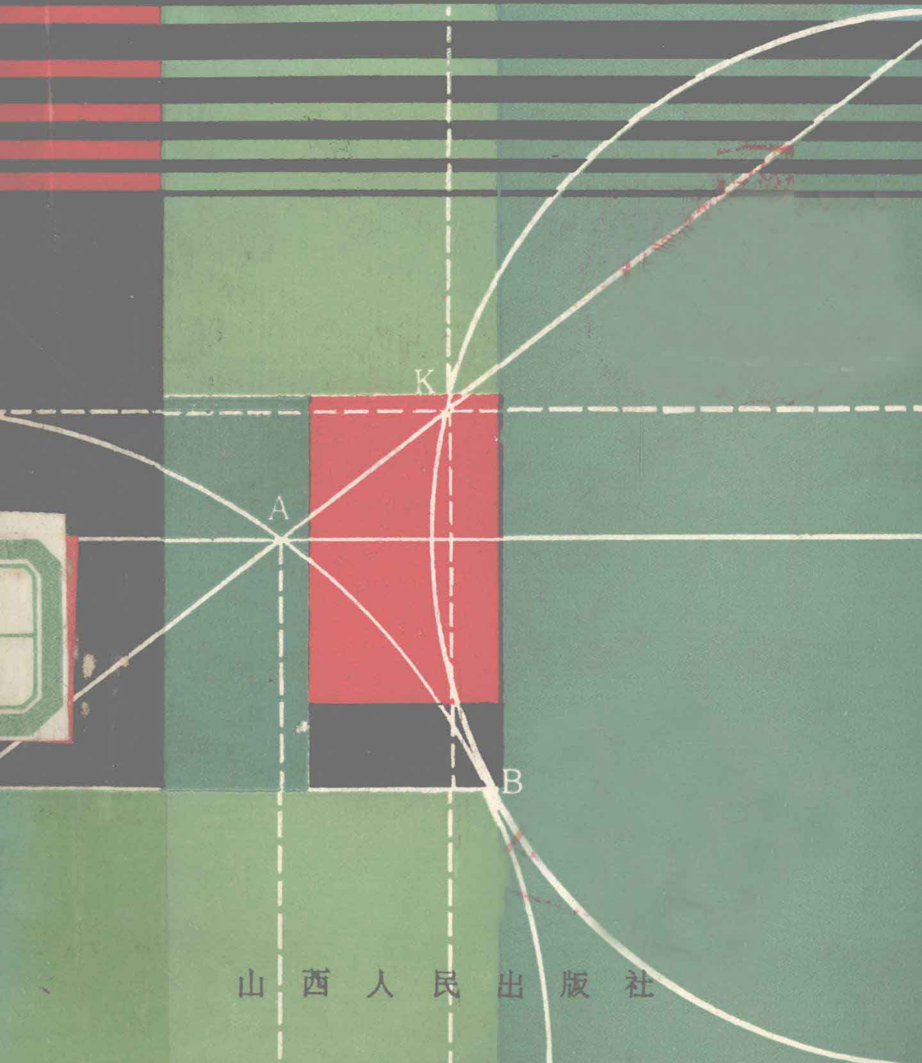
如何布设平面几何辅助线

魏 鑫 来

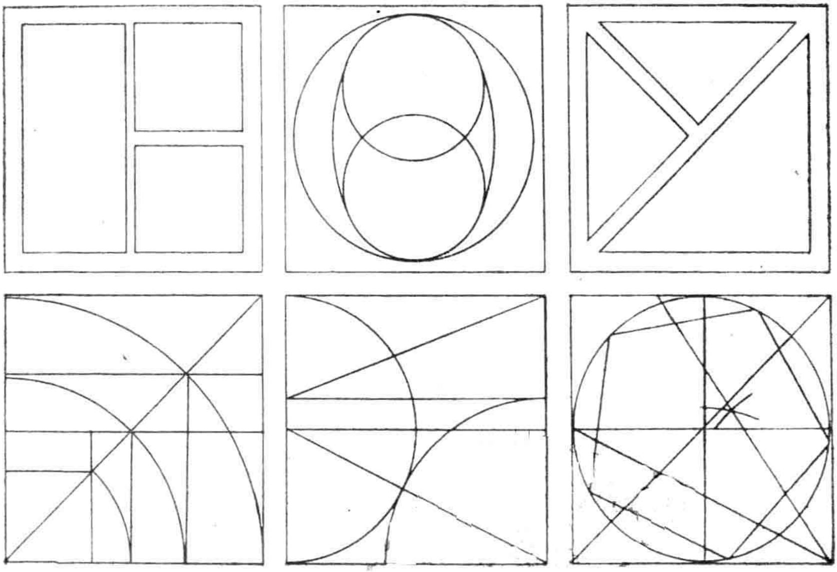


山 西 人 民 出 版 社

如何布设平面几何辅助线

RUHE BUSHE PINGMIAN JIHE FUZHUXIAN

魏　鑫　来



山　西　人　民　出　版　社

如何布设平面几何辅助线

魏鑫来

*

山西人民出版社出版 （太原并州北路十一号）

山西省新华书店发行 山西省七二五厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：8.25 字数：175 千字

1986年1月第1版 1986年1月山西第1次印刷

印数：1—3,200 册

*

书号：7088·1246 定价：1.20 元

写在前面

平面几何证题，是有效地训练人们抽象思维和逻辑推理能力的一种手段，也是进行几何计算与几何作图的理论依据．

在学习过程中，青少年对几何命题证明途径的寻求，一般都深感困难，也就是难以找到题目条件和结论的内在联系．这是由于：

证明从何处研究，并无一定法则可循；对辅助线的布设，更是难以下手．

为了寻求条件和结论的内在联系，使青少年朋友正确地解答几何命题的证明，这本小册子将介绍辅助线布设的思路与常用的几种方法，并为提高证题水平作一些入门的指导．

