普通高等教育“十二五”规划教材

经济应用数学基础

——微积分

主编 李伟军 胡正波 王子龙

航空工业出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

经济应用数学基础——微积分

主　编　李伟军　胡正波　王子龙

航空工业出版社

北　京

内 容 提 要

本书共 8 章，分别介绍了函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，多元函数微积分，无穷级数等内容。附录给出了常用积分表。

本书结构合理、语言简洁、详略得当，既可作为高等院校高等数学课程教材，也可作为读者学习高等数学的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学基础．微积分 / 李伟军，胡正波，王子龙主编．-- 北京 ：航空工业出版社，2012.5

ISBN 978-7-80243-965-8

Ⅰ．①经… Ⅱ．①李… ②胡… ③王… Ⅲ．①经济数学－高等学校－教材②微积分－高等学校－教材 Ⅳ．①F224.0②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 084666 号

经济应用数学基础—微积分

Jingji Yingyong Shuxue Jichu—Weijifen

航空工业出版社出版发行

（北京市安定门外小关东里 14 号 100029）

发行部电话：010-64815615 010-64978486

北京忠信印刷有限责任公司印刷 全国各地新华书店经售

2012 年 5 月第 1 版 2012 年 5 月第 1 次印刷

开本：787×1092 1/16 印张：17 字数：424 千字

印数：1－3000 定价：38.00 元

编者的话

微积分学（Calculus，拉丁语意为用来计数的小石头）是研究极限、微分学、积分学和无穷级数的一个数学分支，并成为了现代大学教育的重要组成部分。历史上，微积分曾经指无穷小的计算。更本质地讲，微积分学是一门研究变化的科学，正如几何学是研究空间的科学一样。微积分学在科技、经济和工程等领域有广泛的应用，用来解决那些仅依靠代数学不能有效解决的问题。

微积分学在代数学、三角学和解析几何学的基础上建立起来，并包括微分学、积分学两大分支。其中，微分学包括求导数的运算，是一套关于变化率的理论。它使得函数、速度、加速度和曲线的斜率等均可用一套通用的符号进行演绎；积分学包括求积分的运算，为定义和计算面积、体积等提供了一套通用的方法。

微积分学基本定理指出，微分和积分互为逆运算，这也是两种理论被统一成微积分学的原因。我们可以以两者中任意一者为起点来讨论微积分学，但是在教学中一般会先引入微分学。在更深的数学领域中，微积分学通常被称为分析学，并被定义为研究函数的科学。

鉴于目前高等院校的快速发展和新型专业的不断出现，以及不同专业对数学要求的差异，高等数学课程也要随之及时作出相应的调整。本书就是贯彻新形势下高等院校的教学改革精神，针对高等院校学生学习的特点，结合地方特色和院校特点而编写的。

总体而言，本教材具有以下特点：

1．本教材完全依据教育部制定的《高等院校高等数学课程教学基本要求》编写，在尽可能保持数学学科特点的基础上，淡化了理论性，强化了针对性和实用性。

2．本教材的每章都有本章导引，每节都有本节导引。在讲解每节知识点时，我们都是从具有实际问题和实际背景的本节导引入手，将问题引入，然后到概念、理论讲解，再到问题解决，即遵循实际——理论——实际的教学过程。

本书由内蒙古师范大学数学科学学院副教授李伟军老师和商丘学院数学教研室胡正波和王子龙老师任主编，由内蒙古师范大学博士王敏、商丘学院赵江、韩艳娜和张卫标老师任副主编，原河南大学教授王国胜和原河南师范大学教授马明书任主审。尽管我们在编写时已尽全力，但限于作者水平有限，各种错误依然在所难免，欢迎各位读者批评指正。

编　者

2012 年 5 月

本书编委会

主　编　李伟军　胡正波　王子龙

副主编　赵　江　王　敏　韩艳娜　张卫标

参　编　徐姣新　吴　娇　孔秋丽

潘莹慧　仝　伟　吴天庆

李春利　佟　凯　张文静

主　审　王国胜　马明书

目　录

第 1 章　函数、极限与连续性

【本章导引】

函数是数学中的一种对应关系，是从非空集合 A 到实数集 B 的对应．简单地说，甲随乙变，甲就是乙的函数；极限是在某种变化状态下对变量变化最终趋势的描述，它既是一个重要概念，也是研究微积分学的重要工具和思想方法；连续性是许多常见函数的一种共同属性，连续函数是微积分研究的主要对象．因此，作为本章主要内容的函数、极限与连续是学习微积分的理论基础，也是学习微积分必须通过的一道门槛．读者在学习这些知识的同时，应注意提升抽象能力、逻辑推理能力和周密思考的能力，这对学好高等数学十分重要．

1.1　初等函数回顾

【本节导引】

已知中国在 1978 年时的国民生产总值(GDP)为 5 亿元，2010 年的 GDP 为 F 亿元，中国 1978～2010 年 GDP 的年平均增长率为 r，请列出 F、S 和 r 之间的函数关系式．

1.1.1　函数的概念

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照确定的法则总有唯一的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$．

