省精品课程教材

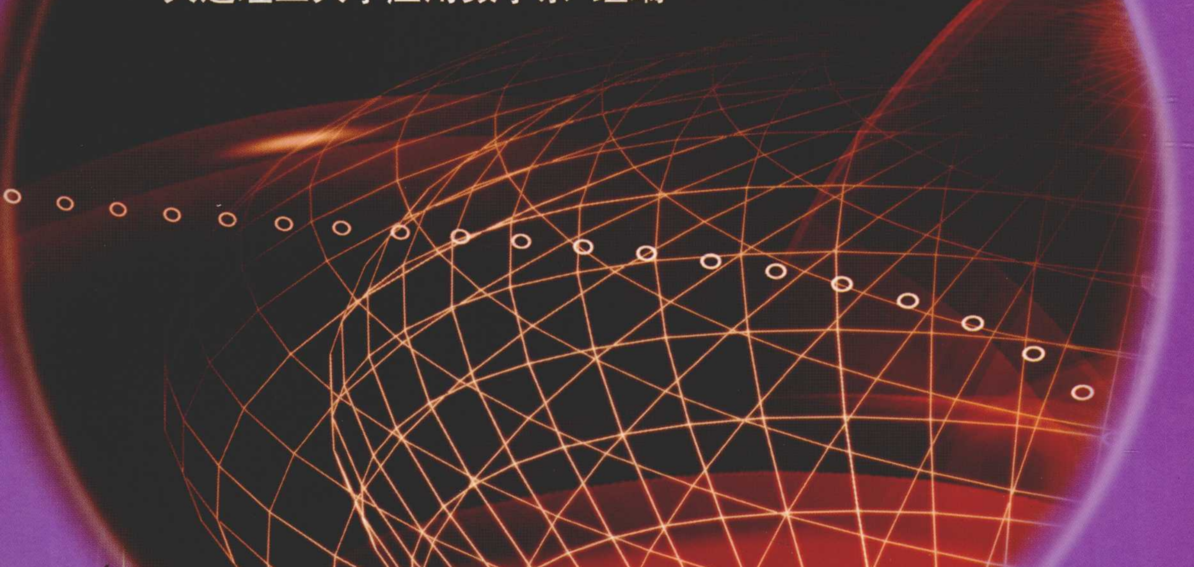
■ 高等学校理工科数学类规划教材

工科数学分析（上册）

MATHEMATICAL ANALYSIS

第二版

大连理工大学应用数学系 组编



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

■ 高等学校理工科数学类规划教材

工科数学分析（上册）

MATHEMATICAL ANALYSIS

第二版

大连理工大学应用数学系　组编

主编　金正国　金光日

编者　金正国　金光日　庞丽萍　李　林

　　　曹铁川　孙丽华　蒋志刚　张海文

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析. 上册/大连理工大学应用数学系组编 . 2 版. —大连:大连理工大学出版社,2008. 9
高等学校理工科数学类规划教材
ISBN 978-7-5611-3772-7

Ⅰ. 工… Ⅱ. 大… Ⅲ. 数学分析—高等学校—教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 140912 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84703636
E-mail:dutp@dutp. cn URL:http://www. dutp. cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:18. 25 字数:404 千字
2007 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 2 版
2008 年 9 月第 3 次印刷

责任编辑:梁 锋 王 伟 责任校对:婕 琳
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-3772-7 定 价:32. 40 元

高等学校理工科数学类规划教材

编审委员会

第 2 版说明

本书第 1 版出版以来，使用过本教材的教师和学生提出了一些修改意见，为了更适应教学需要，编者做了较全面的修订，形成了第 2 版。

新版本在保留了原书的框架和总体风格的基础上，进一步突出了“工科数学分析基础”模块的教学要求和特点，概念和理论介绍部分得到了强化和完善。例如，对极限等概念的介绍更加充分、严谨，对连续与一致连续的关系叙述得更细致，增加了微分方程解的存在唯一性等内容；对部分教学内容也重新进行编排(如级数部分、多元函数积分部分)。修订时删去了原书中一些计算过于复杂的例题(主要是多元函数微积分部分)，重新选配的例题更具有代表性且类别更全，更便于课堂教学使用；习题部分也做了一些增删，删去了与例题雷同的题，增加了一些典型题。相对于第 1 版，第 2 版的文字叙述也更简洁。

