



国家出版基金资助项目

费马——业余数学家之王，贵族出身，清廉法官，旁批提猜想。
怀尔斯——腼腆英国男子，蜗居阁楼，八年面壁，一鸣惊人。

这是一个被希尔伯特称为“会下金蛋的母鸡”的数学猜想。

这是一个让引车卖浆之流都趋之若鹜的数学猜想。

这是一个“引无数英雄竞折腰”的数学猜想。

$$Z_V = \frac{1}{u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n u^n}{1-u^n} = \frac{1}{u} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{d|dm} d c_d \right) u^m = u^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} N_{p,m} u^m$$

Thus

$$Z_V(u) = \prod_p \frac{1}{1 - u^{N_p} p} = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_{p,m}}{m} u^m \right)$$

the polar being the

$$Z_V(p^{-1}u) = \prod_p \frac{1}{1 - (N_p u)^{-1} p} = \prod_p \frac{1}{1 - (N_p p)^{-1}}$$

影响数学世界的猜想与问题

佩捷 王忠玉 欧阳维诚 编著

从费马到怀尔斯

——费马大定理的历史

F

rom Fermat to Wiles

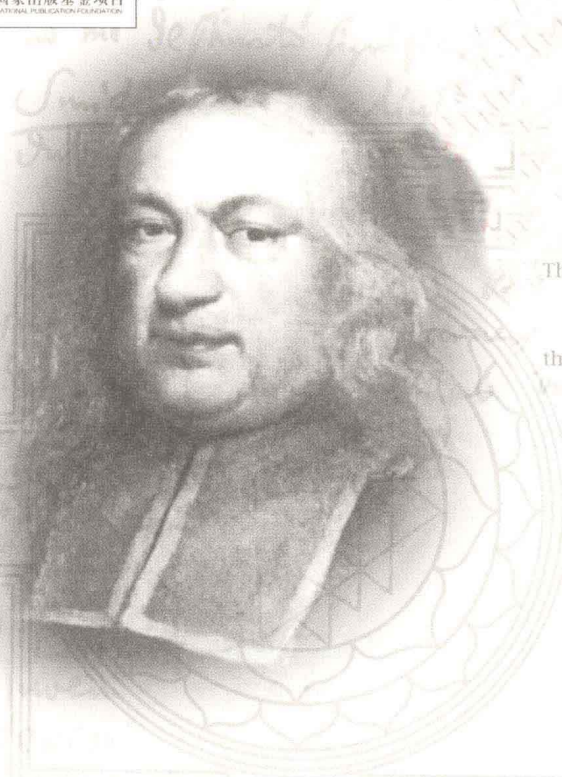
—The History of Fermat's Last Theorem



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目



$$Z(u) = \prod_p \frac{1}{1 - u^{\deg p}} = \prod_1 \left(\frac{1 - u^n}{1 - u^{2n}} \right)^{c_n}$$

x-axis
Real part

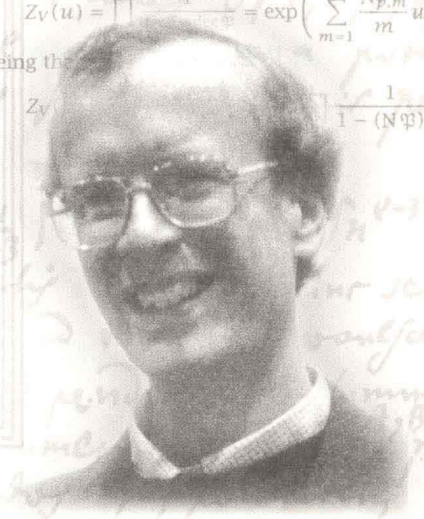
$$\frac{1}{Z(u)} = \frac{1}{u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n n u^n}{1 - u^n} = \frac{1}{u} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{d|m} d c_d \right) u^m = u^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} N_{p,m}$$

Thus

$$Z(u) = \prod_p \frac{1}{1 - u^{\deg p}} = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_{p,m}}{m} u^m \right)$$

the point being that

$$Z(u) = \prod_p \frac{1}{1 - (N_p)^{-s}}$$



影响数学世界的猜想与问题

佩捷 王忠玉 欧阳维诚 编著

从费马到怀尔斯



费马大定理的历史

From Fermat to Wiles

—The History of Fermat's Last Theorem



内容简介

本书介绍了关于费马大定理的历史,并详细介绍了证明费马大定理的艰难历程.
本书适合大中学数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

从费马到怀尔斯:费马大定理的历史/佩捷,王忠玉,
欧阳维诚编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,
2013.3

