高中数学

三合一

★新课标解读★
★研究性学习★
★奥赛起跑线★

师大附中专题

不等式

◆学科主编↓王树国
◆本册主编↓符开广

湖南师范大学出版社

SHIDA FUZHONG ZHUANTI

师大附中专题

不　等　式

学科主编◇王树国

本册主编◇符开广

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

不等式 / 符开广主编 .—长沙:湖南师范大学出版社,
2003.4
(师大附中专题)
ISBN 7—81081—244—0/G·162

Ⅰ.不... Ⅱ.符... Ⅲ.不等式—中学—教学参考资料 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 106581 号

不等式

符开广 主编

◉全程策划:李 阳 黄道见
◉组稿编辑:李 阳 黄道见
◉学科主编:王树国
◉本册主编:符开广
◉责任编辑:廖小刚
◉责任校对:蒋旭东
◉出版发行:湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山 邮编/410081
电话/0731.8853867 8872751 传真/0731.8872636
◉经销:湖南省新华书店
◉印刷:望城湘江印刷厂印刷

◉开本:890×1240 1/32
◉印张:6.875
◉字数:277 千字
◉版次:2003 年 4 月第 1 版 2003 年 4 月第 1 次印刷
◉印数:1—10000 册
◉书号:ISBN 7—81081—244—0/G·162
◉定价:9.50 元

目　录

上篇　基础部分

中篇　思维拓展与研究性学习

下篇　竞赛点津

上篇　基础部分

专题知识框架

- 不等式
  - 不等式及其性质
    - 不等式及其性质
    - 作差法比较大小
    - 作商法比较大小
    - 求代数式的取值范围
  - 算术平均数与几何平均数
    - 算术平均数与几何平均数
    - 求函数式的最值
    - 证明不等式
    - 求解实际应用问题
  - 不等式的证明
    - 比较法证明不等式
    - 分析综合法证明不等式
    - 其他方法证明不等式
  - 不等式的解法
    - 一元一次不等式与一元二次不等式的解法
    - 分式不等式与高次不等式的解法
    - 无理不等式的解法
    - 指数不等式与对数不等式的解法
    - 含有绝对值的不等式
  - 有关不等式的实际应用问题
    - 以“$ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2(a,b>0)$”为模型的不等式应用题
    - 以“$ax^2+bx+c\geqslant0(a\neq0)$”为模型的不等式应用题
    - 以“$a-b>0\Leftrightarrow a>b$”为模型的不等式应用题
    - 以等差、等比数列为模型的不等式应用题

高考考点与要求

1. 考试内容

不等式的基本性质，不等式的证明，不等式的解法，含绝对值的不等式.

2. 考试要求

(1)理解不等式的性质及其证明.

(2)掌握两个(不扩展到三个)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理，并会简单的应用.

(3)掌握分析法、综合法、比较法证明简单的不等式.

(4)掌握简单不等式的解法.

(5)理解不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

本专题高考考向

不等式的概念和性质是本章的基础，是证明不等式和解不等式的理论依据，是必考的内容. 不等式的证明和解法是本章的重点. 命制试题比例高，有深度，是不等式试题的主体. 命题形式多样，选择、填空与解答题都可能出现，而且试题层次性强，难易程度差异大，既有基础性试题，也有综合性很强的试题.

由于不等式与其他知识联系紧密，具有一定的"工具性"功能，在涉及量的范围及最值的内容几乎都会用到它. 如求函数的定义域及值域，确定函数的最大值与最小值，求数列的项的最值与前n项和的最值，求直线的斜率k或二次曲线的离心率e的范围，求空间线线、线面、面面间的距离或交角的范围，几何体的表面积或体积的范围，概率的范围等，这就使得不等式在知识网络的交汇点上频频亮相. 还由于对能力的考查是以思维能力为核心，强调探索性、综合性和应用性，而不等式的相关知识恰恰是中学教材中对逻辑思维能力要求最强的内容，这也为不等式在综合题和应用

题中发挥作用创造了条件.

需要注意的是要适当控制难度,因材施教. 如新课程版的考试说明中,对不等式的性质及其证明的要求由“掌握”降为“理解”;对均值不等式只要求掌握两个(不扩展到三个,而不是“或三个”)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数,并会简单的应用.

