清華大學

应用数学论文集

清华大学应用数学系

一九八五年

目录

Riordan的一个定理的组合证明

乘 汝 书

Riordan于1945年给出下列[1]

定理. 从1，2，…，n这n个数中任选k个，要求恰有i个连续点（j称为连续点若j，$j+1$都是被选取的数）。满足以上条件的选法数为

$$f_i(n,k)=\binom{k-1}{i}\binom{n-k+1}{k-i} \tag{1}$$

Riordan利用数学归纳法证明了这个定理。当$i=0$，问题化为Kaplansky定理[2]

$$f_0(n,k)=\binom{n-k+1}{k} \tag{2}$$

Riordan在1968年写的Combinatorial Identities[3]一书中也提到这个定理，通过引进生成函数

$$f_{n,k}(x)=\sum_{i=0}^{k-1} f_i(n,k)x^i$$

并利用数学归纳法证明(1)式。这两个证明都没有给出(1)式右端的组合意义，也就是说，(1)式是怎样得到的没有讲出来。现在我们给出(1)式的组合意义的证明，这样不但揭示出(1)式的实际背景，而且也容易记忆这个公式。

每一个满足已给条件的选法表示为

$$a_1<a_2<\cdots<a_k \tag{3}$$

要确定这个选法，首先确定它的i个连续点的位置。显然，除了最后一个数a_k外，其他$k-1$个数都有可能为连续点。因此连续点的选法数为$\binom{k-1}{i}$。将(3)中的连续数合并为一块，这样这k个被选的数就化为$k-i$块。对每一种选法，这$k-i$块（按原来大小次序排列）与未被选取的$n-k$个数（按原来大小次序排列）排成一种排列

且这 $k-i$ 个块彼此不相邻。因此这 $k-i$ 个块应放在未被选取的 $n-k$ 个数的左端，右端及其任两个数之间共 $n-k+1$ 个位置中的 $k-i$ 个位置上。这种排列共有 $\binom{n-k+1}{k-i}$ 个，于是确定(3)共有 $\binom{k-1}{i}\binom{n-k+1}{k-i}$ 种方法。

现在我们给出，对每一种 i 个连续点的选取及 $k-i$ 个块的位置的选取，怎样来确定相应的选法(3)，为了简单起见，我们通过一个具体例题来说明这种确定的方法。一般情况是相同的。

设 $n=15$，$k=8$，$i=3$。设三个连续点是八个被选出数中的第2，第3，第6个。又 $k-i=5$ 个块在 $(n-k)+(k-i)=12$ 个数与块的排列中的位置为第1，第5，第7，第10，第12个，即

$$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{10}\ \boxed{11}\ \boxed{12}$$

由于第二，第三个选取点是连续点，上面的第五块 $\boxed{5}$ 是由5，6，7三个数拼成的块，而以下各数各增加2。第6个被选取数是第三个连续点，即原来的 $\boxed{10}$ 是由12，13拼成的一个块，以下的个数分别再增加1。最后一个被选取的是15，即原来的 $\boxed{12}$。这样就得到所求的8个数。

$$1,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 12,\ 13,\ 15$$

参考文献

[1] J. Riordan: Permutations without 3-Sequeuces, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 51 (1945), pp. 745-748.

[2] I. Kaplansky: Solution of the "probleme des menages", Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 49 (1943) pp. 784-785.

[3] J. Riordan: Combinatorial Identities, New York, London, Sydney, 1968

（完）

二进位数的两类计数问题

梁汝书

一个n位二进位数可以表示为

$$a_1\ a_2\ \cdots\ a_n,$$

其中$a_i=0$或1，$i=1,2,\cdots n$. n位二进位数共有2^n个，现在我们讨论n位二进位数的两类计数问题。

一．第一类问题

将一个n位二进位数$a_1\ a_2\ \cdots a_n$从左到右扫描，每当遇到010，将它们记录下来，然后从下一个数字开始继续向右扫描，直到完毕。例如下列十位二进位数

$$0\,1\,1\,\underline{0\,1\,0}\,1\,\underline{0\,1\,0}$$

被记录下的010所在位置是$a_4\,a_5\,a_6$及$a_8\,a_9\,a_{10}$，$a_6\,a_7\,a_8$虽然也是010，由于a_6已被记录下来，它就不是被记录下的010.