(影响数学世界的猜想与问题)

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3809 - 5

I . ①从… II . ①佩… ②王… ③欧… III . ①费马最后定理 - 数学史
IV . ①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 234584 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 王勇钢

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 45 字数 830 千字

版 次 2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 3809 - 5

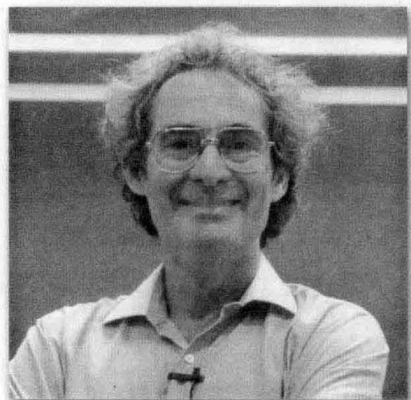
定 价 198.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

从费马到怀尔斯——费马大定理的历史

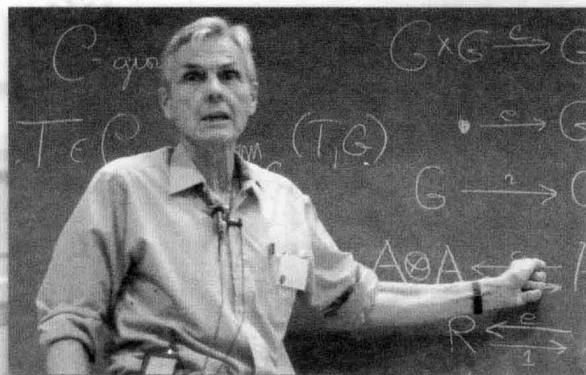


朗兰兹



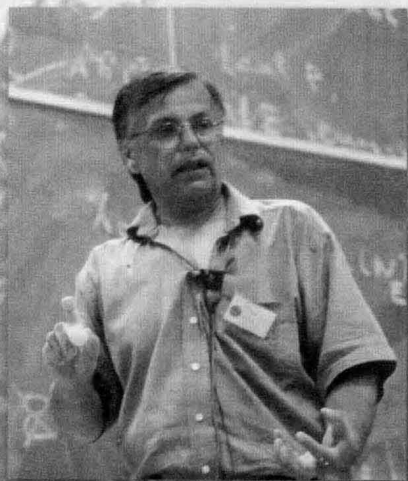
巴里·马祖尔

(1995年8月波士顿会议)



泰特

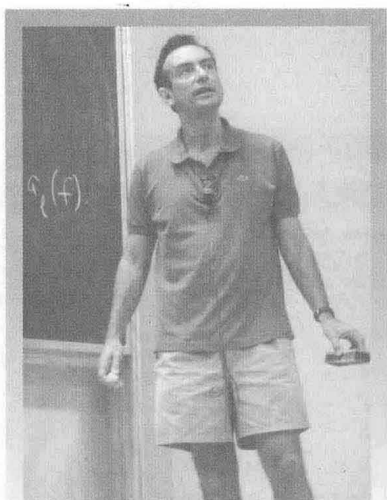
(1995年8月波士顿会议)



格哈德·弗雷

(1995年8月波士顿会议)

从费马到怀尔斯——费马大定理的历史



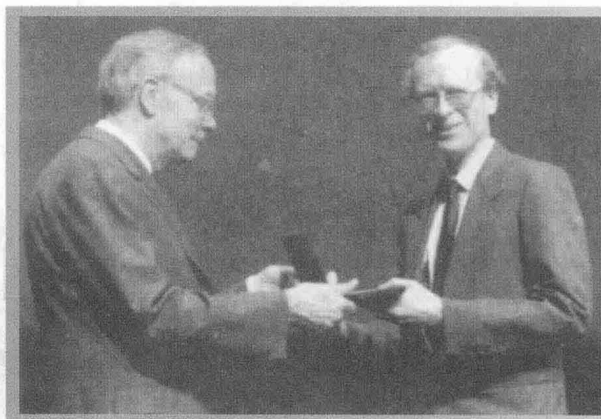
肯·里贝特

(1995年8月波士顿会议)