第一讲
不等式及其性质

三点归纳

◆基点　两个实数的差的符号与它们大小的关系

◆重点　不等式的 6 条主要性质

◆难点　不等式性质的灵活运用

三精导学

◆精讲

1. 两个实数的差的符号与它们大小的关系

实数与数轴上的点是一一对应的. 在数轴上不同的两点中，右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大.

如图 1-1，点 A、B 分别表示实数 a、b，点 B 在点 A 右边，则 $b>a$.

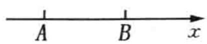

图 1-1

一般地，实数 a、b 的差运算与它们大小的关系如下：

(1) $a>b \Leftrightarrow a-b>0$

(2) $a=b \Leftrightarrow a-b=0$

(3) $a<b \Leftrightarrow a-b<0$

2. 不等式的概念与分类

(1)用不等符号($>$，$<$，$\geqslant$，$\leqslant$，$\neq$)表示不等关系的式子叫做不等式. 用“$<$”或“$>$”符号连结的不等式叫做严格不等式；用“$\leqslant$”或“$\geqslant$”符号连结的不等式叫做非严格不等式.

(2) $a>b$ 与 $c>d$ 叫做同向不等式；$a>b$ 与 $c<d$ 叫做异向不等式.

(3)若不等式 $f(x)>g(x)$ 的解集是 $x\in\mathbf{R}$，则称不等式 $f(x)>g(x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

3. 不等式的主要性质

(1)$a>b\Leftrightarrow b<a$(对称性)

(2)$a>b,b>c\Leftrightarrow a>c$(传递性)

(3)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$(可加性);$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

(4)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$

$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$;$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$

$b>0,\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$

(5)$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$

(6)$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

◆精导

题型 1　作差法比较大小

作差法比较两个实数大小的依据是:$a>b\Leftrightarrow a-b>0$;解题步骤是:作差—变形—定号—结论.

例 1　(1)比较$(a+3)(a-5)$与$(a+2)(a-4)$的大小.

(2)已知$x\neq0$,比较$(x^2+1)^2$与x^4+x^2+1的大小.

解　(1)$(a+3)(a-5)-(a+2)(a-4)=(a^2-2a-15)-(a^2-2a-8)$
$=-7<0$,

∴　$(a+3)(a-5)<(a+2)(a-4)$.

(2)$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=(x^4+2x^2+1)-(x^4+x^2+1)=x^2$,

由$x\neq0$,得$x^2>0$.从而$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$.

例 2　(1)已知$x\in\mathbf{R}$,比较$2x^4+1$与$2x^3+x^2$的大小.

(2)已知$x\in\mathbf{R}$,比较$8x^4+1$与$8x^3+x$的大小.

解　(1)$2x^4+1-(2x^3+x^2)=(2x^4-2x^3)-(x^2-1)=(x-1)(2x^3-x-1)$
$=(x-1)[(x^3-1)+(x^3-x)]$
$=(x-1)^2(2x^2+2x+1)$,

而　$2x^2+2x+1=2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}>0,(x-1)^2\geqslant0$,

∴　$2x^4+1\geqslant2x^3+x^2$,当且仅当$x=1$时等号成立.

(2)记$M=(8x^4+1)-(8x^3+x)$,

则$M=8x^3(x-1)-(x-1)=(x-1)(2x-1)(4x^2+2x+1)$.

由$4x^2+2x+1=3x^2+(x+1)^2>0$,

∴　当$x>1$或$x<\frac{1}{2}$时,$M>0$,即$8x^4+1>8x^3+x$;

当$x=1$或$x=\frac{1}{2}$时,$M=0$,即$8x^4+1=8x^3+x$;

当$\frac{1}{2}<x<1$时，$M<0$，即$8x^4+1<8x^3+x$.

点评　1. 判定两个实数差的符号，对于差的变形一定要到位，将差进行因式分解，或分成若干个非负(正)的因式之和，以能够定号为准.

2. 当差的符号结论不惟一时，要进行分类讨论.

例3　已知$a,b\in\mathbf{R}$，求证：$a^2+b^2+ab+1>a+b$.