本书在编写过程中，参考了有关书刊和资料，谨向这些作者致以谢意．

值得我特别说明的是蒋群龙、高松龄、张根明等同志，在审阅初稿时，提出了许多宝贵意见．尤其是张根明同志，经多次亲手修改．最后由言川同志审校．在此，向这些同志表示衷心的感谢．

由于笔者水平有限，书中定会有不少缺点和错误，欢迎广大读者批评、指正．

魏鑫来

目　　录

一、预备知识

几何证题的研究，归纳起来，可分为两类：

（1） **数量性**：如线段或角的相等、不等（即大小比较）.

（2） **位置性**：如两线的垂直、平行、三点共线、三线共点、四点共圆、….

1. 几何证题须知

①认真审题，明确题意：

证明一个几何命题时，首先要把题目从头至尾细读数次，确实明确题目的内容和要求，即明确题目的条件、结论各是什么.

例如：

求证：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的弧.

条件：某圆中的一条弦垂直于直径.

结论：这条直径平分弦且平分弦所对的弧.

这样做，不仅为几何表达打下了基础，而且会使证明过程目的明确，少走弯路.

②要有一个符合题意、准确的图形：

证题的全过程，是对几何图形性质的分析. 如若图形符合题意时，那么就给我们进行论证，奠定了可靠的基础. 相反一个不符合题意的图形，将引人进入死胡同或者走上歧途.