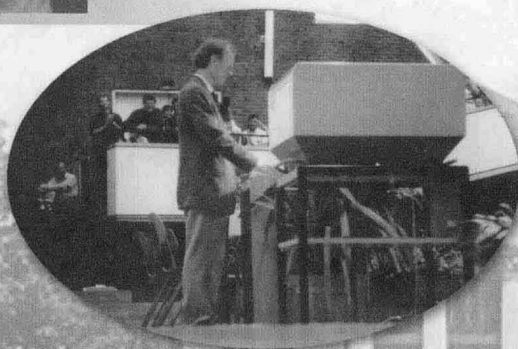
所有的获奖者

大会主席马丁·格罗斯彻甘居幕后



1998年国际数学协会认可
安德鲁·怀尔斯费马大定理
的证明，授予其银质奖章

安德鲁·怀尔斯特殊的
关于“数论20年”的晚上
演讲拥有2300追随者



从费马到怀尔斯——费马大定理的历史



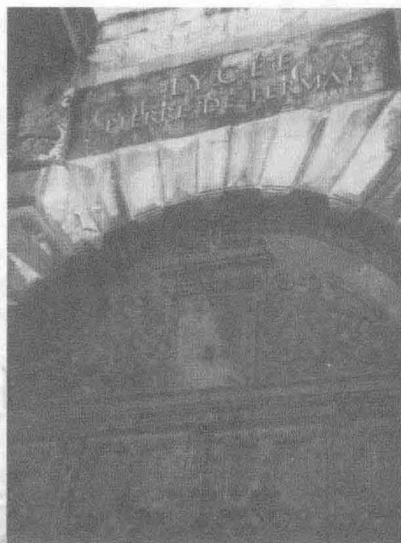
安德鲁·怀尔斯



怀尔斯的一天



费马



费马故居(图卢兹)



高斯

(C.F.Gauss, 1777—1855)

从费马到怀尔斯——费马大定理的历史



updates
Oct 24

MODULAR ELLIPTIC CURVES AND FERMAT'S LAST THEOREM

Andrew Wiles
(October 7, 1994)

INTRODUCTION

An elliptic curve over \mathbb{Q} is said to be modular if it has a finite covering by a modular curve of the form $X_0(N)$. Any such elliptic curve has the property that its Hasse-Weil zeta function has an analytic continuation and satisfies a functional equation of the standard type. If an elliptic curve over \mathbb{Q} with a given j -invariant is modular then it is easy to see that all elliptic curves with the same j -invariant are modular (in which case we say that the j -invariant is modular). A well known conjecture which grew out of the work of Shimura and Taniyama in the 1950's and 1960's ^{states} predicts that every elliptic curve over \mathbb{Q} is modular. However, it only became widely known through its publication in a paper of Weil in 1967 in [We] (as an exercise for the interested reader!), in which moreover Weil gave conceptual evidence for it. Although it had been numerically verified in many cases, prior to the results described in this paper it had only been known that finitely many j -invariants were modular.

In 1985 Frey made the remarkable observation that this conjecture should imply Fermat's Last Theorem. The precise mechanism relating the two was formulated by Serre as the ϵ -conjecture and this was then proved by Ribet in the summer of 1986. Ribet's result only requires one to prove the conjecture for semistable elliptic curves in order to deduce Fermat's Last Theorem.

ANNALS OF MATHEMATICS

TABLE OF CONTENTS

ANDREW WILES. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem	443-551
RICHARD TAYLOR and ANDREW WILES. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras	553-572