本次修订工作由金正国、金光日、庞丽萍、李林完成。

限于作者的水平，书中难免还会有不当之处，恳请读者与同行批评指正，以便进行进一步的改正。对于您的关心与指导，编者在此表示感谢。

编著者
于大连理工大学
2008 年 9 月

第 1 版前言

牛顿和莱布尼兹创立的微积分是近代数学的伟大创造，是数学科学的重要支柱，并对推动近代科学的发展发挥了重要作用。以微积分为主体的高等数学课程是工科大学生的主要基础课，通过该课程的学习，可获得一元微积分、多元微积分、向量代数与空间解析几何、无穷级数和微分方程等相关知识的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能，为学习后继课程奠定坚实的基础。学习微积分，还能够培养理性思维能力、综合应用能力、科学计算能力以及创新能力。

目前，由于我国高等教育规模的不断扩大以及社会对人才需求的多元化趋势，各高校的培养目标和定位也呈现多样化的状态，对数学要求也进行了多层次设置。即使在同一学校，不同专业对同一类课程(例如，数学类)的设置、内容安排、学习要求等也呈现多样化的趋势。传统的大一统的教学计划显然不利于对多元化人才的培养，实施分层次分流培养的教学理念已为许多高等院校所接受并付诸实施。

大连理工大学是教育部《工科数学内容和课程体系改革的研究与实践》项目的参与单位之一，多年来坚持高等数学课程的教学改革，已率先进行了分层次分流培养模式的实践。根据各工科专业的不同需求，将所有专业划分成三种教学模块，各模块教学内容的广度、深度及学时要求不同。在教学中强调以实践引导理论，改变传统的以“定义、定理、证明、例题”顺序进行的课堂教学模式，代之以提出实际问题，分析讨论，引入新的数学方法，最后解决问题的模式。

大连理工大学应用数学系在多年教学改革的基础上，组织编写了理工科数学类系列规划教材，《工科数学分析》就是其中的一种。本书是大连理工大学应用数学系“工科数学分析基础”模块的配套教材。“工科数学分析基础”模块适用于对数学有较高要求的专业，如物理、力学、计算机科学相关专业等。本书在编写过程中注意在以下方面体现“工科数学分析基础”模块的教学要求和特点：

(1)对于概念、定理、公式，尽可能从直观背景出发，提出问题，分析问题，得出结论，然后再抽象论证。将微积分的基本思想融入教学各环节中，引导学生用微积分的观点、方法认识和处理问题。

(2)对传统教学内容作了一些调整。例如，在极限部分增加了实数基本定理，以便较深入地介绍极限理论；在多元函数微分学部分增加了向量值函数的微分法；在微分方程部分增加了线性微分方程组的内容；对一致收敛性也没有过于淡化。在局部章节采用了新讲法。例如，在一元函数积分学中，先讲定积分，着重讲解积分思想、微积分基本公式，而将不定积分和积分法作为定积分的计算工具随后引入；在多元函数积分学中，把重积分、对弧长的曲线积分、对面积的曲面积分统一为数量值函数在几何形体上的积分；把对坐标

的曲线积分、曲面积分统一为向量值函数在有向曲线(曲面)上的积分,并与向量场和物理背景有机结合起来,以使学生在较高层次上理解积分的本质。

(3)培养应用意识,提高应用能力。数学课程教学不仅要教会学生如何做题,更重要的是要教会他们如何使用数学,进一步认识到数学是解决包括生活、工程技术等诸多领域问题的强有力工具,从而提高学生的学习兴趣。由于计算机技术的迅速发展,数值计算已经成为科学研究乃至日常工作中不可缺少的手段,对于工科学生,掌握常用的数值计算方法很有必要,因此,我们在相关章节中介绍了非线性方程求根、数值积分、微分方程数值解、极值计算等方法,并选编了一定数量的数值实验题。学生可以通过建立数学模型、设计程序来完成数学实验,在实践中体会学习数学的乐趣。

本教材是大连理工大学应用数学系组织编写的系列教材之一,在曹铁川主编的《工科微积分》的基础上编写而成,采用了《工科微积分》的主体框架,针对"工科数学分析基础"模块的教学要求,对部分章节进行了调整和增补。参加本书编写的人员有(按编写章节顺序)曹铁川、金正国、庞丽萍、蒋志刚、张海文、金光日、孙丽华、李林,由金光日、金正国组织编写、统稿,并最终定稿。