定义1。$a_{n-2}\,a_{n-1}\,a_n$是被记录下的010的所有n位二进位数的集合记为F_n。

例如上面所给出的十位数0110101010就是F_{10}中的一个数.

问题1．求集合F_n中所包含数的个数f_n.

从定义易得出

$$f_1=f_2=0,\quad f_3=1,\quad f_4=2,\quad f_5=3.$$

又$f_6=6$，这6个数可写成$a_1a_2a_3010$，其中$a_1a_2a_3$是八个三位二进位数中除去001，101外所剩下的六个。

一般f_n的计算在C. L. Liu的书[1]中给出．他先求出f_n的一个递推公式

$$f_n+f_{n-2}=2^{n-3} \qquad (1)$$

然后通过求出f_n的生成函数

$$F(x)=f_3x^3+f_4x^4+\cdots+f_nx^n+\cdots$$

得出 f_n. 现在我们给出 f_n 的另一个递推公式，重新解决这个问题。这个方法特别对以下几个问题的解决是有帮助的。

现在我们研究从怎样的 n 位数 $a_1a_2\cdots a_n$ 在左端加上适当的 a_0 可以得到 F_{n+1} 中的数 $a_0a_1a_2\cdots a_n$. 首先，若 $a_1a_2\cdots a_n\in F_n$，在一般情况下，a_0 可取 0 或 1，使得两个数 $a_0a_1a_2\cdots a_n$ 都属于 F_{n+1}，唯一例外的情况是当 $n\equiv 0\pmod 4$，$n=4m$，且

$$a_1a_2\cdots a_n=\underbrace{1010}\ \underbrace{1010}\cdots\underbrace{1010},$$

这一个属于 F_n 中的数，但当左端加入 $a_0=0$，得到的 $n+1$ 位数不属于 F_{n+1}. 现在我们再来研究，是否存在一个不属于 F_n 中的数，当在它的左端适当加入 a_0 后得到 F_{n+1} 中的数，容易看出，这只有当 $n\equiv 2\pmod 4$，$n=4m+2$，且

$$a_1a_2\cdots a_n=10,\underbrace{1010}_{1},\underbrace{1010}_{2},\cdots,\underbrace{1010}_{m}$$

这个数不属于 F_n，但当加入 $a_0=0$，则得到一个属于 F_{n+1} 中的数，根据以上讨论，得到以下递推公式

$$f_{n+1}=\begin{cases}2f_n, & \text{当 } n \text{ 为奇数；}\\ 2f_n-1 & \text{当 } n\equiv 0\pmod 4\text{；}\\ 2f_n+1 & \text{当 } n\equiv 2\pmod 4.\end{cases}\tag{2}$$

由(2)式可以得到(1)式. 事实上，容易看出，恒有

$$f_{n+1}+f_{n-1}=2(f_n+f_{n-2}),$$

继续使用此式，并利用初始值 $f=0$，$f_3=1$，得到

$$f_{n+1}+f_{n-1}=2^{n-2}(f_3+f_1)=2^{n-2}$$

这就是(1)式.