例如，本要研究平行四边形的性质，如若画出一个特殊的平行四边形——矩形时，就一定会得出一个错误结论：“平行四边形对角线相等且互相平分”。正是由于这个不符合题意的图形，才导致我们研究问题的片面性，局限性。这样，就会产生“以偏概全”，“以特殊论一般”的错误逻辑。由此可见，画出符合题意的图形，是正确进行证明的基础。

还应强调说明图形准确的重要性。图形的准确，能帮助我们从图上直观地发现那些有用的，而且是重要的关系，从此得到启发和提示，就能顺其自然地去寻求这些关系。如何去思维，如何去探索，图形就成为我们的一位向导。

再如，研究等腰三角形的内切圆时，我们用准确与不准确的两个图形作一比较：

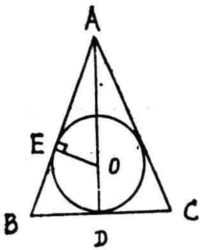


图1

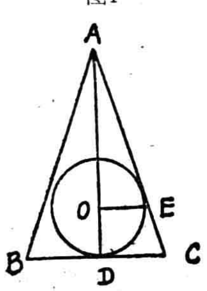


图2

图 1 是一个准确图形，E为切点，OE为半径，则OE⊥AB，此类问题常常要从直角△AOE着手研究。

图 2 显然十分不准确，E不是真正的切点，AB和⊙O也不相切，连OE后，误认为OE是半径且OE∥BC，又未进行认真研究，就以此为据来论证和说明。这样，必然会得出一系列令人可笑的错误论断。

诚然，几何图形的准确，不仅可能使我们正确地找到证题的途径，而且也可能引导我们得出一个正确的结论。这样，为寻找证明途径，提供了

一个直观的基础方法。

③据题意、对照图形，写出清楚无误的几何表达：

当我们明确了题意，又画出了符合题意的准确图形后，即可把条件和结论与图形对照，译成几何语言，写出已知、求证，这就是几何表达。这个工作虽然困难较小，但在叙述时，却要求要完整、严密，而且要简明扼要。

如：三角形中，大边上的高小于小边上的高。（图3）

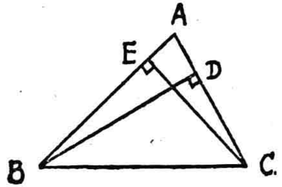


图3

已知：$\triangle ABC$中，$AB>AC$，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，D、E为垂足。

求证：$CE<BD$。

再如：求证三角形垂心与一顶点的距离，等于其外接圆圆心到那顶点对边上距离的二倍。（图4）

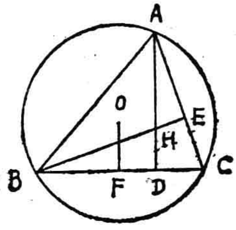


图4

已知：$\triangle ABC$内接于$\odot O$，H、O分别为$\triangle ABC$之垂心、外心，$OF\perp BC$，且F为垂足。

求证：$AH=2\cdot OF$。

再强调一点，对于证明过程的叙述，须简、要、明。但应注意，叙述概括要准确，千万别发生内容上的遗漏与歪曲。

④题目中“隐含”条件的充分利用和挖掘：

题目中所给的条件，是我们推出结论的依据，当然是不可缺少的。然而，对那些较复杂的证题，就不可能据条件直接推出结论。下面，我们对这些情况，作一些分析。

证一个题时，总是从条件入手进行考虑。在考虑、分析这些内在联系时，却要涉及到一些有关的定义、定理、公理及公式，而这些内容必然要反映在图形上。我们把这些在图形上的反映称为“隐含”条件。

从证题的实践得知，这些“隐含”条件却是得出结论所必需的、不可缺少的。不妨先看下面的一个简单例子：

求证：直角三角形的两锐角的和为90°。

思考这个问题时，总是要从三角形这个概念入手，而这个三角形中，有一个角是90°。当要研究另两个角的关系时，必然要考虑三角的关系。这样，一定会想到三角形“三内角和为180°”这个定理。若其中有一个角是90°时，那么另两个角之和，必定是90°。

