哲学味道的数学教育情结，因此就直接促使笔者在 1978 年由数学转向哲学，即是报考了南京大学哲学系自然辩证法专业的硕士研究生；然而，由于这归根结蒂地说仍是一种数学教育情结，因此，在十年以后，它又促使笔者重新转向数学教育。

其次，自进入南京大学以后，自己主要从事数学哲学的教学和研究。尽管在这方面取得了一定成果，但又总有一种“曲高和寡”的感觉，或者说，自己总感到数学哲学不应成为一种空洞的理论，而应对实际的数学活动，包括数学研究和数学教育产生一定的促进作用。从而，在继续从事数学哲学研究的同时，自己就有意识地向数学教育靠拢，也即是希望能在数学哲学与数学教育的交会处做出一点切实的工作。

第三，这也许是一个不很贴切的自我评价：自己是可以对数学教育做出一点贡献的。因为，这正是数学教育现代发展的一个重要特点，即是数学教育的深入发展在相当程度上就依赖于正确的理论思维。例如，近年来在国际上被炒得沸沸扬扬的“建构主义”，

事实上就是关于学习活动本质的认识论分析,从而就只有从理论的高度去进行分析我们才能对此做出适当的评价。另外,以下的真实事例显然也表明了对于哲学的高度重视正是国际数学教育界的一个共同趋向:当台湾地区的一个数学教育代表团于1996年对著名的荷兰弗赖登塔尔数学教育研究所进行访问时,首先被问及的就是这样的一个问题:什么是台湾数学教育的哲学基础?显然,对于理论思维的这种需求事实上就为哲学工作者介入数学教育研究提供了现实的可能性;另外,作为一个专门从事数学哲学的研究,并对数学教育有着一定亲身体验的哲学工作者,自己则更把这种客观的需要看成是时代对于个人的一种召唤,也即是个人所应尽的一种责任。

第四,退一步讲,由于自己曾多次出访,因此就有可能较为具体地去了解国际上在数学教育领域中的最新工作。考虑到这些工作无论其成功与否对于我国的数学教育都有着重要的借鉴和启示作用,更由于自己作为一个哲学工作者所采取的视角往往不同于其他的数学教育工作者(或数学家),因此,这也就进一步加强了自己在哲学与数学教育的交会处进行工作的决心。

也正是基于以上的原因,自己所完成的一些数学教育论文主要就集中于这样一些主题:(1)对于数学教育中一些基本问题的哲学分析;(2)对于国际上数学教育最新发展的介绍与分析;(3)对于一些具有较强哲学味的数学教育问题的具体研究。另外,从总体上,理论性和综合性则在很大程度上就可被看成所有这些数学教育论文的一个共同特点。

由于有所偏重,因此自己在数学教育领域中的工作也有着很大的局限性和不足之处。特别是,除去没有能够包括数学教育的各个主要论题以外,我还愿意清楚地指明这样一点:由于离开中学已久,因此对我国的数学教育现状就不能说有着很好的了解,这样,所写的各篇论文也就不能说具有很强的针对性。对于这些缺陷

与不足之处,希望各位专家与广大读者能不吝指教。

最后,应当说明的是,书中所收集的论文都是我在1991年以后完成的(可参见书末所附的论文年表)。其中,约有三分之一是没有发表过或新近完成的;另有三分之一左右虽曾在境外发表,在内地则还是第一次正式刊出;笔者之所以还收入了其他一些论文,或者是因为所论及的题目较为重要,或者是为了使有关的介绍和论述更加完整和系统。为了避免不必要的重复和求得形式上的一致,笔者对所收入的各篇文章作了少量修改;然而,由于写于不同的时间,因此,就有关内容和基本观点而言,在这些文章中仍存在一些不一致的地方。笔者并没有刻意地去消除这些不一致性,因为,在笔者看来,这就清楚地表明了自己所曾实际经历过的一些思想转变。当然,这事实上也是一个认识不断深化的过程,并在一定程度上反映了数学教育的现代发展。

十分感谢江苏教育出版社的各位领导和有关编辑多年来所给予的一贯支持,同时也十分感谢各个有关的刊物和编辑这些年来对自己的极大信任和支持,更感谢数学教育界的各位师长和朋友对于自己的关心和支持。我愿以这一论文集表明自己的一贯心愿:希望能成为数学教育共同体中的普通一员。