证明　$a^2+b^2+ab+1-(a+b)$

$$=(\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2)+(\frac{1}{2}a^2-a+\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}b^2-b+\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}(b-1)^2,$$

而$(a+b)^2\geqslant0,(a-1)^2\geqslant0,(b-1)^2\geqslant0$，三式中等号不同时成立，

故$a^2+b^2+ab+1>a+b$.

例4　设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$，$p>0,q>0$且$p+q=1$，比较$f(px+qy)$与$pf(x)+qf(y)$的大小.

解　$f(px+qy)-[pf(x)+qf(y)]$

$=a(px+qy)^2+b(px+qy)+c-[p(ax^2+bx+c)+q(ay^2+by+c)]$

$=a(px+qy)^2-a(px^2+qy^2)$　（$\because$　$c=pc+qc$）

$=a[p(p-1)x^2+q(q-1)y^2+2pqxy]=a(-pqx^2-pqy^2+2pqxy)$

$=-apq(x-y)^2$.

$\because$　$p>0,q>0,(x-y)^2\geqslant0$，故$pq(x-y)^2\geqslant0$，当且仅当$x=y$时等号成立，

$\therefore$　$a>0$时，$f(px+qy)\leqslant pf(x)+qf(x)$；

$a<0$时，$f(px+qy)\geqslant pf(x)+qf(x)$.

点评　1. 判定两个实数差的大小，要注意观察差式的特点，必要时对差进行合理的拆项、并项、配凑等变形；

2. 在例4中，令$p=q=\frac{1}{2}$得：$a>0$时，$f(\frac{x+y}{2})\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$；$a<0$时，$f(\frac{x+y}{2})\geqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$，该式反映了二次函数$f(x)=x^2+bx+c$的图象当$a>0$时的下凸性和当$a<0$时的上凸性.

题型2　作商法比较大小

作商法比较两个实数的大小的依据是：当$b>0$时，$a>b\Leftrightarrow\frac{a}{b}>1$；解题步骤是：判号—作商—变形—比较商与1的大小—结论.

例5　已知$0<x<1$，比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小.

解　由$0<x<1$，所以$|\log_a(1-x)|>0,|\log_a(1+x)|>0$.

$\therefore$　$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{(1+x)}(1-x)|$.

$\because\ 0<1-x<1, 1+x>1$,

$\therefore\ \log_{(1+x)}(1-x)<0$，且由 $1-x^2<1$ 有 $\frac{1}{1-x}>1+x$,

$\therefore\ |\log_{(1+x)}(1-x)|=-\log_{(1+x)}(1-x)=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}>\log_{(1+x)}(1+x)=1$,

$\therefore\ |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

例 6　已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a\neq b$，比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

解　$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=(\frac{a}{b})^{a-b}$,

当 $a>b>0$ 时，$\frac{a}{b}>1, a-b>0$，$\therefore\ (\frac{a}{b})^{a-b}>(\frac{a}{b})^0=1$;

当 $b>a>0$ 时，$0<\frac{a}{b}<1, a-b<0$，$\therefore\ (\frac{a}{b})^{a-b}>(\frac{a}{b})^0=1$.

$\therefore\ a^ab^b>b^aa^b$.

点评　1. 在比较分式与分式、指数式与指数式、对数式与对数式的大小时，常常运用作商法比较大小；

2. 作商法比较两个实数的大小，判断商式与 1 的大小关系，常常利用指数函数与对数函数的单调性等；

3. 例 5 和例 6 均可以用作差法完成.

例 7　设 $n>1, n\in\mathbf{N}^*$，比较 $\log_n(n+1)$ 与 $\log_{(n+1)}(n+2)$ 的大小.

解　$\log_{(n+1)}(n+2)>0, \log_n(n+1)>0$,

$$\frac{\log_{(n+1)}(n+2)}{\log_n(n+1)}=\log_{(n+1)}n\cdot\log_{(n+1)}(n+2)<[\frac{\log_{(n+1)}n+\log_{(n+1)}(n+2)}{2}]^2$$

$$=[\frac{\log_{(n+1)}n(n+2)}{2}]^2<[\frac{\log_{(n+1)}(n^2+2n+1)}{2}]^2=1,$$

$\therefore\ \log_{(n+1)}(n+2)<\log_n(n+1)$.

点评　本题解答过程中，作商后对于两个正值同底的对数式应用基本不等式"$a,b>0$ 时，$ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$"是要点.