中国科学院院士钟万勰对本系列教材的编写提出了宝贵意见,大连理工大学教学名师施光燕教授和应用数学系南基洙教授以及部分兄弟院校的同行也提出了重要指导意见,在此一并表示感谢。

限于作者的水平,书中难免会有不当之处,恳请读者与同行批评指正。大家有任何意见和建议,请通过以下方式与我们联系:

邮箱 jcjf@dutp.cn

电话 0411—84707962　84708947

编著者

于大连理工大学

2007 年 9 月

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

本书的核心内容是微积分，微积分研究的对象是函数. 在自然科学、工程技术，甚至在某些社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一，其重要意义远远超出了数学范围. 在数学中函数处于基础的核心地位.

极限是研究函数的基本方法，是微积分的基本运算，工科数学分析中几乎所有的概念都离不开极限. 极限理论是微积分学的基础理论.

连续性是函数的重要性质. 微积分的发展史告诉我们，无论是在理论上还是在应用中都应从连续函数开始，于是，连续函数成为工科数学分析研究的主要对象.

本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

1.1　函　数

1.1.1　集　合

1. 集合概念

集合是数学中的一个基本概念，我们先通过例子来说明这个概念. 例如，一个书柜中的书构成一个集合，一间教室里的学生构成一个集合，全体实数构成一个集合等等. 一般地，所谓**集合**（简称**集**）是指具有某种特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的**元素**（简称**元**）.

通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$ 或 $a\,\overline{\in}\,A$. 一个集合，若它只含有限个元素，则称为有限集；不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有以下两种：一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来表示. 例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

另一种是描述法，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示成

$$M = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如，集合 B 是方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集，就可表示成

$$B = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}.$$

对于数集，有时我们在表示数集的字母的右上角标上“ * ”来表示该数集内排除 0 的集，标上“+”来表示该数集内排除 0 与负数的集.

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^+ = \{1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z} = \{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q}\,\middle|\, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\};$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^*$ 为排除数 0 的实数集，$\mathbf{R}^+$ 为全体正实数的集.

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B \supset A$（读作 B 包含 A）.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$. 例如，设

$$A = \{1,2\}, \quad B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\},$$

则 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$. 例如，$\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为**空集**. 例如

$$\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + 1 = 0\}$$

是空集，因为适合条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的. 空集记作 $\varnothing$，且规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing \subset A$.

2. 集合的运算

集合的基本运算有以下几种：并、交、差.

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**（简称**交**），记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**（简称**差**），记作 $A \backslash B$，即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

有时，我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时，我们称集合 I 为**全集**或**基本集**，称 $I \backslash A$ 为 A 的**余集**或**补集**，记作 A^C. 例如，

在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x \mid 0<x \leqslant 1\}$ 的余集就是

$$A^C=\{x \mid x \leqslant 0 \text{ 或 } x>1\}.$$

集合的并、交、余运算满足下列法则.

设 A、B、C 为任意三个集合，则有下列法则成立：

(1) 交换律　$A \cup B=B \cup A, A \cap B=B \cap A$；

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C)$，

$(A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C)$；

(3) 分配律　$(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup(B \cap C)$，

$(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap(B \cup C)$；

(4) 对偶律　$(A \cup B)^C=A^C \cap B^C$，

$(A \cap B)^C=A^C \cup B^C$.

以上这些法则都可根据集合相等的定义验证. 现就对偶律的第一个等式："两个集合的并集的余集等于它们的余集的交集"证明如下：因为

$$x \in(A \cup B)^C \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \Rightarrow x \in A^C \text{ 且 } x \in B^C \Rightarrow x \in A^C \cap B^C,$$

所以
$$(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C;$$

反之，因为

$$x \in A^C \cap B^C \Rightarrow x \in A^C \text{ 且 } x \in B^C \Rightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in(A \cup B)^C,$$

所以
$$A^C \cap B^C \subset(A \cup B)^C.$$

于是
$$(A \cup B)^C=A^C \cap B^C.$$

在两个集合之间还可以定义**直积**或**笛卡儿乘积**. 设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对 (x,y)，把这样的有序对作为新的元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记为 $A \times B$，即

$$A \times B=\{(x,y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}.$$

例如，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}=\{(x,y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

3. 区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$. 数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的**端点**，这里 $a \notin(a,b), b \notin(a,b)$. 数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的**端点**，这里 $a \in[a,b], b \in[a,b]$.