由(2)式及初始值 $f_1=0$，我们可以逐步地得到 f_2，f_3，f_4，…．现在我们通过生成函数 $F(x)=\sum_{i=3}^{\infty} f_i x^i$ 的计算给出 f_n 的具体表达式。将 $F(x)$ 的两端乘以 $2x$，得到

$$
\begin{aligned}
2xF(x) &= \sum_{i=3}^{\infty} 2f_i x^{i+1} \\
&= f_4x^4+(f_5+1)x^5+f_6x^6+(f_7-1)x+\cdots \\
&= F(x)-x^3+x^5-x^7+\cdots+x^{4n+1}-x^{4n+3}+\cdots
\end{aligned}
$$

移项，

$$(2x-1)F(x)=\frac{-x^3}{1+x^2},$$

或

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x^3}{(1+x^2)(1-2x)} = \frac{x^3}{5}\left(\frac{1+2x}{1+x^2}+\frac{4}{1-2x}\right) \\
&= \frac{x^3}{5}\left[\begin{array}{l}(1+2x)(1-x^2+x^4-x^6+-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots) \\ +4(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots+2^nx^n+\cdots)\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

比较两端 x^n 的系数，得到

$$
f_n=\begin{cases}\dfrac{2^{n-1}+(-1)^{\frac{n}{2}}2}{5}, & \text{当}n\text{为偶数；}\\[2ex] \dfrac{2^{n-1}+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{5} & \text{当}n\text{为奇数．}\end{cases} \qquad (3)
$$

定义2．只有 $a_{n-2}a_{n-1}a_n$ 是被记录下的010的 n 位二进位数的集合记为 G_n．

显然 G_n 是 F_n 的一个子集合。

问题2．求集合 G_n 中数的个数 g_n．

由定义易得 $g_1=g_2=0$，$g_3=1$，$g_4=2$，$g_5=3$，$g_6=5$．G_6 是将 F_6 中的010010去掉后所得到的子集合。

这个问题在上述C．L．Liu书中也曾解过，他给出 g_n 的一个较复杂的递推公式

$$g_n+g_{n-2}+g_{n-3}\cdot 2^0+g_{n-4}\cdot 2^1+g_{n-5}\cdot 2^2+\cdots+g_3\cdot 2^{n-6}=2^{n-3} \qquad (4)$$

然后计标出 g_n 的生成函數 $G(x)=\sum_{i=3}^{\infty} g_i x^i$. 现在我们给出 g_n 的一个较简单的递推公式，当 $n\geq 3$,

$$g_{n+1}=2g_n-g_{n-1}+g_{n-2} \tag{5}$$

利用此递推公式及初始值 $g_1=g_2=0$, $g_3=1$ 可以较易地逐个求出 g_4, g_5, g_6, ……。

现在我们来证明公式(5)，将 G_n 中的數分成两类。第一类的 $a_1=1$，容易看出这一类共包括 g_{n-1} 个數，剩下的數构成 $a_1=0$ 的一类，这一类包括 g_n-g_{n-1} 个數。由此又可看出下列结果：

在 G_n 中 $a_1a_2=11$ 的數共有 g_{n-2} 个；

在 G_n 中 $a_1a_2=10$ 的數共有 $g_{n-1}-g_{n-2}$ 个；

在 G_n 中 $a_1a_2\neq 10$ 的數共有 $g_n-g_{n-1}+g_{n-2}$ 个。

现在我们从 G_n 来建立 G_{n+1}，若 $a_1a_2\cdots a_n\in G_n$，且 $a_1a_2\neq 10$，这时取 $a_0=0$ 或 1，得到 G_{n+1} 中的两个數 $a_0a_1a_2\cdots a_n$. 若 $a_1a_2=10$，这时只能取 $a_0=1$ 使得 $a_0a_1a_2\cdots a_n\in G_{n+1}$. 而且 G_{n+1} 中的每一个數都可这样得到，由此得到递推公式

$$g_{n+1}=2(g_n-g_{n-1}+g_{n-2})+(g_{n-1}-g_{n-2}).$$

或

$$g_{n+1}=2g_n-g_{n-1}+g_{n-2}.$$

为了求出 g_n 的生成函数 $G(x)$，今将上式两端乘以 x^{n+1}，並将 n 从3到 ∞ 求和，得到.

$$\sum_{n=3}^{\infty} g_{n+1}x^{n+1}=2x\sum_{n=3}^{\infty} g_n x^n-x^2\sum_{n=3}^{\infty} g_{n-1}x^{n-1}+x^3\sum_{n=3}^{\infty} g_{n-2}x^{n-2}$$