例 8　设 $a,b\in\mathbf{R}^+, n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\frac{a^n+b^n}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^n$.

证明　原不等式等价于 $\frac{a^n+b^n}{2}/(\frac{a+b}{2})^n\geqslant1$.

构造函数 $f(n)=\frac{a^n+b^n}{2}/(\frac{a+b}{2})^n$,

则　$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{2(a^{n+1}+b^{n+1})}{(a^n+b^n)(a+b)}=1+\frac{(a^n-b^n)(a-b)}{(a^n+b^n)(a+b)}$.

$\because\ a-b$ 与 a^n-b^n 同号或同为零，$\therefore\ \frac{(a^n-b^n)(a-b)}{(a^n+b^n)(a+b)}\geqslant0$,

$\therefore\ \dfrac{f(n+1)}{f(n)}\geqslant 1$，且 $f(1)=1$，$f(n)>0$，

$\therefore\ f(n)\geqslant f(n-1)\geqslant\cdots\geqslant f(1)=1$.

点评　证明与正整数 n 有关的递推不等式除了用数学归纳法外，可作商（或差）构造以正整数 n 为自变量的函数 $f(n)$，然后作商（或差）证明 $f(n)$ 的单调性来解决问题.

题型 3　求代数式的取值范围

由不等式的性质求代数式的取值范围的依据是：(1) $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$；(2) $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

例 9　已知 $12<a<60$，$15<b<36$，求 $a-b$ 及 $\dfrac{a}{b}$ 的取值范围.

分析　欲求 $a-b$ 及 $\dfrac{a}{b}$ 的范围，应分别先求出 $-b$ 及 $\dfrac{1}{b}$ 的取值范围，再利用不等式的性质求解.

解　$\because\ 15<b<36$，$\therefore\ -36<-b<-15$，

$\therefore\ 12-36<a-b<60-15$，故 $-24<a-b<45$.

又 $\dfrac{1}{36}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{15}$，$\therefore\ \dfrac{12}{36}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{60}{15}$，故 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{a}{b}<4$.

点评　由于同向不等式没有相减（或除）的性质，故需转化为同向不等式相加及正值同向不等式相乘.

例 10　已知二次函数 $y=f(x)$ 图象过原点，且满足 $1\leqslant f(-2)\leqslant 2$，$3\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(2)$ 的取值范围.

解　依题意，设 $f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$，

则　$f(-2)=4a-2b$，$f(1)=a+b$，$f(2)=4a+2b$，

$$\therefore\ \begin{cases}1\leqslant 4a-2b\leqslant 2,\\ 3\leqslant a+b\leqslant 4.\end{cases}\qquad(*)$$

令 $f(2)=4a+2b=m(4a-2b)+n(a+b)$. 由待定系数法得 $m=\dfrac{1}{3}$，$n=\dfrac{8}{3}$.

由 $\begin{cases}\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{1}{3}(4a-2b)\leqslant\dfrac{2}{3},\\ 3\times\dfrac{8}{3}\leqslant\dfrac{8}{3}(a+b)\leqslant\dfrac{8}{3}\times 4,\end{cases}$　两式相加得　$\dfrac{25}{3}\leqslant 4a+2b\leqslant\dfrac{34}{3}$，

$\therefore\ \dfrac{25}{3}\leqslant f(2)\leqslant\dfrac{34}{3}$.

点评　本题解答常见错误是由（*）式求出 $\begin{cases}\dfrac{7}{6}\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{3}\\ \dfrac{5}{3}\leqslant b\leqslant\dfrac{15}{6}\end{cases}$，然后据此求出 $f(2)=$

$4a+2b$ 的取值范围是 $\frac{24}{3}\leqslant 4a+2b\leqslant\frac{35}{3}$. 错误的根源在于不等式组 $\begin{cases}1\leqslant 4a-2b\leqslant 2\\3\leqslant a+b\leqslant 4\end{cases}$ 与 $\begin{cases}\frac{7}{6}\leqslant a\leqslant\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\leqslant b\leqslant\frac{15}{6}\end{cases}$ 在平面直角坐标系中分别表示不同的区域.

◆精练

双基训练

一、选择题

1. (全国高考题)若 a,b 是任意实数，且 $a>b$，则(　　).