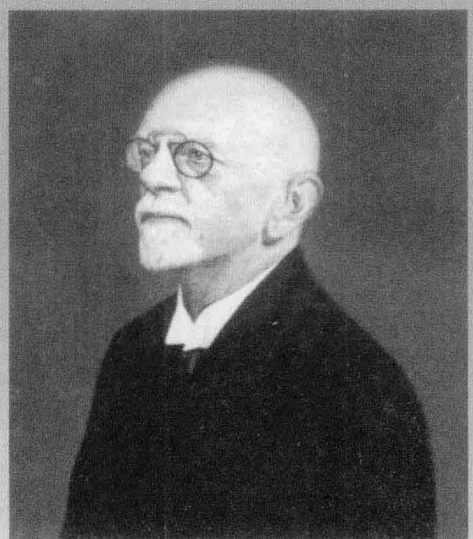
SECOND SERIES, VOL. 141, NO. 3

May, 1995

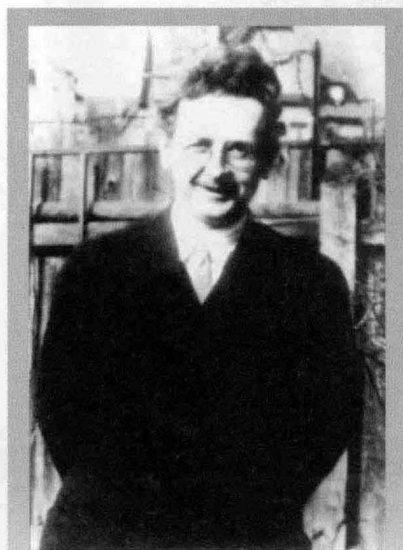
ANMAAH

数学年刊的封面

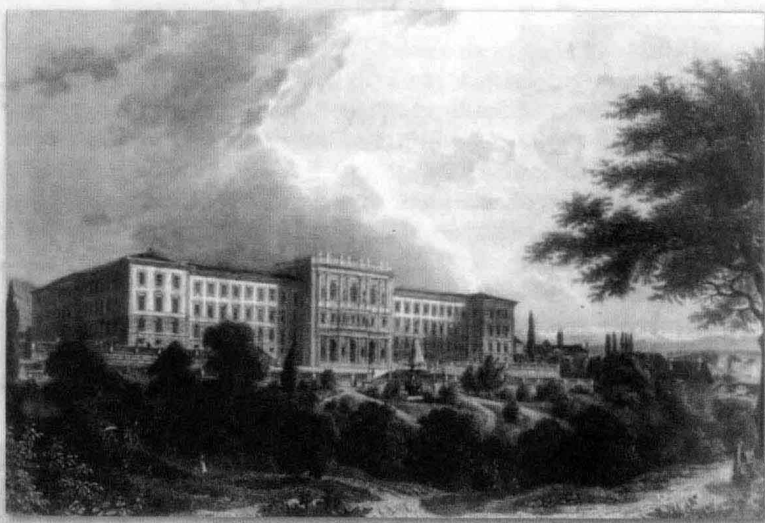
从费马到怀尔斯——费马大定理的历史



世界数学领袖，
德国数学家希尔伯特
(1862-1943)

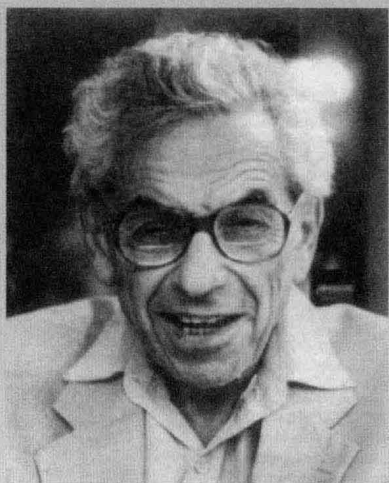


外尔 (1885-1955)

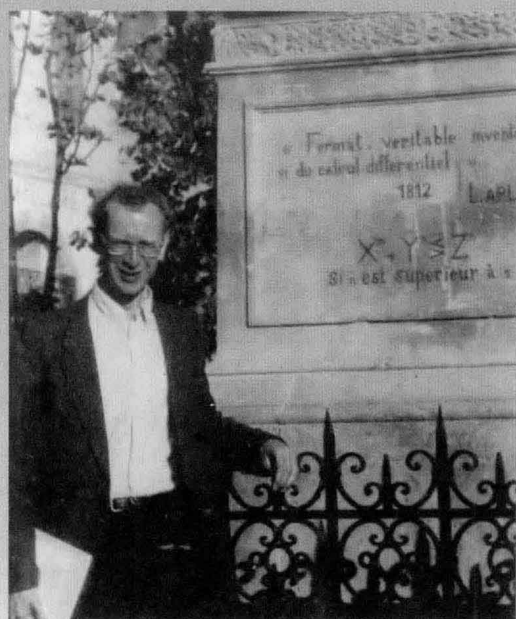


瑞士苏黎世工业大学，1897年
第一届国际数学大会在此举行

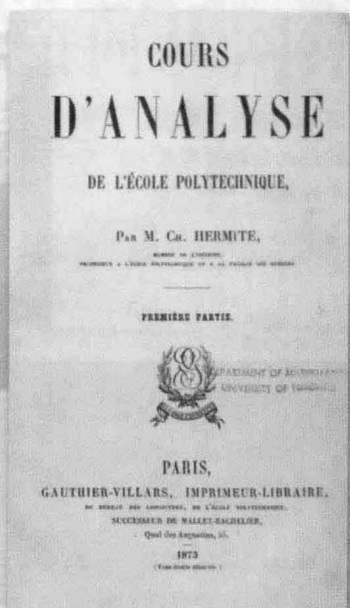
从费马到怀尔斯——费马大定理的历史



匈牙利传奇数学家爱尔特希
(1913—1996)