郑毓信

1998年8月于南京大学

目 录

前言：一个哲学工作者的数学教育情结	1
数学教育研究之关键性论题与发展趋势	1
由数学哲学到数学教育哲学	17
数学教师应当关注的几个问题	30
数学教育目标刍议	43
数学模式论与模式论的数学教学观	61
对于传统教法设计理论的严重挑战	73
建构主义与数学教育	87
数学学习心理学的现代研究	99
高层次数学思维的研究	108
从理论到实践(1)：从建构主义的观点看有理数的 教学	130
从理论到实践(2)：关于一元一次方程教学的理论 思考	138
“问题解决”与数学教育	148
对于波利亚的“超越”	165
关于“问题解决”的再思考	175
一般化方法在数学解题中的应用与 RMI 方法模式 中的参变数方法	186
算法化原则与数学教育	195
数学方法论的回顾与展望	204

时代的挑战	221
关于“大众数学”的反思	238
千年之交的美国数学教育	252
香港大学数学教育硕士班课程介绍	267
台湾的数学教育研究	274
附录：论文年表	282

数学教育研究之关键性论题与发展趋势*

个人从整体上去论及“数学教育研究之关键性论题与发展趋势”，也许是一件不很明智的事，因为这一题目所涉及的内容实在太多，更要求作者对全局有着较好的了解。然而，笔者在此之所以要提出这样一个题目，与其说胸有成竹，还不如说有一种责任感（或者说，即是“有话于胸，不吐不快”）。具体地说，1997年4月至11月，笔者先是赴英国从事五个月的合作研究，其间并应邀对意大利、荷兰、德国的一些著名大学作了学术访问和讲演，然后，又应香港大学教育学院和台湾省“中央研究院”数学研究所的邀请进行了两个月的访问，从而就有机会对国际上的数学教育研究特别是台湾的数学教育研究作一些实际的了解。作为一个直接结果，笔者曾在另一篇文章（见本书“台湾的数学教育研究”）中对台湾的数学教育情况作了介绍和分析，其中并特别指明了台湾数学教育所存在的一些问题，而这事实上就是“旁观者清”的道理；当然，这种观察与分析也促使笔者对大陆的数学教育作出反思，而最主要的体会之一就是感到我们对世界上数学教育的发展趋势还不能说有很好的了解，更未能从整体上对数学教育的理论研究作出有效的规划与协调。正是出于这样的考虑，笔者感到就有必要对数学教育研究之关键性论题与发展趋势作出深入的研究。作为抛砖引玉，笔者在此就以台湾“国科会”科学教育发展处数学教育学门（科）资源整合规划小组的有关文件（[1]）为基础并结合其他一些材料对此作

* 本文刊于《数学教育学报》，1998年第4期。

出初步的介绍与分析。希望本文能引起数学教育界各位同仁的注意及进一步的研究,特别是,可以依靠集体的力量对数学教育的理论研究从整体上作出有效的规划和协调,从而更好地促进我们的数学教育。

一 数学教育的专门化与国际化

所谓“专门化”,在此是指数学教育已经成为一门专门的学问(数学教育学)。就这方面的发展而言,国际数学教育委员会(ICMI)的成立无疑是一个重要的促进因素;另外,众多数学教育的专门性杂志的存在显然也可被看成所说的专门化的一个证明;最后,特别重要的是,数学教育研究应当说始终有着自己的特殊问题,并又正是围绕着这些问题,系统的数学教育理论正在逐步形成。

由数学教育的专门化我们也就可以立即引出如下的结论:

第一,数学教育不应再被看成完全附属于数学,特别是,尽管我们应当高度重视数学家们关于如何搞好数学教育的真知灼见,更应热烈欢迎并积极吸引数学家们参与数学教育的研究和实践,但是,我们同时也应明确反对以下的现象,即是认为数学家无须对数学教育的问题作出任何较为深入的专门研究就可随意地对此发表指示性的意见,或者说,即是把数学家看成数学教育的唯一主导力量。

第二,数学教育学如有其独立存在的必要,无疑应当突出数学教育的特殊性,从而,数学教育学就不应简单地被等同于“一般教育学+数学的实例”。当然,在此我们也应清楚地看到数学教育与一般教育之间的密切联系,特别是,一般的教育理论对于我们深入开展数学教育的具体研究有其重要的指导意义。从而,在这样的意义上,如何很好地去处理特殊与一般的关系事实上也就可以被看成数学教育理论研究深入发展的一个关键问题。