利用 $g_1=g_2=0$, $g_3=1$，上式化为

$$G(x)-x^3=2xG(x)-x^2G(x)+x^3G(x).$$

解出
$$G(x)=\frac{x^3}{1-2x+x^2-x^3}$$
经过长除法，得到
$$G(x)=x^3+2x^4+3x^5+5x^6+9x^7+16x^8+\cdots\cdot$$
利用生成函数方法求 g_n 并不比用公式(5)简单。

定义3. 将 n 位二进位数中不出现010的数的集合记为 H_n。

问题3. 求 H_n 中数的个数 h_n。

前几个 h_n 的值容易计算出：$h_1=2$，$h_2=4$，$h_3=7$，为了求出其他的 h_n，可用求 g_n 的递推公式的方法得到相同的递推公式，当 $n\geqslant 3$，
$$h_{n+1}=2h_n-h_{n-1}+h_{n-2} \tag{6}$$
同样可求出 h_n 的生成函数 $H(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}h_i x^i$，
$$H(x)=\frac{2x+x^3}{1-2x+x^2-x^3},$$
经长除法得到
$$H(x)=2x+4x^2+7x^3+12x^4+21x^5+\cdots\cdot$$
定义4. 在 n 位二进位数中既不出现010，也不出现101的数的集合记为 O_n.

O_n 是 H_n 的一个子集合.

问题4. 求集合 O_n 中数的个数 o_n.

前几个 o_n 的值为：$o_1=2$，$o_2=4$，$o_3=6$，要计算一般的 o_n，先求 o_n 的一个递推公式.

若 $a_{n-1}=a_n$，则 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\in O_n$ 的充要条件是 $n-1$ 位二进位数 $a_1a_2\cdots a_{n-1}\in O_{n-1}$，若 $a_{n-1}\neq a_n$，则 $a_1a_2\cdots a_{n-1}$

$a_n \in O_n$ 的充要条件是 $a_1 a_2 \cdots a_{n-2} \in O_{n-2}$，由此可知

$$O_n = O_{n-1} + O_{n-2} \tag{7}$$

考虑初始条件 $O_1 = 2$， $O_2 = 4$，得到

$$O_n = 2f_n,$$

这里 f_n 是第 n 个 Fibonnacci 数，[2] 其中 $f_1 = 1$， $f_2 = 2$，当 $n \geq 2$，$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$．于是

$$O_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

现在我们给出 O_n 的另一种解法。

对每一个 n 位二进位数 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 按下列规则对应唯一的一个 $n-1$ 位二进位数 $b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$．若 $a_i = a_{i+1}$，规定 $b_i = 1$；若 $a_i \neq a_{i+1}$，规定 $b_i = 0$，例如十位数 1011000011 对应的九位二进位数是 001011101．反之，对每一个 $n-1$ 位的二进位数 $b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$ 有且恰有两个 n 位二进位数对应它。例如上面的十位二进位数外还有 0100111100 也对应着该九位数。一般，若

$$a_1 a_2 \cdots a_n \longrightarrow b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$$
$$a_1' a_2' \cdots a_n' \longrightarrow b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$$

则 $a_i + a_i' = 1$． $i = 1, 2, \cdots, n$．反之亦然。

容易看出，$a_1 a_2 \cdots a_n \in O_n$ 的充要条件是它的对应的 $b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$ 中没有两个 0 相邻，因此计算 O_n 的问题化为计算没有两个 0 相邻的 $n-1$ 位二进位数的个数，要计算后者，按 $b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$ 中 0 的个数 r 分成若干类，这里 $0 \leq r \leq [\frac{n}{2}]$．因此共有 $[\frac{n}{2}]+1$ 类。

对有 r 个 0 的一类，将 $n-1-r$ 个 1 排成一行，在它们的左端，右端及其 $n-2-r$ 个间隔共 $n-r$ 个位置任选 r 个将 r 0 放进去．这样就得到这一类的二进位数 $b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$ 共有 $\binom{n-r}{r}$ 个，而总的 $b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$ 的个数为

$$\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-r}{r}$$

于是

$$O_n = 2\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-r}{r}$$

右端和式的值为 f_n，见[2]中第四章第70页。这样，我们重新证明了 $O_n = 2f_n$.