怀尔斯 (1953—) 证明了费马定理
后在费马墓前留影



1887年的埃尔米特
(1822—1901)
及其《微积分》

从费马到怀尔斯——费马大定理的历史



1621年拉丁文版的
《算术》的封面



法国邮局在费马诞辰400周年
发行的邮票。费马的微笑诱
惑了数学人长久的探索

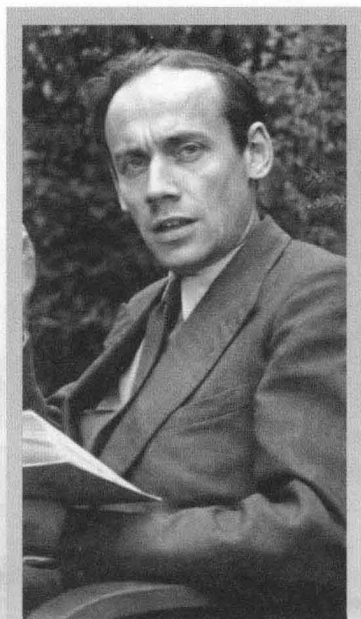


红条中写有
“ANDREW WILES 1995”，
表示费马定理终被怀尔斯
于1995年证明。该邮票由捷
克发行，以纪念2000年世界
数学家年

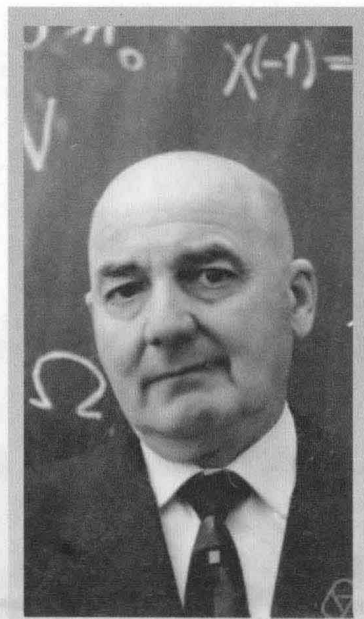


阿贝尔
(N.H.Abel, 1802—1827)

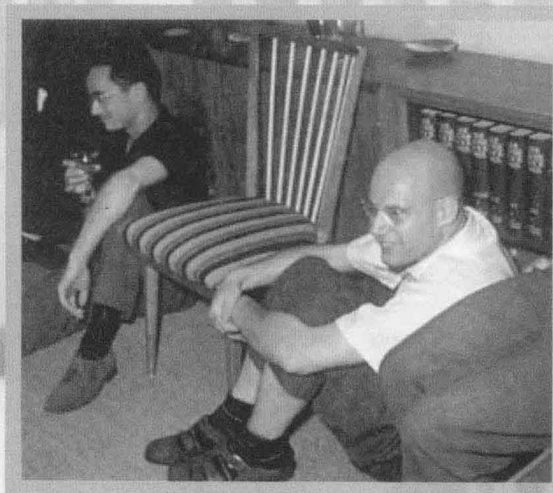
从费马到怀尔斯——费马大定理的历史



埃米尔·阿廷
(Emil Artin)



海尔穆特·哈塞
(Helmut Hasse)



菲尔兹奖1954年
得主赛尔(左)
与1966年得主
格罗滕迪克摄
于1958年



◎ 前

言

天才的产生从来就不是均匀的,中国素有江浙多才子之说,尤盛产状元.明清两朝共有状元郎 203 名,江浙籍人士即有 105 名,占据全国半壁江山.

数学家的产生也有很强的地域性,甚至胡毓达教授还写了一本名为《数学家之乡》的书,专门收集了祖籍温州的中国著名数学家,竟达几十位之多.在国际上数学家群体也是分布不均的,尤以英、法、德、美居多.

本书讲述的是一个源于法国终于英国的数学传奇.提到法国,人们自然会想到埃菲尔铁塔、凯旋门、香榭丽舍大街和拿破仑.其实喜欢人文的我国读者对法兰西文化也是不陌生的,在文学领域中巴尔扎克、斯汤达、大仲马、雨果、乔治·桑的小说曾使我们手不释卷,艺术领域中德拉克洛瓦、科罗、库尔贝、莫奈和米勒的绘画也曾令我们如痴如醉.

如果说到哲学,法国那些灿若繁星的哲学大师则更为我国读者所熟悉,正如黑格尔所断言:关涉到文化有两种最重要的形态,那就是法国哲学和启蒙思想,这里既有深邃理论的探索,也有诚挚感情的抒发,既有《百科全书》主编狄德罗,也有一代宗师,启蒙运动的先驱伏尔泰,以及让·梅利叶、孟德斯鸠、卢梭、孔狄亚克、霍尔马赫、马布利等等.