类似地可说明：

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为**半开区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些**区间的长度**. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来，分别如图 1-1(a) 与 (b) 所示. 此外还有所谓**无限区间**. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c) 与 (d) 所示.

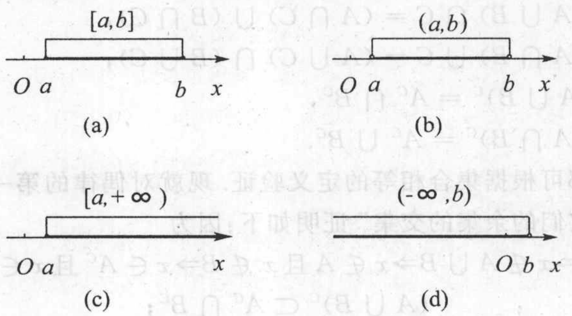


图 1-1

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为"区间"，且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 **δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**(图 1-2).

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

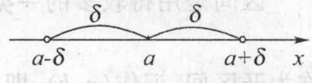


图 1-2

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x \neq a$.

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的**左 δ 邻域**，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的**右 δ 邻域**.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域. 例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y) \mid x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域，这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a,b]$ 和

闭区间$[c,d]$.

1.1.2　函数的概念

函数是一个最基本的数学概念，和许多重要的数学概念一样，人们对它的认识经历了由不全面到较全面，由不确切到较确切，由不严密到较严密的逐步深化过程. 17 世纪由于天文、力学及航海事业的发展，在数学领域已经出现了一些具体函数，其中大部分是作为曲线研究的. 随着科学技术的发展，新型的函数不断出现，数学先驱们也不断为函数下定义，但都受到时代的局限，直到 1837 年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805 ~ 1859) 才对函数给出了一个与现代十分接近的定义. 到了 19 世纪后期，函数又被定义为两集合之间的对应关系，避免了意义不够明确的“变量” 概念. 进入 20 世纪，有人用“序偶” 来定义函数，进一步克服了意义不够明确的“对应” 概念，之后又有人对“序偶” 作了进一步的明确.

考虑到本教材的使用对象是工科院校的学生，我们先按照狄利克雷的方式给出函数的定义，然后再用集合映射的观点加以说明，这既与中学数学课的函数概念衔接，又足以使读者正确理解微积分中的概念和理论.

定义 1-1　设有非空数集 X 和实数集 $\mathbf{R}$，f 是一个确定的法则(或关系)，对于每个 $x \in X$，都有唯一的 $y \in \mathbf{R}$ 与之相对应，并且将与 x 对应的 y 记作 $y = f(x)$，则称 f 是定义在 X 上的**一元函数**，简称为**函数**，称 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

这里，$f(x)$ 称为当自变量为 x 时，这个函数的函数值；称 x 的取值范围 X 为函数 f 的**定义域**，记作 $D(f)$，即 $D(f) = X$. 当 x 取遍 X 中一切值，函数值 $y = f(x)$ 的变化范围称为函数 f 的**值域**，记作 $R(f)$.

需要说明的是，f 表示由 $x(x \in X)$ 产生 $y[y \in R(f)]$ 的对应规则，而 y 或 $f(x)$ 表示通过 f 在 $R(f)$ 中与 x 对应的数值，二者是有区别的. 但是用 $y = f(x)$ 表示一个函数时，f 所代表的对应规则已完全确定，因而习惯上也把 y 或 $f(x)$ 称为自变量 x 的函数. 对应于 $x = x_0$ 的函数值记作 $f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$. 函数记号 $f(x)$ 是瑞士数学家欧拉(Euler，1707 ~ 1783) 在 1734 年引入的，当某一过程中涉及多个函数时，不同的函数要用不同的字母表示，如 $y = f(x)$，$y = g(x)$，$y = \varphi(x)$ 等，以示区别.

在函数定义中，最重要的是定义域和对应法则，给出一个函数时，必须同时说明这两个要素.