从以上情况可知，三角形内角和定理，是解决问题的关键，而此条件，题目中又未直接告知，它是由分析条件时推敲出来的。这就是我们所指的“隐含”条件。

显然，如若忽略了这个“隐含”条件，那么，结论确实难以推出。

但是，三角形所涉及到的“隐含”条件很多，我们只能根据条件，充分利用和挖掘与证题相关的内容。

2．分析法和综合法

在一切科学领域中，要决定判断的真实性，都需要进行证明。几何证题，同样也要判断提出的结论，是否具有真实性。

在数学以外的其他科学中，所进行的证明，都是以直接的实验和观察后，从得到的有关数据和结果来证明其结论的正确与否。

在数学的证明中，往往不需要引入直接的经验材料来说明证明的过程。例如，要证明具有某种关系的线段AB＝CD时，如果拿刻度尺去直接度量，然后得出结论来判断AB是否和CD相等时，那真是天大的笑话！这是因为你度量的AB CD，仅仅是千千万、万万千中的一个特例，并不能说明所有情形都成立；何况你的图能绝对准确无差吗？你度量得技术能十分真确吗？……，因此，在数学的证明中，类似这样的问题是不能从直接经验材料来说明它的真实性。而只能通过客观的现实中所抽象出来的有关定义、概念和公理、定理去进行逻辑推理。

还应该明确，数学具有高度的抽象性，所以要求数学证明要有逻辑性，那也就是应遵循已经确立的严密推理法则进行。就拿证明途径来讲，可归纳为两种：

其一：是从前提出发，依据公理、定义及定理来直接推断结论的正确性，称之为直接证法。

其二：是从否定结论的矛盾方面的不正确性，来断定结论的正确性，也就是说先证明结论的反论是错误的。称之为间接证法。

在此，举例介绍分析法与综合法的应用。

（1）分析法与综合法：

我们对于某一判断的证明，事前总是要进行一番分析的，然后再根据分析的结果写出证明。

所谓分析法，是由结论到前提探求证明途径的一种方法。具体地讲就是从“未知”看“须知”，逐步追索到“已知”的过程。

而综合法呢？是由前提到结论，通过一系列的推理使论

题得到证明。具体地讲，就是从“已知”看“可知”，逐步推向“未知”的。

由以上可知，分析法与综合法是互相依存、相辅相成的，两者不可偏废。没有分析的综合，或没有综合的分析是没有用的。

简言之，所谓分析法是“由果寻源”，而综合法却是“由因求果”。

（2）例题：

例1

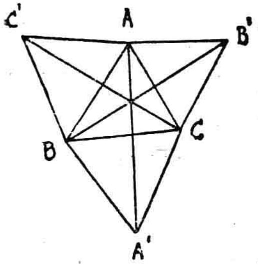


图5

已知：以$\triangle ABC$各边为边在形外作正$\triangle A'BC$、$B'AC$、$C'AB$。

求证：$AA'=BB'=CC'$。

分析：（图5）

①要证$AA'=BB'=CC'$，可先证其中两个相等。

②若要证$AA'=BB'$时，须证$\triangle AA'C\cong\triangle BB'C$.由条件知，$\triangle AA'C\cong\triangle BB'C$成立。

证明：

在$\triangle AA'C$和$\triangle BB'C$中：

$\because AC=B'C$，$A'C=BC$，$\angle ACA'=\angle BCB'$（都等于$\angle ACB+60°$），

$\therefore\triangle AA'C\cong\triangle BB'C$（边、角、边）。

故$AA'=BB'$。

同理：$BB'=CC'$。

则$AA'=BB'=CC'$。

例 2

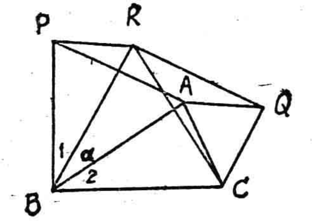


图6

已知：以△ABC各边为边，作正△PAB、QAC、RBC，

求证：四边形AQRP为一平行四边形。

分析：（图6）

①要证AQRP为一▱，须满足平行四边形的判定定理。

②要满足平行四边形的判定定理时，从条件看，说明对边平行困难，不妨可证AQ＝PR，PA＝QR。

③要证AQ＝PR，须证△ABC≌△PBR。而△ABC≌△PBR成立。

④同理PA＝QR。

证明：

在△ABC和△PBR中，

∵AB＝PB，BC＝BR，$\angle$一$=\angle 2=60^\circ-\alpha$，

∴△ABC≌△PBR。

故AC＝PR。

即AQ＝PR。

同理：PA＝QR，

则四边形AQRP为一▱（对边相等）。

例3

已知：$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$，$\overset{\frown}{CN}=\overset{\frown}{ND}$，连MN交弦AB，CD分别为K、L。