然而就在我们津津乐道于科罗作品的梦幻境界为绘画增添了诗意,拿破仑三世曾一度撰写《凯撒传》,福楼拜因创作小说

《包法利夫人》而遭控告，波德莱尔的诗集《恶之花》被删砍等文坛掌故时；在人们为拉美特利的“人是机器”，爱尔维修“自爱是人的本性”，摩莱里“私有制是万恶之源”的宏论拍案称奇时，人们可曾想到对法兰西的科学，我们又了解多少呢？作为科学的皇后——数学，法国有什么贡献？法国有哪些数学大师？对这些我们又知道多少呢？

法国是一个科学大国，法国的世界大国地位与其说是由其经济实力所决定，倒不如说是由其科技实力所奠定。蔡元培先生早在 1928 年 2 月 6 日欢迎法国大使马德尔演说词中就指出：

“不久以前，我国某处有一个小学教员，命学生把他们最看得起的一个外国举出来。结果，列强及瑞士、比利时等，都得到一部分学生的崇拜。有的国家，因为它的殖民地是世界上最多；有的国家，因为它的财富是世界上第一；有的国家，因为它的维新 modernis—atio 是世界上最快。法国也得到许多小学生的崇拜，不过小学生崇拜它，不是因为它的殖民地多，不是因为它富庶，也不是因为它能学人家，能维新，却是因为它的文化发达的成就最高。法兰西的文化，在中国小学生的眼光中，已经有这么正确的判断，那在成人的眼光中，更不必说了。

所以我们今天欢迎马德尔公使，不是因为他是强大盛富的国家的代表，法国尽管是强大盛富，却是因为他是文化极高的国家的代表。”

法国是世界上最盛产数学思想的国度，曾经是世界数学的中心。法兰西民族是世界上数学家辈出的民族，翻开任何一本数学著作映入眼帘的总少不了法国数学家的名字，从近代的韦达、笛沙格、笛卡儿、费马、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、傅里叶、柯西、伽罗瓦到现代的庞加莱、勒贝格、托姆及布尔巴基学派。

在这本书中，我们将选取在近代数学中最具传奇色彩的一位法国数学家来讲叙他和他的猜想的故事。要找到这样一位传主是很困难的。美国第一家现代报纸，1833 年 7 月 30 日在纽约创办的《太阳报》的一位编辑约翰·博加特曾说过：“狗咬人不是新闻，人咬狗才是新闻。”同样，写职业数学家如何证明或提出数学猜想，除了专家以外，很少有人会感兴趣的，因为这是意料之中的事，是他在做自己该做的事，不具传奇色彩。说到传奇，那么他应该完全是一位并不专门从事数学的业余数学家，如果他再是世界业余数学家之王就更好了。这个唯一的人选就是法国律师费马。首先，是因为怀尔斯那轰动全球的讲演，怀尔斯的证明气势宏大，可谓黄钟大吕，史无前例。它宣告了费马大定理这桩长达 350 年之久的历史悬案在 20 世纪末彻底结案，数学将翻开新的一页。而且在费马大定理长达 350 年的历史中，它一直充当了人类智力极限的计量表。法国一位悲观的



物理学家曾断言,人类的智力已达到了极限,例证之一就是费马大定理.传说犹太王大卫的戒指上刻有一句铭文“一切都会过去”.但在契诃夫小说中却有一个人反其意,在自己的戒指上也刻了一句铭文“一切都不会过去”.

如果说怀尔斯宣布了费马猜想已经成为过去,那么本书将告诉你:它不会过去,费马永远在我们心中!费马大定理曾引“无数英雄竞折腰”,而人类又以特有的坚韧一步步向目标逼近,可谓筚路蓝缕,艰苦卓绝,在征服费马大定理的征途中留下了一系列里程碑般的著名的定理.这些定理如同英国索尔兹伯里平原上的巨石群那样,永远巍然矗立.可以将其视为数学史上的一大景观和人类对未知领域不懈探索的顽强精神的见证.作为一个现代人没有到此一游的经历,应该是很遗憾的.