如果函数关系是由一个公式表示的，则约定函数的定义域是使公式有意义的一切实数组成的集合，这样的定义域称为函数的**自然定义域**. 例如 $y = \sqrt{x}$ 的定义域 $D(f) = [0,\infty)$；$y = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+1}$ 的定义域是$(-1,1) \cup (1,+\infty)$.

如果函数是由实际问题确定的，则其定义域要由问题本身的意义来确定. 例如，自由落体运动中，物体下落的距离 h 是时间 t 的函数：$h = \dfrac{1}{2}gt^2$. 如果开始下落的时刻为 $t = 0$，落地时刻为 $t = T$，则这个函数的定义域为$[0,T]$. 若不考虑该问题的背景，函数 $h = \dfrac{1}{2}gt^2$

的自然定义域则是$(-\infty,+\infty)$.

本课程是在实数范围内讨论，由于实数集$\mathbf{R}$中的数和实数轴上的点是一一对应的，因此除特别声明外，数和点将不加区别. 例如，函数$f(x)$在数$x=x_0$处的函数值$f(x_0)$和在点$x=x_0$处的函数值$f(x_0)$是同一含义.

设函数$y=f(x)$的定义域为X，对于任意取定的$x\in X$，对应的函数值为$y=f(x)$，从几何上看，在平面直角坐标系中，点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$称为函数$y=f(x)$的**图形**. 一个函数的图形通常是一条曲线，$y=f(x)$也叫做这条曲线的方程，函数图形简明直观，使人能一眼看出函数变化的全貌. 这样，函数的一些性态可借助图形来研究，而一些几何问题也常借助于函数来作理论探讨.

在数学发展的过程中，形成了最简单的五类函数，即**幂函数**、**指数函数**、**对数函数**、**三角函数**和**反三角函数**，描述现实世界千变万化关系的函数常常由这几类函数和常数构成. 因此，把它们称为**基本初等函数**. 它们的定义、性质和图形在中学已学过，这里不再赘述. 下面再举几个函数例子，以加深理解.

【例 1-1】 常数函数$y=2$. 它的定义域$D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域$R(f)=\{2\}$，其图形如图 1-3 所示.

【例 1-2】 绝对值函数$y=|x|$.

由绝对值定义可知

$$y=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

它的定义域$D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域$R(f)=[0,+\infty)$，其图形如图 1-4 所示.

例 1-2 中出现的函数在自变量不同的取值范围内，用不同的解析式表示，这样的函数称为**分段函数**，这种函数在工程技术中经常出现. 注意，分段函数表示的是一个函数，而不是几个函数.

【例 1-3】 最大整数函数$y=[x]$. 符号$[x]$表示不超过x的最大整数，例如$[-3]=-3$，$[-1.5]=-2$，$[0.3]=0$，$[1.7]=1$. 这个函数的定义域$D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域$R(f)=\{$整数$\}$，其图形呈逐步升高的阶梯形(图 1-5). 这类函数称为**阶梯函数**.

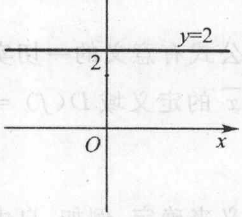


图 1-3

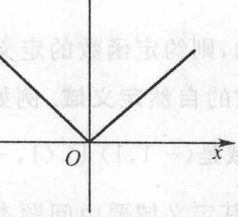


图 1-4

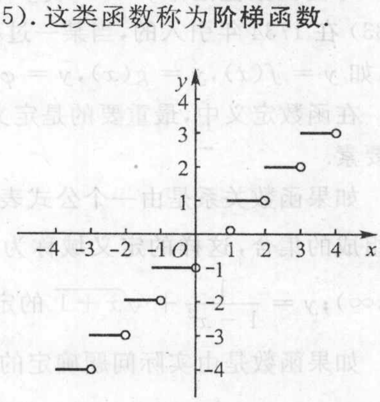


图 1-5

有许多实际问题可以用阶梯函数表示，如长途电话收费和通话时间的函数关系，出租车计价器显示的金额和行车里程的函数关系等.

