普通本科考研适用——考点·题型·精解

江卫华 主 编
李秀敏 刘秀君 副主编

考研概率统计选讲

清华大学出版社

江卫华 主　编
李秀敏　刘秀君 副主编

考研概率统计选讲

北 京

内 容 简 介

本书基于本科阶段概率论与数理统计课程教学内容，选讲其中涉及考研的部分，全书共分8章，每章包括考试内容及要求，知识内容的基本概念、性质和公式，典型例题解析，题型练习及解答四部分，附录收集了2010—2013年全国硕士研究生入学统一考试数学试题（概率论与数理统计部分）详解．本书可供准备报考硕士研究生的读者和使用主教材的教师参考，也可供高等学校工科和其他非数学类专业的学生使用．

图书在版编目(CIP)数据

考研概率统计选讲/江卫华主编. --北京：清华大学出版社，2013

ISBN 978-7-302-33308-1

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①江…　Ⅲ.①概率统计–研究生–入学考试–自学参考资料　Ⅳ.①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第173648号

责任编辑：陈　明　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
　　网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　编：100084
　　社总机：010-62770175　　邮　购：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　印　张：9.75　　字　数：181千字
版　　次：2013年8月第1版　　印　次：2013年8月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：18.50元

产品编号：055003-01

前　言

“概率论与数理统计”是数学的一个十分活跃且又别具特色的分支. 一方面，它有自己独特的概念和方法，与自然和社会现象紧密联系，内容丰富；另一方面，它与其他学科又有紧密的联系，是近代数学的重要组成部分. 概率论与数理统计的理论与方法已广泛应用于科学技术、工农业生产、医疗卫生、生物遗传、气象预报、水文地质、社会经济、人文学科等各个领域中，也是当今许多前沿学科 (如控制论、信息论、可靠性理论、人工智能等) 的基础，因此学好这一学科是十分重要的.

“概率论与数理统计”是理工科大学生的一门必修课程，也是报考硕士研究生时数学试卷中重要内容之一. 与概率论与数理统计相关的考研试题主要考查考生对研究随机现象规律性的基本概念、基本理论和基本方法的理解，以及运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力. 常有的题型有：填空题、选择题、计算题和证明题. 通过对多年硕士研究生考题分析可以看出，概率论与数理统计的试题，即使是填空题和选择题，只考单一知识点的试题很少，大多数试题是考查考生的理解能力和综合应用能力. 要求考生能灵活地运用所学的知识，建立起正确的概率模型，综合运用极限、连续函数、导数、极值、积分、广义积分以及级数等知识去解决问题.

为了帮助读者学好概率论与数理统计，编者集多年教学经验，在对硕士研究生考试试题的研究基础上编写了本教材，主要想对读者做一个学习方法和解题技巧的指导. 本教材编写紧扣概率论与数理统计教学大纲，涵盖硕士研究生考试试题的各个知识点和题型，在结构处理、内容编排、题型选择等方面主要体现了以下特色：

一、本书注重基本概念、基本原理和基本方法，知识梳理清晰、简洁、直观、形象，教材内容表述简明扼要，便于读者快速复习，形成稳固、扎实的知识结构，从而夯实后面提高解题能力和数学思维水平的基础.

二、重点、难点、考点明确，题型选择多样化. 针对每一个基本题型，典型例题丰富且具代表性，通过举一反三、深入讲解，将知识掌握和解题能力提高相结合，为进一步学习打好基础.

三、知识内容处理模块化，解题方法灵活、多样，密切联系考研. 书中渗透考研考点、重点，内容基本要求明确，例题与解答展示了基本的解题思路、解

题方法与技巧，起到了释疑解难的作用，有助于学生达到考研要求的基本能力. 本书既是一本考研复习初级教材，也是一本教材同步辅导.

本书由河北科技大学数学系组织编写，江卫华担任主编，李秀敏、刘秀君担任副主编，全书由江卫华统稿. 本书的编写得到河北科技大学理学院及数学系同仁的大力支持，在此作者表示诚挚的感谢. 由于作者的水平有限，书中难免有一些不妥之处，恳请读者批评指正.

编 者

2013 年 6 月

目　录

第 1 章　随机事件和概率

事件和概率是概率论中的两个基本概念. 在这部分内容中，要熟记事件的关系和运算，因为在今后的计算中，经常将一些事件用另一些事件的运算来表示，文氏图是帮助分析和理解事件运算的重要工具；在计算事件的概率时，要正确使用加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式等，在理解的基础上要记住这些公式并会分析实际问题.