更令人感到遗憾的是,最初新闻出版界对此事的冷漠和迟钝,就在全球新闻媒介为怀尔斯而疯狂,世界各大报刊铺天盖地、连篇累牍的时候,我们却出奇地冷静,只有《中国科学报》和《上海经济导报》报导了此消息,是什么原因呢?这似乎与世界名著受冷遇原因相同,在一篇分析名著被搁置的原因的文章中道出了其中的原因:

“我们所处的这个信息、媒介异样发达的时代,有谁想过,恰恰是最容易淹埋真实事物和事物本质的时代呢?因为发达,所有浮泛的、虚假的、劣质的、琐碎的东西得以传播和泛滥、流行和传染,它们实际上正联合起来,谋杀那些最有价值的东西!

这样的谋杀和误导,正时时刻刻发生在我们身边,混乱着我们的生活.而名著的搁置,只是其中的一部分.一切发展和进步都藏着它的悖论和反效果,就像人们都摆脱不掉自己的影子一样,近两年才有了一些转机.”

对于为什么要读名著这个问题,有人的回答是:只有读名著你才可能知道别人的深度.同样只有读这些著名猜想的解决历史你才可能了解人类思维的深度.客观地说:这本书也可以算做一本中级科普读物.科普传统由来已久,科学需要普及,数学尤甚之,因为它面临着双重的需要,大众与数学家.大众需要了解,数学家需要解释.

中国人一直把学习数学当做一件很神圣的事,视为一生中的一件大事.中国有首古诗夸张地表达了这种对数学的崇敬之情.

人生世不能学算,
如空中日月无光;

即学书不学其算，
俾精神减其一半。

十几年前书市曾有一本十分走俏的书叫《曾国藩家书》，多次再版，颇受欢迎。曾国藩在中国历代封疆大吏中可算是博学者（他本人曾是道光进士），并治家有方，《曾文正公全集》颇受现代人欣赏，他本人曾因为不通晓数学而自责，并嘱其子孙认真习之，因此后代多为科技界精英。例如，他的第五代子孙曾宪衡为湖南医科大学教授，曾宪衡之子曾群曾在中国科技大学少年班学习，后入哈佛大学攻读博士学位。

曾国藩本人也大力擢用数学家，清代著名数学家华衡芳曾在曾国藩府中作嘉宾，并多次被保举，一生与曾国藩洋务运动结下不解之缘。而华氏则是极力推崇数学重要性的数学家。他在其长达 12 卷之巨的《学算笔谈》中认为：“故深于算法者可以析至纷之数，穷至赜之理，选至精至奇之器，奇造化之极奥，池天人之秘奥。国家因此而富强，天下俱得其便利，其功岂浅鲜哉！”

由于这种心理价值取向的引导，我国一直有着良好的数学科普传统，而且非常成功。比如早在 1953 年老一辈数学家孙泽瀛曾编写过一本《数学方法趣引》（中国科学图书仪器公司出版）的小书，此书在当时引起强烈反响，其中介绍的“柯克曼女生问题”和“斯坦纳系列问题”吸引了—一个当时哈尔滨电机厂生产科叫陆家羲的统计员，从那时起，他经过 30 多年的拼搏，终于攻克了这一世界难题，成为中国数学界的骄傲。这就是科普书籍该起的作用，它虽然不能告诉你登月球的方法，但它却极力向你讲述那里是琼楼玉宇、玉兔折桂的仙境，让你想往，让你着迷。眼下科普似乎有更重要的功效。因为现实的境况在不断地逼迫人收紧视野，先去关注眼前的物质需要，这使人缺乏理性，粘滞于世俗功利。但有了钱并不能就天圆地方，自足自在，精神生活也是人类所必需的。正如爱德华·杨（E. Young）1728 年所写的一首诗“Love and Fame”中所说

“哲人虽然贫穷，
却是精神富翁；
生性俭朴寡欲，
小获便有大兴。
愚者贪得无厌，
炫耀、虚幻、拚命；
追求物质享受，
每每万事皆空。
贪婪的恶水，



一旦淹没欢乐的土地，
人生的快乐，
就会变成梦幻泡影；
就好似耗子，
钻进了狭窄的风箱，
拚命地挣扎，
也解救不了垂危的生灵。”

精神的滋养是长期的，正如王国维在其《人间词话》中所说“夫物质的文明，取诸他国，不数十年而具矣。独至精神上之趣味，非千百年之培养与一二天才之出不及此”。

当然有人说讲实际、重功利是以西方为榜样，实际上东西方情况完全不同，西方虽然在俗世生活中重功利、重物质，可是在俗世生活外还有宗教生活，可以使人在这个领域内汲取精神的资源，以济俗世生活的偏枯。而在中国，没有超越的领域。一旦受到功利观念的侵袭，则整个人生都陷于不能超拔的境地。