上面几个问题中的 F_n，G_n，H_n，O_n 都是有关 010 的问题，它们所包含数的个数 f_n，g_n，h_n，O_n 之间必然会存在一些关系式，现在我们给出其中的几个。

定理 1. 当 $n \geqslant 2$,

$$g_n = 2h_{n-1} - h_n \tag{8}$$

证. 对于 H_{n-1} 中的任一个数

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$$

我们将 0 或 1 放在它的右端，得到两个 n 位二进位数

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1}\ 0, \quad a_1 a_2 \cdots a_{n-1}\ 1.$$

后一个数显然在 H_n 内，而前一个数或者在 G_n 内，或者在 H_n 内，视 $a_{n-2}a_{n-1}$ 是 01 或不是 01 而定。而且 H_n 及 G_n 中的每一个数都可以通过 H_{n-1} 中的数在它的右端加上 1 或 0 得到。于是得到等式

$$2h_{n-1} = h_n + g_n.$$

移项，得到定理 1 的结果。

定理 2. 当 $n \geqslant 4$,

$$g_n = h_{n-2} - h_{n-3} \tag{9}$$

证. 利用定理 1 及 h_n 的递推公式.

$$g_n = 2h_{n-1} - h_n = 2h_{n-1} - (2h_{n-1} - h_{n-2} + h_{n-3})$$
$$= h_{n-2} - h_{n-3}.$$

这个结果也可以直接给出，根据定义，G_n中的每一个数可以通过H_{n-1}中末两位数是01的数加上0得到，因此g_n就是末两位数是01的H_{n-1}中的数的个数.

H_{n-1}中末位数字是1的数的个数显然等于H_{n-2}中数的个数，即h_{n-2}，又H_{n-1}中末两位数字是11的数的个数与H_{n-3}中的数的个数相等，即h_{n-3}，因此，H_{n-1}中末两位数字是01的数的子集合就是H_{n-1}中末位数字为1的子集合去掉H_{n-1}中末两位数字为11的子集合所得到的余子集合，从而得到它所包含数的个数为$h_{n-2} - h_{n-3}$，由以上讨论，得到 $g_n = h_{n-2} - h_{n-3}$.

<u>定理3</u>. 当 $n \geqslant 6$，

$$f_n = g_n + f_3 g_{n-3} + f_4 g_{n-4} + \cdots + f_{n-3} g_3 \qquad (10)$$

证. G_n是F_n的一个子集，今研究F_n中不属于G_n的数所构成的子集$F_n \setminus G_n$所含数的个数. 设

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-3}\, 0\,1\,0$$

属于$F_n \setminus G_n$. 则在$a_1 a_2 \cdots a_{n-3}$中必出现010. 今将这些数按第一次出现010的位置分成$n-5$类。第i类为第一次出现010的位置为$a_i\, a_{i+1}\, a_{i+2}$，$1 \leq i \leq n-5$. 这一类中数的前$i+2$个数字$a_1 a_2 \cdots a_i\, a_{i+1}\, a_{i+2}$必属于$G_{i+2}$，而后$n-i-2$个数字$a_{i+3}\, a_{i+4} \cdots a_{n-3}\, 0\,1\,0$必属于$F_{n-i-2}$. 这一类的数的个数为$g_{i+2} f_{n-i-2}$. 将这些类合併，得