考试内容

随机事件与样本空间、事件的关系与运算、完备事件组、概率的概念、概率的基本性质、古典型概率、几何型概率、条件概率、概率的基本公式、事件的独立性、独立重复试验.

考试要求

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式.

3. 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算的方法；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

1.1　基本概念、性质和公式

1.1.1　随机事件的关系与运算

1. 随机事件与样本空间

(1) 随机试验　概率论中将满足下列三个条件的试验称为**随机试验**(简称**试验**)：

① 在相同条件下试验可以重复进行；

② 每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以确知试验的所有可能结果；

③ 试验之前不能确定哪一个结果会发生.

一般用字母 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示随机试验.

(2) 样本空间　随机试验 E 的所有可能结果所组成的集合称为 E 的样本空

间(或基本事件空间)，记为Ω. 样本空间中的元素(即E的每个结果)称为样本点，记为ω.

(3) 随机事件 样本空间Ω的子集，即试验E的结果称为**随机事件**(简称事件)，记为$A, B, C, \cdots$.

所谓一个随机事件A发生**当且仅当**A中的一个样本点ω发生.

把试验E的样本空间Ω中的每一个样本点(即由一个样本点组成的单点集)称为**基本事件**. 基本事件是最简单不可再分的随机事件.

在随机试验中，必然发生的事件称为**必然事件**，不可能发生的事件称为**不可能事件**.

显然，样本空间Ω也是一个随机事件，它是自身的子集，Ω中包含所有的样本点(或基本事件)，在每次试验中它总是发生的，所以样本空间Ω是一个必然事件. 空集$\varnothing$也是样本空间Ω的子集，它不包含任何样本点(或基本事件)，在每次试验中它都不发生，所以是不可能事件.

注 通常把必然事件记为Ω，不可能事件记为$\varnothing$；必然事件和不可能事件是两个特殊的随机事件.

2. 事件的关系与运算

(1) 子事件 如果事件A发生则事件B发生，即属于事件A的每一个样本点都属于事件B，称事件A是事件B的子事件，也称事件B包含事件A，记为$B \supset A$(或$A \subset B$).

(2) 相等事件 如果事件A和事件B满足$A \supset B$且$B \supset A$，即事件A和事件B同时发生和不发生，称事件A与B相等，记为$A = B$.

(3) 和事件 事件“A和B至少有一个发生”的事件称为事件A与B的和事件(或并事件)，记为$A \cup B$(或$A+B$).

它可推广到有限个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n \ (n \geqslant 2)$的和(或并)的情形，即“$n$个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n \ (n \geqslant 2)$中，至少有一个事件发生”，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

它还可推广到无限可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的和(或并)的情形，即“可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$中，至少有一个事件发生”，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 积事件 “事件A和B同时发生”的事件称为事件A与B的积事件(或交事件)，记为$A \cap B$(或AB).

它可推广到有限个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n \ (n \geqslant 2)$或可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的积的情形，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$或$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(5) 差事件　“事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件称为事件 A 与 B 的差事件，记为 $A-B$ (或 $A\overline{B}$).

(6) 对立事件(或互逆事件)　“事件 A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件或逆事件，记为 $\overline{A}$.

(7) 互不相容事件(或互斥事件)　如果事件 A 和事件 B 不能同时发生即 $AB=\varnothing$，称事件 A 和 B 互不相容(或互斥).

在随机试验中，基本事件都是两两互斥的.

(8) 完备事件组　若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，且和事件为必然事件，即满足：

① $A_iA_j=\varnothing,\ 1\leqslant i<j\leqslant n$；　　② $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$；

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组.

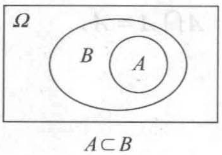
可推广为：若可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥，且和事件为必然事件，即满足：

① $A_iA_j=\varnothing,\ 1\leqslant i<j<\infty$；　　② $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$；

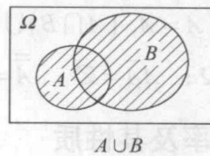
则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一个完备事件组.