A. $a^2>b^2$　　B. $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$　　C. $\lg(a-b)>0$　　D. $\frac{b}{a}<1$

2. 四个条件：$b>0>a$；$0>a>b$；$a>0>b$；$a>b>0$ 中，能使 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立的充分条件的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 下列命题中，使命题 M 是命题 N 成立的充要条件的一组命题是(　　).

A. M：$a>b$，N：$ac^2>bc^2$

B. M：$a>b,c>d$，N：$a-d>b-c$

C. M：$a>b>0,c>d>0$，N：$ac>bd$

D. M：$|a-b|=|a|+|b|$，N：$ab\leqslant 0$

4. (北京高考题)64 个直径都为 $\frac{a}{4}$ 的球，记它们的体积之和为 $V_甲$，表面积之和为 $S_甲$；一个直径为 a 的球，记其体积为 $V_乙$，表面积为 $S_乙$，则(　　).

A. $V_甲>V_乙$ 且 $S_甲>S_乙$　　B. $V_甲<V_乙$ 且 $S_甲<S_乙$

C. $V_甲=V_乙$ 且 $S_甲>S_乙$　　D. $V_甲=V_乙$ 且 $S_甲=S_乙$

5. 已知实数 x,y,z 满足 $x+y+z=0$，且 $xyz>0$，设 $M=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，则(　　).

A. $M>0$　　B. $M<0$　　C. $M=0$　　D. M 不能确定

6. 设 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a\neq b$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $ab^n+a^nb-a^{n+1}-b^{n+1}$ 的值(　　).

A. 恒为正　　B. 恒为负

C. 与 a,b 的大小有关　　D. 与 n 是奇数或偶数有关

7. 同时满足下列四个条件中的两个，其中与 $\begin{cases}|x|<1\\|y|<1\end{cases}$ 等价的是(　　).

(1) $|x|+|y|<2$　　(2) $(|x|-1)(|y|-1)<0$

(3) $(|x|-1)(|y|-1)>0$　　(4) $x^2+y^2<2$

A. (1)(2)　　B. (1)(3)或(3)(4)

C. (1)(2)或(3)(4)　　D. (2)(3)或(3)(4)

8. 一个半径为 R 的球，在一个水平放置的、内壁为半圆柱形（圆柱底面半径也是 R）的槽内恰好可以无滑动地滚动一周，从槽的一端滚向另一端，设球的表面积为 S，槽的内壁面积为 S'，则 S 与 S' 的大小关系是（　　）.

A. $S=S'$　　B. $S<S'$　　C. $S>S'$　　D. 不确定

9. 对于 $x\in[0,1]$ 的一切值，$a+2b>0$ 是使 $ax+b>0$ 恒成立的（　　）.

A. 充分且必要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 非充分也非必要条件

10. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则下列不等式：

①$a^2+3>2a$；②$a^2+b^2\geqslant 2(a+b-1)$；③$a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$；④$a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$ 中一定成立的是（　　）.

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ①②　　D. ②④

11. 若 $a>0$，且 $a\neq 1$，$p=\log_a(a^3+a^2+1)$，$q=\log_a(2a^2+1)$，则 p,q 的大小关系为（　　）.

A. $p>q$　　B. $p=q$

C. $p<q$　　D. $a>1$ 时 $p>q$；$0<a<1$ 时 $p<q$

12. 设实数 a,b,c 满足 $\begin{cases}a^2-bc-8a+7=0\\ b^2+c^2+bc-6a+6=0\end{cases}$，则 a 的取值范围为（　　）.

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $(-\infty,1]\cup[9,+\infty)$

C. $(0,7)$　　D. $[1,9]$

二、填空题

13. 若 $a>b>0$，且 $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$，则 m 的取值范围是________.

14. 在某次数学考试中，学号为 $i(i=1,2,3,4)$ 的同学的考试成绩 $f(i)\in\{85,87,88,90,93\}$，且满足 $f(1)\leqslant f(2)<f(3)<f(4)$，则这四位同学的考试成绩的所有可能情况有________种.

15. 设 $a>b>0$，则 $\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{2b-a}{b}$，$\dfrac{a}{2a-b}$ 从小到大的顺序是________.

16. 在条件 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ y-x\geqslant \dfrac{1}{2}\end{cases}$ 下，$W=4-2x+y$ 的最大值是________.