求证：$\angle 1=\angle 2$。

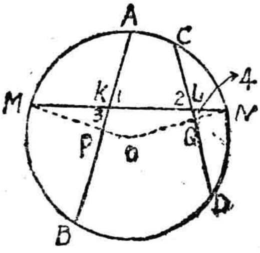


图7

分析（一）：（图7）

①要证$\angle 1=\angle 2$，

而$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，

须证$\angle 3=\angle 4$。②连OM，ON，有$OM\perp AB$、$ON\perp CD$

$\therefore \angle MPK=\angle NQL=90°$，

要证$\angle 3=\angle 4$，须证$\angle M=\angle N$。

③在$\triangle OMN$中，$\angle M=\angle N$成立。

证法（一）：

连OM，ON分别交AB、CD于P、Q，在$\triangle OMN$中：

$\because OM=ON$，

$\therefore \angle M=\angle N$。

又M、N分别为$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$之中点，$\therefore OM\perp AB$，$ON\perp CD$（过弧之中点的半径垂直于弦）。

在$\triangle PMK$和$\triangle QNL$中：

$\because \angle MPK=\angle NQL=90°$，又$\angle M=\angle N$，

$\therefore \angle 3=\angle 4$。

而$\angle 3=\angle 1$，$\angle 4=\angle 2$，

则$\angle 1=\angle 2$。

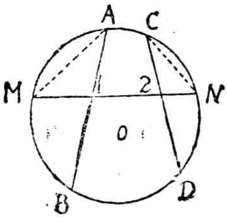


图8

证法（二）：（图8）

连AM，CN，

$\because \angle 1=\angle A+\angle M$

$$\stackrel{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}+\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CN}\right)$$

$\angle 2=\angle C+\angle N$

$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ND}+\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AM})$

又$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$，$\overset{\frown}{CN}=\overset{\frown}{ND}$

$\therefore \angle 1=\angle 2$。

例4

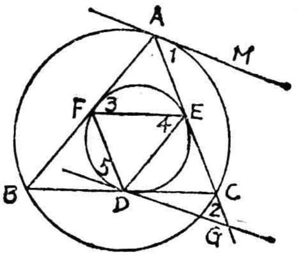


图 9

已知：D、E、F分别为圆内接△ABC之BC、CA、AB边的中点，直线DG切圆DEF于D，且和AC的延长线交于G，AM切圆ABC于A，

求证：AM∥DG。

分析：（图9）

①要证AM∥DG，须证$\angle 1=\angle 2$。

②要证$\angle 1=\angle 2$，须研究$\angle 1$，$\angle 2$和其他角的关系。

③由于$\angle 1=\angle B$，$\angle 5=\angle 4$，又$\angle B=\angle 3$，$\angle 5=\angle 2$，须证$\angle 3=\angle 4$。而$\angle 3=\angle 4$成立。

证明：

∵D、E、F分别BC、CA、AB之中点，∴DE∥AB，EF∥BC，FD∥AC。

有：$\angle 3=\angle B$，$\angle 5=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

又：$\angle 1=\angle B$，$\angle 5=\angle 4$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$。