数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**．当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，对应的 y 的数值称为函数在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$．当 x 取遍 D 内的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $R=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的**值域**．

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的．而在数学中，有时抽去函数的实际意义，单纯地讨论用算式表达的函数，此时函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的数集，这种定义域称为函数的**自然定义域**．常见的函数的定义域有如下原则：

(1)对于分式函数，分母不能为零，如 $y=\dfrac{x-1}{x+1}, x \neq -1$；

(2)偶次根号下的变量不能小于零，如 $y=\sqrt{x-1}, x \geqslant 1$；

(3)对于对数函数 $y=\log_a x$，规定：底数 $a>0, a \neq 1$，真数 $x>0$；

(4)对于正切函数 $y=\tan x$，规定：$x \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$；

(5)对于余切函数 $y=\cot x$，规定：$x \neq k\pi, k \in Z$；

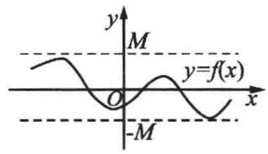
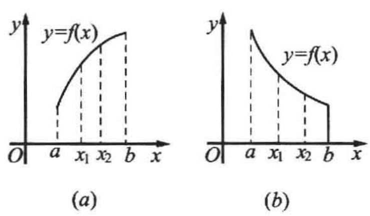
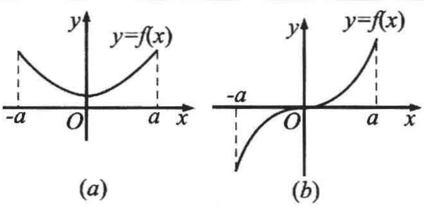
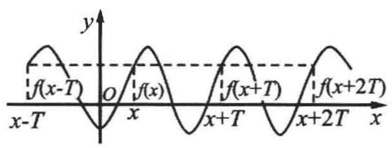
(6)对于反正弦函数 $y=\arcsin x$ 和反余弦函数 $y=\arccos x$ 规定：$-1 \leqslant x \leqslant 1$.

1.1.2　函数的几种特性

函数的特性包括有界性、单调性、奇偶性和周期性．下面将这四种特性的定义、图形和几

何意义列入表 1-1 所示中．

表 1-1

特性	定义	图形	几何意义
有界性	若有正数 M 存在，使函数 $f(x)$ 在区间 D 上恒有 $\lvert f(x)\rvert \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 D 上是有界函数；否则，$f(x)$ 在区间 D 上是无界函数		有界函数的图形夹在两条平行线之间
单调性	若对于区间 D 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加，区间 D 称为单调增区间；若当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调减少，区间 D 称为单调减区间．单调增区间或单调减区间统称为单调区间		单调增加函数图形沿 x 轴正向上升；单调减少函数图形沿 x 轴正向下降
奇偶性	设 D 是关于原点对称的区间，若对于任意 $x \in D$，都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数		奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称
周期性	若存在不为零的数 T，使得对于任意 $x \in D$，有 $x + T \in D$，且 $f(x + T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数．通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期		周期函数的图形在函数定义域内的每个周期有相同的形状

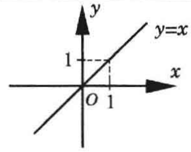
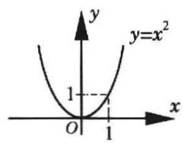
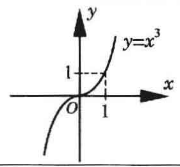
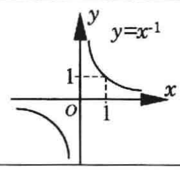
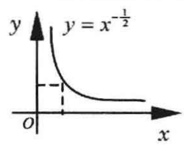
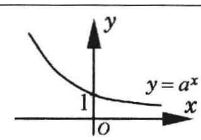
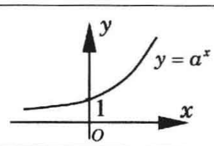
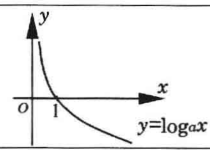
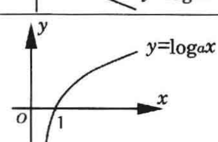
1.1.3 初等函数

1. 基本初等函数

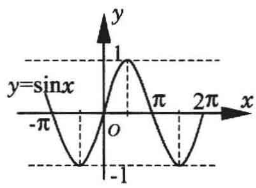
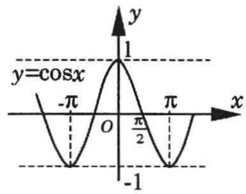
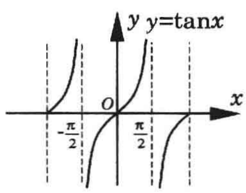
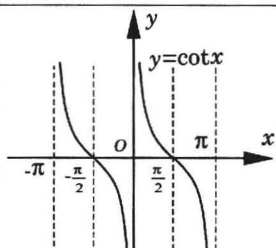
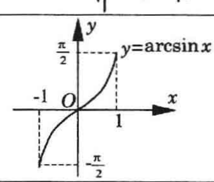
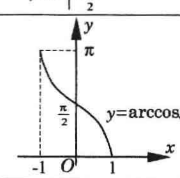
我们把幂函数 $y=x^a\,(a \in R)$、指数函数 $y=a^x\,(a>0, a \neq 1)$、对数函数 $y=\log_a x\,(a>0, a \neq 1)$、三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\sec x, y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**基本初等函数**．为了方便，很多时候也把多项式函数 $y=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$ 看作基本初等函数．这些函数是我们今后研究其他各种函数的基础．