$$f_n - g_n = \sum_{i=1}^{n-5} g_{i+2} f_{n-i-2},$$

移项，得到（10）式。

类似定理3，我们有

定理4．当$n\geqslant 3$，

$$h_n+g_3 2^{n-3}+g_4 2^{n-4}+\cdots+g_{n-1}2+g_n=2^n \qquad (11)$$

证．将2^n个n位二进位数分为两类：第一类的数不出现010，这一类共有h_n个数；第二类的数出现010，再按第一次出现010的位置分成$n-2$个子类．第一次出现010在$a_{i-2}a_{i-1}a_i$处的n位二进位数$a_1a_2\cdots a_n$的个数为$g_i 2^{n-i}$．将这两类合併得到

$$h_n+\sum_{i=3}^{n} g_i 2^{n-i}=2^n.$$

这就证明了（11）式。

为了得到下一个定理，我们先介绍下面的

引理．在所有不出现101的n位二进数的集合H_n'与集合H_n间存在着一一对应关系，从而H_n'中所含的数共有h_n个．

证．若$a_1a_2\cdots a_n\in H_n$，则$a_1'a_2'\cdots a_n'\in H_n'$，这里$a_i'=1-a_i$，$i=1,2,\cdots,n$，这样，在$H_n$与$H_n'$间建立一一对应，从而二者含有相同个数的数。

定理5．当$n\geqslant 5$，

$$h_n-O_n=h_{n-4}+\frac{O_1}{2}h_{n-5}+\frac{O_2}{2}h_{n-6}+\cdots+\frac{O_{n-5}}{2}h_1+\frac{O_{n-4}}{2}+\frac{O_{n-3}}{2} \qquad (12)$$

证．在H_n中除去O_n中的数，剩下子集合$H_n\setminus O_n$中的数不出现010，但一定出现101，今将这个余子集合$H_n\setminus O_n$中的数按第一次出现101的位置$a_ia_{i+1}a_{i+2}$分成$n-2$类，$i=1,2,\cdots,n-2$．

第一类，即$i=1$，其中任一数的前三个数字是101，第四个数字必为1（否则$a_2a_3a_4=010$，是与假定矛盾）．这一类的数表示为$1011a_5a_6\cdots a_n$，

且$a_5 a_6 \quad a_n \in H_{n-4}$这一类共有$h_{n-4}$个数。

对第i类，$2 \le i \le n-4$，这一类的数的$a_i\ a_{i+1}\ a_{i+2} = 101$，这时$a_{i-1}$，$a_{i+3}$都必为1．这一类的数可表示为

$$a_1 a_2 \cdots a_{i-2}\ 11011 a_{i+4} \cdots a_n,$$

且$a_1 a_2 \cdots a_{i-2} 1 \in O_{i-1}$，$a_{i+4} \cdots a_n \in H_{n-i-3}$．又$O_n$中$a_n$ 1的数与O_n中a_n 0的数间存在一一对应关系，它们所包括数的个数相同，这样得到这一类的数的个数为$\frac{O_{i-1}}{2} h_{n-i-3}$．

若$i = n-3$，$i = n-2$，这两类的数的个数分别为$\frac{O_{n-4}}{2}$，$\frac{O_{n-3}}{2}$．

将以上各类合併，得到

$$h_n - O_n = h_{n-4} + \sum_{i=2}^{n-4} \frac{O_{i-1}}{2} h_{n-i-3} + \frac{O_{n-4}}{2} + \frac{O_{n-3}}{2}.$$

(12)式得到证明.

最后，我们将n位二进位数的一些子集所包含数的个数列于下表

子　　集　　合	包含数的个数
1. 不包含010，也不包含101.	O_n
2. 不包含010，(或不包含101)	h_n
3. 不包含010，但包含101 (或不包含101，但包含010)	$h_n - O_n$
4. 包含010 (或包含101)	$2^n - h_n$
5. 至少包含010及101中的一个	$2^n - O_n$
6. 恰包含010及101中的一个	$2(h_n - O_n)$
7. 既包含010，又包含101	$2^n - 2h_n + O_n$