3. 文氏图

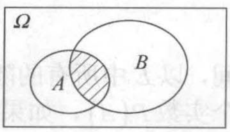
事件的关系与运算可以用下面图形 (文氏图) 直观地表示出来：



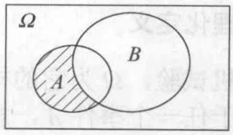
$A\subset B$



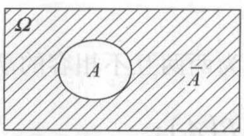
$A\cup B$



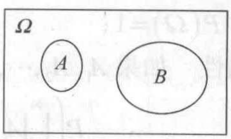
$A\cap B$



$A-B$



$\overline{A}$



$AB=\varnothing$

4. 事件的运算法则及常用结论

事件的运算法则：设试验 E 的样本空间为 Ω，随机事件为 A,B,C,A_i $(i=1,2,\cdots)$，则有

(1) 吸收律　若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B, A\cap B=A$；

(2) 交换律　$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$；

(3) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$；

$A(BC)=(AB)C=ABC$；

(4) 分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC$；　$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$；

$$A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i)；$$

(5) 德摩根律(对偶)　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$;　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}；\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

常用的运算公式：

(1) $A\subset A\cup B,\ B\subset A\cup B$；

$A\cap(A\cup B)=A,\ B\cap(A\cup B)=B$；　$A\cup A=A$.

(2) $A-B\subset A$；　$(A-B)\cup A=A$;　$(A-B)\cup B=A\cup B$；

$(A-B)\cap A=A-B$;　$(A-B)\cap B=\varnothing$；

$A-B=A-AB=A\overline{B}$.

(3) $A\cap B\subset A,\ A\cap B\subset B$；

$(A\cap B)\cup A=A,\ (A\cap B)\cup B=B$；　$A\cap A=A$.

(4) $A\cup\overline{A}=\Omega$；　$A\overline{A}=\varnothing$；　$\overline{\overline{A}}=A$.

1.1.2　事件的概率及其性质

1. 概率的公理化定义

设 E 是一随机试验，Ω 为它的样本空间，以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域，对于任一个事件 A，规定一个实数 $P(A)$，如果满足：

(1) 非负性　$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性　$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性　如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为两两互不相容的事件，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)；$$

则称 $P(A)$ 为**事件 A 的概率**.

注　概率 $P(A)$ 是事件 A 发生的可能性大小的数值度量.

2. 概率的基本性质

(1) $P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$.

(2) 对于任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(3) 逆事件的概率　对于任意事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) 加法公式　对于任意事件 A，B，C，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-\left[P(AB)+P(BC)+P(AC)\right]+P(ABC).$$

(5) 减法公式　对于任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)\ ;$$

特别地，当 $B\subset A$ 时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$，$P(B)\leqslant P(A)$.

(6) 有限可加性　设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

一般地，对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

3. 古典概型与几何概型

(1) 古典概型　如果随机试验的样本空间 Ω 只有有限个基本事件(样本点)，且每个基本事件(样本点)发生的可能性相同，则称这样的试验为**古典概型**(也称**等可能概型**)的随机试验. 此时事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{中所包含的样本点数}}{\text{样本空间}\Omega\text{中样本点数}}.$$

(2) 几何概型　如果随机试验的样本空间 Ω 是一个可度量的几何区域(直线上的区间，平面或立体上的区域)，并且每个试验结果出现的可能性是相同的(即试验结果落在 Ω 中的任一区域的可能性与该区域的几何度量成正比)，该试验称为**几何概型**的随机试验. 此时事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{的长度}(\text{或面积、体积})}{\Omega\text{的长度}(\text{或面积、体积})}.$$

注 1 古典概型与几何概型都具有某种等可能性，对此要特别注意的是,两个等可能概型的区别在于：古典概型的样本空间是有限的，而几何概型的样本空间是无限(不可列)的.

注 2 古典概型问题的主要计算工具是排列组合，而几何概型问题的主要计算工具是用几何“坐标法”计算长度、面积、体积等，也常用到微积分计算.

注 3 古典概型的难点在于正确选择样本空间，而几何概型的难点在于如何化为数学问题(如候车问题、会面问题等).

4. 条件概率

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，在已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率称为**条件概率**，记为 $P(B|A)$，且

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

注 对于给定的事件 A，条件概率 $P(B|A)$ 也是事件的概率，它具有概率的一切性质，即

当 $P(A)>0$ 时，有

(1) $P(B|A)\geqslant 0$； (2) $P(\Omega\mid A)=1,\ P(A\mid A)=1$；

(3) $P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)$，**注意**：$P(B\mid A)+P(B\mid\overline{A})$ 不一定等于1；

(4) 如果事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A).$$

5. 计算概率的几个公式

(1) 乘法公式 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

一般地，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(2) 全概率公式 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一个完备事件组，且 $P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对事件 A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).$$

(3) 贝叶斯公式　在全概率公式的条件下，如果$P(A)>0$，则有

$$P\left(B_j \middle| A\right)=\frac{P\left(B_j\right)P\left(A \middle| B_j\right)}{\sum_{i=1}^{n}P\left(B_i\right)P\left(A \middle| B_i\right)}, \quad j=1,2,\cdots,n .$$

注 1　乘法公式主要用来计算不具有相互独立性的若干个事件之积的概率.