另外,数学教育日益的国际化显然也向我们提出了这样的“警告”:在今天,“关起门来称大王”的作法必将对数学教育的理论研究(进而,数学教育)造成严重的后果,特别是,我们不能满足于“经验(总结)型”的数学教育研究,不然的话,在数学教育上我们将与先进国家之间出现越来越大的差距,此时再妄谈什么自己的某项研究已达到世界先进水平无疑只能贻笑大方。

二 数学教育的全民化

数学教育的全民化可以说是社会发展的必然产物,对此从有关的众多口号,诸如“大众数学”、“素质教育”、“普及教育”等,就可清楚地看到。从而,主要的问题已不在于如何对这一发展的必然性或必要性作出论述,而应努力弄清什么是“全民化的数学教育”的主要目标,从而有效地防止诸如“大众数学是否就意味着没有数学”此类现象的出现。

具体地说,我们应当明确肯定:“数学教育的全民化”是与“数学上的高标准”不可分割的;但是,什么又是所说的“高标准”的具体内容呢?

正是从这一角度去分析,笔者以为,由美国科学基金会所资助的一项研究“经由数学进行思考”(thinking through mathematics)可说是为我们提供了有益的启示。具体地说,这一研究项目的主要目标就是要探讨“如何教导所有的学生,而不只是少数学生,经由数学课题作思考,成为能思考的人”。显然,这种关于数学教育应以促进学生的思考作为基本目标的提法,与先前即已存在的“数学教育主要地应帮助学生学会数学地思维”的思想是基本一致的,或者说,前者即是从更大的范围为后一思想的合理性作出了论述。

当然,就上述目标的具体实现而言,还有大量的工作要做,特别是,从理论研究的角度看,我们即应注意研究:数学学习究竟能在哪些方面促进学生的思考?数学教学又应如何具体地去促进学

生的思考?

例如,“由于思考活动不是在获得课程内容的知能之后才出现的,而是成功的学习过程中整体的一部分,因此课程内容须能挑动思考的灵感,即使在最不起眼、最基本的课堂情境中,亦可启发思考的泉源。”(参见[1],第7页)另外,除内容的选择外,在此显然还涉及到了具体的教学方法,而国内先前即已提出的“以思想方法的分析带动具体数学知识内容的教学”这一作法更值得大力提倡。

三 建构主义与数学教育哲学

80年代以来,建构主义无疑是数学教育,乃至一般教育领域中最为热门的话题之一,并已经产生了十分巨大的影响,以至在先进国家中现今几乎每个数学教育工作者都自称是一个建构主义者。

然而,一个应当注意的事实却在于,建构主义既非一个系统的(数学)教育理论,也不是一个有着明确目标的(数学)教育改革运动。也正因为此,随着研究的深入,建构主义本身就经历了由一元化、极端主义向多元化、辩证综合的重要变化。由于对建构主义国内尚缺乏较为系统的介绍,因此,笔者将另外撰文对建构主义的现代发展及其教育涵义作出更为专门的分析(可参见本书“对于传统教法设计理论的严重挑战”和“建构主义与数学教育”两篇),在此则仅限于从更为一般的角度对哲学(认识论)与数学教育理论研究之间的关系作出简要的论述。

具体地说,作为学习活动本质的分析,建构主义事实上属于认识论的范畴,从而,在这样的意义上,建构主义在(数学)教育领域内的兴起就表明哲学的思考正在这一领域中发挥越来越大的影响。事实上,作为这种影响的又一实例,我们在此还可提及由静态的、绝对主义的、机械反映论的数学观到动态的、经验和拟经验的、模式论的数学观的转变:由于数学教育即是关于数学的教育,因

此,数学观的上述转变也必然会对数学教育的现代发展产生十分巨大的影响。

一般地说,以上两个论题(即关于学习活动本质以及什么是数学的问题的深入分析)正是数学教育哲学的研究课题,而后者在现代的迅速发展(详见本书“由数学哲学到数学教育哲学”)则就从又一角度表明了数学教育的理论研究正在日趋成熟:人们已能从理论的高度对已有的实践作出自觉的反思,并以此来指导新的活动。事实上,哲学观念(包括数学观和数学教育观)的重要性现已得到了普遍的承认:不仅每个数学教师都是(自觉或不自觉地)在一定哲学思想指导下从事自己的教学活动的,而且,更为重要的是,任何一个数学教育改革运动也必然反映出一定的哲学观念,任何一个深刻的数学教育理论也必然依赖于哲学上的深入分析与思考。