前六个的结果是显然的，我们只证明最后一个，这个子集合是从上面的第四个子集合减去第三个（括弧中的）子集合所得到的余子集合，所以它包含数的个数为

$$2^n-h_n-(h_n-O_n)=2^n-2h_n+O_n$$

这个结果也可以从第五个子集合除去第三个子集合得到。也可以从全部n位二进位除去子集合1与子集合6得到。

二. 第二类问题

一个n位二进位数$a_1a_2\cdots a_n$中，若$a_i=a_{i+1}$，称i是这个数的一个连续点；若$a_i\neq a_{i+1}$，称i为一个间断点，对每一个n位二进位数连续点与间断点个数之和为$n-1$. 若在连续点处放1，在间断点处放0，得到的$n-1$位二进位数就是前面所提到的$b_1b_2\cdots b_{n-1}$.

对一个n位二进位数$a_1a_2\cdots a_n$，若$a_ia_{i+1}\cdots a_j$中的数字都相同，即$a_i=a_{i+1}=\cdots=a_j$，且与其相邻的数字（如果存在的话）不相同，即$a_{i-1}\neq a_i\neq a_{j+1}$，我们称$a_ia_{i+1}\cdots a_j$构成该$n$位数的一个连续块，若一个$n$位二进位数有$r$个连续块，则相应的$b_1b_2\cdots b_{n-1}$中恰有$r-1$个0.

<u>问题1</u>. 所有0都是间断点，而1的连续点个数为r的n位二进位数的集合记为$F(n,r)$.

求$F(n,r)$中数的个数$f(n,r)$.

这个问题在C. L. Liu书中也曾解决过，这里给出另外两种解法（还有一个同问题2的解法），这两个解法不但方法简单，而且还给出$f(n,r)$的显式表达式.

<u>解法1</u>. 利用相应$b_1b_2\cdots b_{n-1}$的计数。

先求$F(n,r)$中$a_1=1$的子集合包含数的个数。若$1a_2a_3\cdots a_n\in F(n,r)$，则相应的$b_1b_2\cdots b_{n-1}$的每一个包含0的连续块（可能除去最后的一块）中的0的个数必为偶数，否则原来的n位二

进位数将有两个相邻的0．又$b_1b_2\cdots b_{n-1}$中恰有r个1，今将其余的$n-1-r$个0分成$\left[\frac{n-1-r}{2}\right]$对，（如果$n-1-r$是奇数，剩下的一个0必为$b_{n-1}$），这样，所求的$b_1b_2\cdots b_{n-1}$的个数与$r$个1，$\left[\frac{n-1-r}{2}\right]$对0的不同排列的个数相同，而后者为

$$\binom{r+\left[\frac{n-1-r}{2}\right]}{r}$$

这也是F(n,r)中$a_1=1$的数的个数．

若F(n,r)中$a_1=0$，这时$a_2=1$，用上面结果可知这一类所包含数的个数为

$$\binom{r+\left[\frac{n-2-r}{2}\right]}{r}.$$

将以上两类合并得到

$$f(n,r)=\binom{r+\left[\frac{n-1-r}{2}\right]}{r}+\binom{r+\left[\frac{n-2-r}{2}\right]}{r} \tag{13}$$

解法2．今将F(n,r)中$a_1=1$的集合记为$F'(n,r)$，其中包含数的个数记为$f'(n,r)$．而F(n,r)中若$a_1=0$，则$a_2=1$，这一类共有$f'(n-1,r)$个数，由此得到

$$f(n,r)=f'(n,r)+f'(n-1,r) \tag{14}$$

今将F$'(n,r)$中的数分为两类，第一类中的数的$a_1a_2=11$，这一类共有$f'(n-1,r-1)$个数。第二类中的$a_1a_2=10$，这时a_3必须为1．这一类共有$f'(n-2,r)$个数．这样便得到$f'(n,r)$的一个递推公式

$$f'(n,r)=f'(n-1,r-1)+f'(n-2,r) \tag{15}$$