注 2　全概率公式与贝叶斯公式使用的关键是要找到导致事件A发生的完备事件组，完备事件组中事件可以是有限个，也可以是可列个.

1.1.3　事件的独立性与独立重复试验

1. 事件的独立性

(1) 两个事件独立　对于两个事件A与B，如果$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A与B独立.

如果事件A与B独立，则事件A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也独立.

(2) 多个事件相互独立　对于任意n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任意两个事件相互独立，即对任意$1\leqslant i<j\leqslant n$，有$P\left(A_iA_j\right)=P\left(A_i\right)P\left(A_j\right)$，则称$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两独立；

如果对于其中任意k个事件：$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$ $(2\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，均有

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\cdots P\left(A_{i_k}\right),$$

则称事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立.

2. 独立试验

(1) 独立重复试验　在相同的条件下，将试验重复进行n次，若各次试验的结果互不影响，且同一事件在各次试验中出现的概率相同，则称这n次重复的试验为**n次独立重复试验**.

(2) 伯努利试验　如果在一次试验中，只考虑A与$\overline{A}$两个对立的结果，则称之为**伯努利试验**. 将伯努利试验独立重复进行n次，若每次试验中事件A发生的概率均相等，即$P(A)=p$ $(0<p<1)$，则称为n重伯努利试验，这样的试验模型称为**n重伯努利概型**.

3. 伯努利型概率(二项概率公式)

在n重伯努利试验中，若每次试验事件A发生的概率为p $(0<p<1)$，则事件A恰好发生k次的概率为

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ k=0,1,2,\cdots,n.$$

注 1 伯努利概型的特征是只论次数，不论位置.

注 2 用 X 表示 n 重伯努利概型中事件 A 发生的次数，则 X 服从二项分布 $B(n,p)$.

1.2 典型例题解析

1.2.1 有关事件关系与运算、概率性质、条件概率、独立性命题

例 1 设事件 A, B 和 $A\cup B$ 的概率分别为 0.2, 0.3 和 0.4，则 $P(A\overline{B})=$______.

解 由条件知 $P(A)=0.2,\ P(B)=0.3,\ P(A\cup B)=0.4$，由加法公式，有

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.1.$$

由减法公式，有 $P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.2-0.1=0.1$.

例 2 设事件 A 与 B 满足 $P(B|A)=1$，则(　　).

(A) A 是必然事件　　(B) $P(B|\overline{A})=0$

(C) $A\subset B$　　(D) $P(A\overline{B})=0$

解 由已知得，$P(AB)=P(A)$，所以选(D).

例 3 设 $0<P(A)<1,\quad 0<P(B)<1,\ P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则 A 与 B (　　).

(A) 互不相容　(B) 互相对立　(C) 不独立　(D) 独立

解 利用条件概率公式和德摩根律，由 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$ 推出 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以选(D).

例 4 设事件 A 与 B 满足条件 $AB=\overline{A}\overline{B}$，则(　　).

(A) $A\cup B=\varnothing$　(B) $A\cup B=\Omega$　(C) $A\cup B=A$　(D) $A\cup B=B$.

解 由“对称性”知(C)、(D)选项都不成立(否则，一个成立另一个必成立)，而(A)成立 $\Leftrightarrow A=B=\varnothing \Leftrightarrow \overline{A}=\overline{B}=\Omega \Rightarrow \overline{A}\overline{B}=\Omega$，由 $A=B=\varnothing \Rightarrow AB=\varnothing$，这与已知 $AB=\overline{A}\overline{B}$ 相矛盾，所以正确选择是(B).

事实上，由对偶法则及题设有 $AB=\overline{A}\overline{B}=\overline{A\cup B}$，于是有

$$A\cup B=A\cup B\cup AB=(A\cup B)\cup(\overline{A\cup B})=\Omega.$$

例 5 设随机事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)>0,\ P(B)>0$，则下列结论中一定成立的有(　　).