最后,应当强调的是,正确的理论思维事实上也是防止我们成为各种错误的时髦口号(即如所谓的“极端建构主义”等)的不自觉俘虏的一个重要保证。

四 认知科学与数学教育

相对于其他论题而言,这一专题在国内应当说在很大程度上仍是一个有待于积极开发的领域;然而,在笔者看来,这却又直接关系到了数学教育学能否成为一门真正的科学,因为,一切数学教育研究最终都需落实于学生的数学学习活动,从而,就只有对学生在学习数学过程中的思维活动有着较为深入的了解,数学教育学才有可能在科学的基础上得到健康的发展。

也正因为此,数学学习心理学的研究近年来就得到了迅速的发展,特别是,作为国际性的专门组织,PME(国际数学教育心理学组织)更在这一发展中发挥了十分重要的作用。另外,从理论的角度看,我们在此则又应当特别强调由行为主义向认知主义的转变:从70年代起,认知心理学已取代传统的行为主义在心理学研

究中占据了主导地位。

具体地说,后一转变首先涉及到了研究的基本立场:人们现已普遍地认识到,心理学的研究不应再像行为主义者所主张的那样局限于可见行为,而应深入地去了解内在的思维过程,而且,这种研究也是可以在科学的水平上得以进行的。其次,从理论的角度看,上述的转变则又可以说是一种语言(理论框架)的转变,因为,认知心理学的基本观点就是把人类的认知(包括学习)过程看成是一个信息加工的过程,从而,为了对这一过程作出刻画,我们所使用的就不应是传统的“生物学语言”,即如刺激-反应联结等,而应是“信息加工的语言”,即如信息的贮存、提取等。

显然,上述的转变事实上也就为我们深入地去开展数学学习心理学的研究指明了努力的方向,即我们应当针对各个特定的学科内容,逐一地去弄清相应的认知过程与认知结构。

尽管学习心理学主要是一种实证的研究,但是,正如上面所已提及的,我们在此又应明确地肯定理论思维的重要性。事实上,在这两者之间并可说是存在有一种相互依赖、互相促进的辩证关系。首先,正是实证的研究为理论的分析提供了必要的基础。例如,在笔者看来,建构主义就是从认识论的高度对认知心理学的具体研究成果进行分析的直接结果。其次,理论的分析则又为新的实证研究指明了前进的方向。例如,从社会建构主义的立场出发,在数学学习心理学的研究中,我们就不仅应当注意研究学生内在的思维过程,而且也应注意研究师生之间的互动作用。

最后,应当指出的是,与先前的研究相比,现代的心理学研究应当说更多地表现出了跨学科研究的性质,特别是,所谓的“认知科学”,即就是指由心理学、人工智能、神经科学、哲学等多种学科所组成的一个学科群。从而,这事实上也就从又一角度更为清楚地表明了数学教育的深入发展需要各个方面(包括数学家、数学教育工作者、认知科学家和广大的数学教师等)的密切合作。

五 计算机与数学教育

计算机技术的迅速发展普及已经、并将继续对数学教育产生十分巨大的影响,而这又不仅是指计算机为我们改进数学教学提供了一种新的有效手段,而且也是指这将对数学教育的各个方面,包括课程内容的选择与组织方式等,产生巨大的冲击。

一般地说,这一课题的研究事实上也可被看成我国数学教育研究中最为薄弱的环节之一,而由以下的事实我们则就可以清楚地看出迅速改变这种情况的必要性和紧迫性:

具体地说,计算机在数学教学中最初只是作为一种辅助工具得到了应用,即如所谓的“学习机”可以取代教师随时起到出题、评判、补救的作用。尽管所说的这种“辅助作用”并不能被认为必不可少;但是,这方面的实践已经清楚地表明,计算机在数学教学中的作用正在发生重要的变化(参见[5]),特别是,按照现代的观点,计算机的主要作用就在于它为学生学习数学提供一种新的、前所未有的学习环境:“现在的电脑,在适当的设计,可以呈现出动态画面,供学习者观察,从观察中发现某些现象,由发现的现象猜测某些性质,对猜测的性质进行证明或反证,对证明所得的性质加以推广或一般化或特殊化。”(参见[1],第20页)从而,这事实上就是使学生处在了“数学研究”的位置上,也即可以通过自身的探索相对独立地去从事数学的发现和学习。