三、解答题

17. 已知 $x\in\mathbf{R}$，比较 x^3 与 x^2-x+1 的大小.

18. 如果 $30<x<42$，$16<y<24$，求 $x-2y$ 及 $\dfrac{x}{y}$ 的取值范围.

19. 设 $a>b>0$，比较 $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ 与 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的大小.

20. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，比较 $\sqrt{ab}$ 与 $(a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}$ 的大小.

21. 设 $x>0$ 且 $x\neq1$，比较 $1+\log_x 3$ 与 $2\log_x 2$ 的大小.

22. 已知 $x\in\mathbf{R}$，比较 $\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$ 与 $-\dfrac{1}{13}$ 和 $\dfrac{1}{3}$ 的大小.

答案与提示

一、选择题

1. B　提示：函数 $y=(\frac{1}{2})^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

2. C　提示：$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{a-b}{ab}>0\Leftrightarrow\begin{cases}a>b\\ab>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<b,\\ab<0.\end{cases}$

3. D　选项 A 中，$M\Rightarrow N$ 假，$N\Rightarrow M$ 真；选项 B、C 中，$M\Rightarrow N$ 真，$N\Rightarrow M$ 假.

4. C　$V_{甲}=64\times\frac{4}{3}\pi\times(\frac{a}{8})^3=\frac{4}{3}\pi\times\frac{a^3}{8}$，$V_{乙}=\frac{4}{3}\pi\times(\frac{a}{2})^3$，$\therefore$　$V_{甲}=V_{乙}$；

$S_{甲}=64\times4\pi\times(\frac{a}{8})^2=4\pi a^2$，$S_{乙}=4\pi\times(\frac{a}{2})^2=\pi a^2$，$\therefore$　$S_{甲}>S_{乙}$.

5. B　提示：$M=\dfrac{xy+yz+xz}{xyz}=\dfrac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2xyz}=\dfrac{-(x^2+y^2+z^2)}{2xyz}<0$.

6. B　提示：$ab^n+a^nb-a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\times b^n-(a-b)\times a^n=(a-b)(b^n-a^n)<0$.

7. B　提示：$(|x|-1)(|y|-1)>0\Leftrightarrow\begin{cases}|x|>1\\|y|>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|x|<1,\\|y|<1.\end{cases}$)

8. B　提示：$S=4\pi R^2$，$S'=\pi R\times2\pi R=2\pi^2R^2$，$S<S'$.

9. C　提示：$ax+b>0$ 对 $x\in[0,1]$ 恒成立 $\Rightarrow\begin{cases}a\times0+b>0\\a\times1+b>0\end{cases}\Rightarrow a+2b>0$，其中第二步推理不可逆.

10. C　提示：令 $a=b=1$ 知命题③不成立；令 $a=-1$ 知命题④不成立.

11. A　提示：$(a^3+a^2+1)-(2a^2+1)=a^2(a-1)$，当 $a>1$ 时，$a^3+a^2+1>2a^2+1$，$\therefore$ $\log_a(a^3+a^2+1)>\log_a(2a^2+1)$；当 $0<a<1$ 时，$a^3+a^2+1<2a^2+1$，$\therefore$　$\log_a(a^3+a^2+1)>\log_a(2a^2+1)$.

12. D　提示：由 $\begin{cases}a^2-bc-8a+7=0\\b^2+c^2+bc-ba+6=0\end{cases}$ 得：$\begin{cases}bc=a^2-8a+7, & ①\\b^2+c^2+bc=6a-6. & ②\end{cases}$

由②－①×3 得 $b^2+c^2-2bc=-3(a^2-10a+9)\geqslant0$，　$\therefore$　$1\leqslant a\leqslant9$.

二、填空题

13. $-b<m<0$　提示：由 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{m(a-b)}{b(b+m)}<0$，　$\therefore$　$m(m+b)<0$.

14. 15　提示：$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$ 的可能情况有 $C_5^4=5$ 种；$f(1)=f(2)<f(3)<f(4)$ 的可能情况有 $C_5^3=10$ 种.

15. $\frac{2b-a}{b}<\frac{b}{a}<\frac{a}{2a-b}$　提示：可用作差法或由 $a^2>b\times(2a-b)$ 得到.