则AM∥DG。（内错角相等，两直线平行）。

例5

已知：E、F分别为▱ABCD的AD、BC之中点，连

CE，AF和BD分别交于G、H，

求证：BH＝HG＝GD。

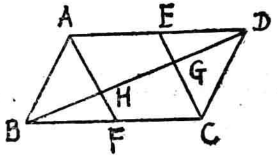


图10

分析：（图10）

①要证BH＝HG＝GD，可先证BH＝HG。

②要证BH＝HG，须证HF∥GC。

②须证AFCE为▱，而AE$\underline{\parallel}$FC，AFCE为▱成立。

证明：

∵E、F分别为▱ABCD中AD、BC之中点，

∴AE$\underline{\parallel}$FC。

故AFCE为▱，有AF∥CE，即HF∥CG．在△BGC中：F为BC之之中点，又HF∥CG，

∴H为BG之中点（过三角形一边之中点，平行于另一边之直线必过第三边之中点）。

即BH＝HG。

同理：HG＝GD。

则BH＝HG＝GD。

例6

已知：四边形ABCD内接于圆，且AC⊥BD，P为垂足，PM⊥AB，M为垂足，反向延长交CD于N，

求证：CN＝ND

分析：（图11）

①要证CN＝ND，由AC⊥BD知，须证PN为直角△CDP之中线。

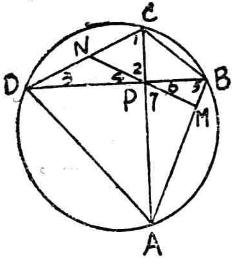


图11

②须证，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$。

③而由$\angle 1=\angle 5$（同弧上的圆周角相等），$\angle 5+\angle 6=\angle 6+\angle 7=90^\circ$

得$\angle 7=\angle 5$，但$\angle 2=\angle 7$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$成立。

④同理$\angle 3=\angle 4$成立。

证明：

$\because AC\perp BD$，

$\therefore \angle 7+\angle 6=90^\circ$。

又$PM\perp AB$，$\therefore \angle 6+\angle 5=90^\circ$，

有$\angle 7=\angle 5$，

但$\angle 2=\angle 7$，又$\angle 1=\angle 5$

$\therefore \angle 1=\angle 2$。

即$CN=PN$。

同理，$ND=PN$。

则$CN=ND$。

例7

已知：P为正三角形ABC外接圆上之任一点，BA和CP交于K，BC和AP交于L，

求证：$AC^2=AK\cdot CL$。

分析：（图12）

①要证$AC^2=AK\cdot CL$，

须证$\dfrac{AK}{AC}=\dfrac{AC}{CL}$。

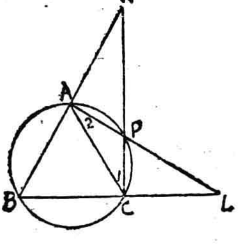


图12

②要证 $\dfrac{AK}{AC}=\dfrac{AC}{CL}$，须证$\triangle AKC \backsim \triangle ACL$。

③要证$\triangle AKC \backsim \triangle ACL$,须证$\angle 1=\angle L$，$\angle K=\angle 2$。

④而$\angle 1 \overset{m}{=} \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AP}$，$\angle L \overset{m}{=} \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{PC}) \overset{m}{=} \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AP}$，

即$\angle 1=\angle L$成立。

同理，$\angle K=\angle 2$也成立。

证明：

$$\because \angle 1 \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AP},$$

$$\angle L \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{PC}) \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{PC})$$

$$\overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AP},$$

$\therefore$ $\angle 1=\angle L$

同理$\angle K=\angle 2$

$\therefore$ $\triangle ACK \backsim \triangle ACL$。

故 $\dfrac{AK}{AC}=\dfrac{AC}{CL}$.

则 $AC^2=AK\cdot CL$。

注意：

要证$\dfrac{AK}{AC}=\dfrac{AC}{CL}$时，须看比的前项AK、AC是$\triangle AKC$的边,后项AC、CL是$\triangle ACL$的边,所以要证$\triangle ACK \backsim \triangle ACL$。这是证明比例式成立的基本方法，一定要掌握。