【例 1-4】 根据个人所得税法规定，个人月收入减去 800 元的余额部分为纳税所得额. 纳税所得额不超过 500 元的部分，税率为 5%；超过 500 元到 2000 元的部分，税率为 10%；超过 2000 元到 5000 元的部分，税率为 15%.

据此规定，可以写出月收入在 5800(元) 以下者，月收入 x(元) 与应交纳个人所得税 y(元) 之间的函数关系.

$$y=\begin{cases}0 & (x\leqslant 800)\\ (x-800)\cdot\dfrac{5}{100} & (800<x\leqslant 1\,300)\\ 25+(x-1\,300)\cdot\dfrac{10}{100} & (1\,300<x\leqslant 2\,800)\\ 25+150+(x-2\,800)\cdot\dfrac{15}{100} & (2\,800<x\leqslant 5\,800)\end{cases}.$$

1.1.3　函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，若存在某个确定的常数 $M>0$，使得对一切 $x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**. 反之，若对任意给定的正数 M(无论 M 多么大)，总存在 $x_1\in X$，使得 $|f(x_1)|>M$，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

函数的有界定义也可以这样表述：如果存在常数 l 和 L，使得对任一 $x\in X$，都有 $l<f(x)<L$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界，并称 l 和 L 分别是 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**和一个**上界**.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内只有下界，而无上界，因而无界. 但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上却是有界的，因为在 $[1,2]$ 上，显然 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，若对 X 上的任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ [或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称 $f(x)$ 在 X 上**单调增加**[或**单调减少**]. 单调增加或单调减少的函数均称为**单调函数**.

单调增加函数的图形沿 x 轴的正向呈上升状，单调减少函数的图形沿 x 轴的正向呈下降状.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，而在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 内单调减少. 当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称(即若 $x\in X$，则必有 $-x\in X$)，若对任意的 $x\in X$，等式 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若对任意的 $x\in X$，等式 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称. 例如 $y=x^2$，$y=\cos x$ 是偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$ 是奇函数. 而 $y=x^2+\sin x$ 既非偶函数，也非奇函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 X，若存在一个非零常数 T，使得对每个 $x\in X$，有 $x\pm T\in X$，且 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说的周期函数的周期是指最小正周期. 如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

需要指出的是，并不是每个周期函数都有最小正周期. 例如狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ 为有理数})\\ 0 & (x\text{ 为无理数})\end{cases},$$

容易验证，任意正的有理数都是它的周期，但是不存在最小正周期.

1.1.4 复合函数与反函数

复合函数与反函数是经常遇到的函数形式.

【例 1-5】 某金属球的体积 V 是其半径 r 的函数：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$. 由于热胀冷缩，球的半径又随着温度 T 变化，设 r 随 T 的变化规律是 $r=r_0(1+0.017T)$，其中 r_0 是常数. 将 $r=r_0(1+0.017T)$ 代入 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，就得到体积 V 与温度 T 之间的函数关系

$$V=\frac{4}{3}\pi r_0^3(1+0.017T)^3$$

像这样把一个函数代入另一个函数而得到的函数，称为由这两个函数构成的复合函数.

定义 1-2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$；函数 $u=g(x)$ 的定义域为 $D(g)$，值域为 $R(g)\subseteq D(f)$，则对任意的 $x\in D(g)$，通过 $u=g(x)$ 有唯一的 $u\in R(g)\subseteq D(f)$，再通过 $y=f(u)$ 又有唯一的 $y\in R(f)$. 这样，对任意的 $x\in D(g)$，通过 u 有唯一的 $y\in R(f)$ 与之对应，因此 y 是 x 的函数，我们称这个函数为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的**复合函数**，记作

$$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))\quad [x\in D(g)],$$

并称 u 为**中间变量**，$u=g(x)$ 为**中间函数**.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成，也可由更多的函数复合而成. 例如函数 $y=\sqrt{1+\lg(2+\cos\sqrt{x})}$ 是由 4 个简单函数 $y=\sqrt{u}$，$u=1+\lg v$，$v=2+\cos w$，$w=\sqrt{x}$ 复合而成的.

应该注意的是，并非任意两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合，因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 对应的 u，都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义. $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 能否复合，关键在于是否满足定义中的 $R(g)\subseteq D(f)$.

【例 1-6】 函数 $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$ 可以看做由 $y=\arcsin u$ 和 $u=\frac{x-1}{2}$ 复合而成.