从而,在上述的意义上,数学学习就已从传统的教师和学生的二元关系演变成了学生、教师和计算机的三元关系。显然,这一转变必将对数学教育的理论研究和实践产生十分深远的影响。

六 问题解决

鉴于笔者已多次撰文对这一主题进行论述(参见本书中所收入的“问题解决与数学教育”、“对于波利亚的‘超越’”、“关于问题

解决的再思考”等多篇文章),在此仅限于指出这样几点:

第一,无论就“问题解决”与数学教育关系的分析或是就这方面的理论研究而言,波利亚都应被看成发挥了特别重要的作用,特别是,波利亚关于数学启发法的研究更可说是为关于解题策略的深入研究奠定了直接的基础。但是,就问题解决的现代研究而言,其主要特征之一即是“对于波利亚的‘超越’”,而后者主要是指这样的认识,即解题策略(以及对于相应知识成分的掌握)并不能被看成决定问题解决能力的唯一要素,恰恰相反,问题解决是一个包含多个环节的复杂过程,从而,我们就应注意揭示那些对于问题解决有着十分重要的影响、但又往往是为人们所忽视的环节,特别是,我们应当努力提高学生的元认知水平,并帮助他们逐步树立较为正确的数学观和数学学习(教学)观。

第二,问题解决,即如何综合地、创造性地应用已有的知识和技能去解决那些非单纯练习题式的问题(包括实际问题 and 源自数学内部的问题),在数学教育中应当说从来就占有一个比较重要的位置;与此相对照,作为 80 年代数学教育改革运动的主要口号,其特殊性主要在于以下的观念,即是认为我们应当以问题解决作为学校数学教育的中心,从而,这事实上就涉及到了教育目标及教学方法等一系列重要问题。

然而,也正是从后一角度去分析,我们即可清楚地看到问题解决作为一个数学教育改革运动的局限性。例如,一个比较明显的问题就在于,就数学教育的基本目标而言,我们显然不应唯一强调解决问题的能力,而应同时注意培养学生提出问题的能力;另外,从已有的实践看,问题解决也比较容易导致这样的偏向,即无论是学生或教师,都容易满足于具体解答的获得,而未能从理论的角度去作出进一步的思考和研究,即如对所已获得结果的正确性作出证明,对结论进行推广,从方法论的角度去作出改进等。也正因为此,有不少数学家提出,与“问题解决”相比,“数学地思维”是一个更为

合适的口号(显然,这与“数学教育的全民化”所引出的思考是十分一致的)。

最后,笔者以为,我们在此并应对基本的教育目标与具体的教学组织方式作出明确的区分。这就是说,尽管我们应当以帮助学生提高解决问题的能力、学会数学地思维作为数学教育的基本目标,但是,这并不意味着在数学教学中我们只能唯一地采取问题解决的形式,勿宁说,这里的关键即在于如何处理好具体数学知识内容的教学与思维方法的训练这两者的关系;另外,一个较为可取的方法就在于,我们应当将思想方法的训练渗透于具体数学知识内容的教学之中,也即应当用思想方法的分析去带动具体数学知识内容的教学,而不是起取代或排斥的作用。

七 民俗数学

民俗数学(ethnomathematics,曾译为“民族数学”)也是 80 年代所提出的一个新的研究课题,其基本的出发点就在于,我们应当清楚地认识到学生可以通过自己的日常生活获得一定的数学知识,而后者与他们在学校中所学到的数学知识(可称为“学校数学”或“正规数学”)很可能是不相同的(或者说,是完全不相干的)。

就这方面的进一步研究而言,笔者以为,事实上包括两个方面的问题,第一,应当如何去看待“民俗数学”,特别是,我们是否应当对此采取视而不见、甚至是完全排斥的态度?第二,我们又应如何去看待民俗数学与学校数学的关系,特别是,我们是否应当努力实现由民俗数学向正规数学的转变?

应当说,研究者对于上述问题的看法是较为一致的。首先,“不管是发达国家还是发展中国家的大多数人民,‘民俗数学’对于他们的一生的需要和应用是必不可少的”。而且,“由于民俗数学知识富有生气的特点,在需要的时候,它就可以作为发展进一步的知识的出发点。”(参见[6],第 82 页)事实上,在不少学者看来,这即就