一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图形和特性如表 1-2 所示．

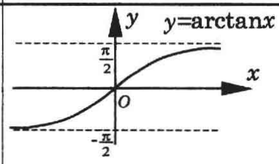
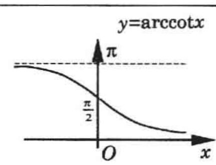
表 1-2

函数类型	函数	定义域与值域	图形	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数，在$(-\infty,0)$内单调减少，在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{-\frac{1}{2}}$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
指数函数	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
对数函数	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加

续表 1-2

函数类型	函数	定义域与值域	图形	特性
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加，在 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 内单调减少 $(k\in Z)$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in Z)$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加 $(k\in Z)$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 单调减少 $(k\in Z)$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界

续表 1-2

函数类型	函数	定义域与值域	图形	特性
反三角函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

2. *初等函数*

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成的、并能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\sin^2 x$，$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$，$y=\ln\cos x$，$y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$ 等都是初等函数.

例 1.1.1　函数 $y=e^{\arcsin x}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

解　令 $u=\arcsin x$，则 $y=e^u$，故 $y=e^{\arcsin x}$ 是由 $y=e^u$，$u=\arcsin x$ 复合而成的.

例 1.1.2　函数 $y=\tan\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

解　令 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，则 $y=\tan u$；再令 $v=\sqrt{x^2+1}$，则 $u=\frac{1}{v}$；再令 $w=x^2+1$，则 $v=\sqrt{w}$；故 $y=\tan\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 是由 $y=\tan u$，$u=\frac{1}{v}$，$v=\sqrt{w}$，$w=x^2+1$ 复合而成的.

3. *分段函数*

若函数 $y=f(x)$ 在它的定义域内的不同区间(或不同点)上有不相同的表达式，则称它为**分段函数**. 例如符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

就是一个分段函数，如图 1-1 所示.

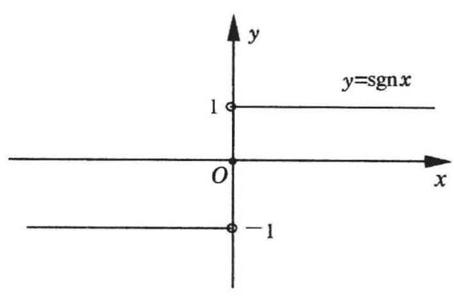


图 1-1

再如函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 也是一个分段函数.

注意　分段函数不是初等函数.

1.1.4 反函数和复合函数

1. 反函数

在实际问题中，自变量 x 和因变量 y 是可以相互转化的. 例如，设物体下落的时间为 t，位移为 s，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的关系为：$s=\frac{1}{2}gt^2$. 这时，t 为自变量，s 为因变量；反过来，如果已知位移 s 求下落时间 t，那么式子将变为 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$，这时，s 为自变量，t 为因变量.

从函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 得到的 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$ 称为函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数. 反函数的定义如下：

定义 1.1.2　设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数，其值域为 A，若对于数集 A 上的每个数，数集 D 中都有惟一确定的一个数 x 使 $f(x)=y$，即 x 变量为 y 的函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 A，值域为 D.

由于习惯上总是将 x 作为自变量，y 作为函数，故 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.1.3　求函数 $y=4x-1$ 的反函数.

解　由 $y=4x-1$，可解得 $x=\frac{y+1}{4}$. 交换 x 和 y 的次序，得 $y=\frac{1}{4}(x+1)$，即 $y=\frac{1}{4}(x+1)$ 为 $y=4x-1$ 的反函数.

2. 复合函数

定义 1.1.3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空，那么，y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

必须指出，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 如，$\ln u$，$u=-1-x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=-1-x^2$ 的值域为 $(-\infty,-1]$，与 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 的交集为空集，因此不能复合.

学习复合函数有两方面要求：一方面，会把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，这个复合过程实际上是把中间变量依次代入、并确定其定义域的过程；另一方面，会把一个复合函数“拆成”(分解)为几个较简单的函数，这些较简单的函数往往是基本初等函数或是基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数.

例 1.1.4　已知 $y=\sin u$，$u=x^2$，试把 y 表示为 x 的函数.

解　因为 $y=\sin u$，而 $u=x^2$，u 是中间变量，所以 $y=\sin u=\sin x^2$.

例 1.1.5　设 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}$，试把 y 表示为 x 的函数.

解　不难看出，u，v 分别是中间变量，故 $y=u^2=\tan^2 v=\tan^2\frac{x}{2}$.

从例 1.1.5 可以看出，复合函数的中间变量可以不限于一个.