而从某种意义上说，科学特别是自然科学可以暂时充当这种超越的领域。学习科学、热爱科学也可看成是“逃避日常生活的折磨人的粗鲁和绝望的空虚，是由纯个人的存在走向认识客观世界的和谐的形式之一”。爱因斯坦曾说过：“这种动因，可以同满腹忧愁相比较，这种忧愁不可遏止地促使市民从一般喧嚣和混乱的环境中走入平和的高山区域，在这里，山峰上新鲜而怡静的空气渗入肺腑，那仿佛为世代建立的永恒的宁静使他心旷神怡。”

这就是爱因斯坦醉心于科学的自我解释，当然这也可以当做老百姓的一种活法的选择。

如果本着这样的目的，选择数论来作科普是再合适不过的了。因为在数论这门最古老，但又是永葆青春的数学分支中，不时会提出精彩的、独特的问题：就其内容而言，它们是如此初等，每个中学生都能理解，它们通常是关于数字世界遵从的某一个很简单的法则，这些法则对于所有已经验证过的特殊情况都是正确的，但是，要求查明它们实际上是否总是正确的。这样，尽管问题看起来简单，但是，为解决它们，往往要用上好几年的时间，有时，甚至困惑历代最著名的学者达几百年。您应会承认，它们使人心向往。

其次，数学的普及对数学家来说也是至关重要的，往低了说，因为他们花着纳税人的钱在搞研究，他们有义务让纳税人知道他们在干什么。往高了说，社会给了数学家在社会声望排序中很高的地位，数学家也需要向公众解释或说明一下他配占据这一地位。而现在的数学家似乎无不陷入一种矛盾的心理中，一方面是由于庆幸掌握了某种深奥理论和高深技巧所带来的强烈的自豪感，而另一

方面却是惧怕自己的理论不被外界理解而产生的懊恼与孤独感.这有点像白居易《卖炭翁》中卖炭翁“可怜身上衣正单,心忧炭贱愿天寒”的两难境地.

无疑,数学是艰深的,现代数学语言是人类现存的最难掌握的、外行人根本无法破译的语言.

1992年2月26日在挪威特隆赫姆举行了纪念挪威著名数学家李(S. Phus Lie)诞辰150周年的挪威皇家文学理科学院大会上巴思(Nils A. Bass)说:

“用普通语言来叙述一位数学家的工作是一个困难的任务,让我们引用一段西洛(L. Sylow)所做的关于李的纪念演讲:‘数学家比任何其他科学家要更加不幸,因为他的工作不能向受过良好教育的一般公众,甚至科学界的一般听众表述和解释,要是能够感受一个数学定理特殊的美或者欣赏这门科学已经完成部分的推理思路,他就必须是位数学家.’”

数学的极端形式化(从布尔巴基开始的),不仅阻碍了一般公众了解和欣赏数学的可能,而且有时甚至连职业数学家都大叫其苦.特别是有许多人病态地将这种形式化倾向发展到了不可理喻的地步.阿诺德(Arnol'd. Vladimir Igorevic)是前苏联著名数学家,他曾成功地证明了希尔伯特第十三问题(不可能用只有两个变数的函数解一般的7次方程),是一位世界级大师.当有一次记者采访他,问他“关于数学,你念些什么?”他回答说:对于我来说,要想读当代数学家们的著述,几乎是不可能的.因为他们不说“彼嘉洗了手”,而只是写道:

“存在一个 $t_1 < 0$,使得这 t_1 在自然的映射 $t_1 \rightarrow$ 彼嘉(t_1)之下的象属于脏手组成的集合,并且还存在一个 $t_2, t_1 < t_2 \leq 0$,使得 t_2 在上面得到的映射之下的象属于前一句中定义的集合的补集.”

这种令人费解的现象用经济学家“庸俗”的观点解释就是:在市场经济环境下,只有稀缺的才能才可能是高价的.所以社会各行业都有保持从业人员稀少的倾向,于是修高门槛,提高进入成本便是最佳方法,这其中当然包括引入过繁过难的符号(西医用拉丁文写药名,中医用只有行内才认识的天书写药方均同此理).这种形式化倾向在中学数学中也有反映,许多人在评价法国中学数学改革方案时激烈地抨击说:人们往往错误地认为严密的论证就是形式主义.因此,花了很多时间去给出十分抽象的、复杂的定义,使用了过多的符号,以至数学课成了语法修辞课,要学生完成的许多练习往往是毫无趣味的,例如,要教给14岁的学生仿射直线的正式定义是:“一条仿射直线就是一个集合 D ,它带有双射