(A) $A,\ B$ 为对立事件　　(B) $\overline{A},\ \overline{B}$ 互不相容

(C) $A,\ B$ 不独立　　(D) $A,\ B$ 相互独立

解 $A,\ B$ 互不相容，只说明 $AB=\varnothing$，但并不一定满足 $A\cup B=\Omega$，即互

不相容的两个事件不一定是对立事件，又因 $A\cup B=\Omega$ 不一定成立，故 $\overline{A\cup B}$ 即 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$ 亦不一定成立，因此选项(A)与(B)均不能选. 同时因 $P(AB)=P(\varnothing)=0$，但是 $P(A)P(B)>0$，即 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，故 A 与 B 不独立，应选(C).

例 6　设随机事件 A 与 B 互不相容，且 $A=B$，则 $P(A)=$________.

解　由于 $A=B$，于是有 $AB=A=B$，又由于 A 与 B 互不相容，因此 $AB=\varnothing$，即 $A=B=\varnothing$，所以 $P(A)=0$.

例 7　对于任意两个事件 A 与 B，下面结论正确的是(　　).

(A) 如果 $P(A)=0$，则 A 是不可能事件

(B) 如果 $P(A)=0$，$P(B)\geqslant 0$，则事件 B 包含事件 A

(C) 如果 $P(A)=0$，$P(B)=1$，则事件 A 与 B 对立

(D) 如果 $P(A)=0$，则事件 A 与 B 独立

解　我们知道事件的关系、运算的定义，除了独立性概念外，其余的概念都不涉及概率，因此由概率关系推导不出事件的这些关系(独立性除外)，所以选项(A)、(B)、(C)都不正确，它们都是相应结论某种形式的必要条件但不是充分条件. 若 $P(A)=0$，由于 $AB\subset A$，故 $P(AB)=0=P(A)P(B)$，所以 A 与 B 独立，选(D).

例 8　对于任意两事件 A,B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是(　　).

(A) $A\subset B$　　(B) $\overline{B}\subset\overline{A}$　　(C) $A\overline{B}=\varnothing$　　(D) $\overline{A}B=\varnothing$

解　利用事件间的关系运算，应选(D).

例 9　已知事件 A 发生必导致 B 发生，且 $0<P(B)<1$，则 $P\left(A\middle|\overline{B}\right)=$______.

(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 1

解法 1　由题设知 $A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Rightarrow\overline{B}A=\varnothing$，从而推知 $P(A\mid\overline{B})=0$，故选(A).

解法 2　$P\left(A\middle|\overline{B}\right)=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(A)}{P(\overline{B})}=0$，故选(A).

例 10　设 A,B 是两个随机事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P\left(B\middle|A\right)=\dfrac{1}{3}$，$P\left(A\middle|B\right)=\dfrac{1}{2}$，则 $P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)=$__________.

解　根据乘法公式

$$P(AB)=P(A)P\left(B\middle|A\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},\quad P(B)=\frac{P(AB)}{P\left(A\middle|B\right)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6},$$

由减法公式

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3},$$

或由加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3},$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{2}{3}.$$

所以
$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{4}{5}.$$

1.2.2　全概率公式　贝叶斯公式命题

例 1　口袋中有 10 张卡片，其中两张是中奖卡. 三个人依次从口袋中摸出一张，问中奖概率是否与摸卡的次序有关？

解　记 A_i 表示“第 i 个人摸到中奖卡”，$i=1,2,3$，则

$$P(A_1)=\frac{C_2^1}{C_{10}^1}=\frac{1}{5},$$

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{1}{5}\times\frac{C_1^1}{C_9^1}+\frac{4}{5}\times\frac{C_2^1}{C_9^1}=\frac{1}{5},$$

$$P(A_3)=P(A_1A_2)P(A_3|A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)P(A_3|\overline{A}_1A_2)$$
$$+P(A_1\overline{A}_2)P(A_3|A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{1}{5},$$

所以中奖概率与摸卡次序无关.

例 2　一批产品，每箱装 20 件，已知每箱不含次品的概率为 80%，含一件次品的概率为 20%，在购买时，随意选一箱，从中随意逐个选出产品进行检查，如果发现次品就退回，如果检查 2 个还未发现次品就买下. 则

(1) 顾客买下该箱产品的概率 $\alpha=$________；

(2) 在顾客买下的一箱中，确实没有次品的概率 $\beta=$________.

解　(1) 如果记 $A_i=$“从箱中第 i 次取出产品为正品”$(i=1,2)$，则 $\alpha=P(A_1A_2)$，显然 $P(A_1A_2)$ 与该箱产品中有几件次品有关，因此，我们自然想到将该箱含次品的各种情况一一列出，应用全概率公式计算 α.